Глава 4. Методы исследования математических моделей.

1. Принцип Дирихле.

$$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$$

$$F(u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2$$

$$F_u = 0 \;\; ; \;\; F_p = 2u_x, F_q = 2u_y, \; p = u_x, q = u_y$$

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = -2u_{xx} - 2u_{yy} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_{xx} + 2u_{yy} = 0$$

$$D(u+\varepsilon h)=\int\limits_D\left(\left(u_x+\varepsilon h_x\right)^2+\left(u_y+\varepsilon h_y\right)^2\right)dxdy=$$

$$\int\limits_D\left(u_x{}^2+u_y{}^2\right)dxdy+2\varepsilon\int\limits_D\left(u_xh_x+u_yh_y\right)dxdy+\varepsilon^2\int\limits_D\left(h_x^2+h_y^2\right)dxdy=$$

$$=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\geq 0$$

$$D(u,h)=\int\limits_D\left(u_xh_x+u_yh_y\right)dxdy$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}D(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}=2D(u,h)=0\ \Rightarrow D(u,h)=0$$

$$D(u,h)=\int\limits_D\left(u_xh_x+u_yh_y\right)dxdy=\int\limits_D gradu\cdot gradh\,dxdy$$

2. Задача на собственные значения

$$F'(\varepsilon)=\frac{1}{\left(H(u)+2\varepsilon H(u,h)+\varepsilon^2 H(h)\right)^2}\cdot((2D(u,h)+2\varepsilon D(h))\cdot$$

$$\cdot\left(H(u)+2\varepsilon H(u,h)+\varepsilon^2 H(h)\right)-2\left(D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\right)\cdot$$

$$\cdot(2H(u,h)+2\varepsilon H(h)))$$

$$F'(0)=2\frac{D(u,h)H(u)-D(u)H(u,h)}{H^2(u)}=0 \qquad (22)$$

$$J(u)=\frac{D(u)}{H(u)}=\lambda>0\ \ (19) \quad \Rightarrow \quad D(u)=\lambda H(u)\ \ (23)$$

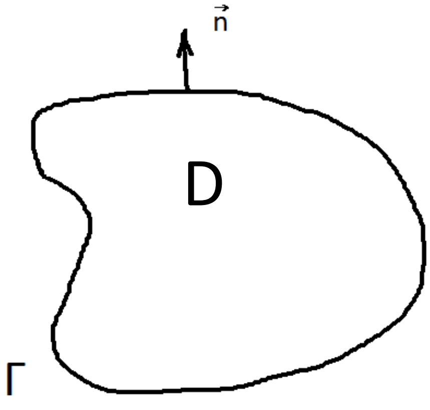
$$(23)\to(22)\Rightarrow \quad H(u)D(u,h)-D(u)H(u,h)=$$

$$=H(u)\left(D(u,h)-\lambda H(u,h)\right)=0 \qquad (24)$$

$$H(u)\neq 0\ \Rightarrow\ D(u,h)-\lambda H(u,h)=0\ \ (25)$$

$$\int_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy=\oint_\Gamma uv\cos(x\,\hat{,}\,n)d\sigma-\int_D v\frac{\partial u}{\partial x}dxdy$$

$$\int_D u\frac{\partial v}{\partial y}dxdy=\oint_\Gamma uv\cos(y\,\hat{,}\,n)d\sigma-\int_D v\frac{\partial u}{\partial y}dxdy$$



$h\big|_\Gamma=0$ *как допустимая функция*

$$D(u,h)=\int_D\left(u_x h_x+u_y h_y\right)dxdy=$$

$$=\oint_{\Gamma=0} h(u_x\cos(x\,\hat{,}\,n)+u_y\cos(y\,\hat{,}\,n))ds$$

$$-\int_D h(u_{xx}+u_{yy})dxdy=-\int_D h\triangle u\,dxdy \qquad (26)$$

$$(26) \Rightarrow D(u,h) - \lambda H(u,h) = -\int_D h(\triangle u + \lambda u)dxdy =$$

$$= -H(h, \triangle u + \lambda u) = 0 \quad (27)$$

$$u \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \triangle u \in C(D), \forall h(x,y), \ (27) \ \Rightarrow \ \triangle u + \lambda u = 0$$

$$0 = H(\underline{\triangle \tilde{u} + \tilde{\lambda}\tilde{u}}, \tilde{u}) = \int_D \triangle \tilde{u} \cdot \tilde{u} dxdy + \int_D \tilde{u}^2 dxdy =$$

$$= \oint_\Gamma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \cdot \tilde{u} d\sigma - \int_D (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) dxdy + \tilde{\lambda} \int_D \tilde{u}^2 dxdy =$$

$$= -D(\tilde{u}) + \tilde{\lambda} H(\tilde{u}) = 0 \ \ (29) \ \Rightarrow \ \tilde{\lambda} = \frac{D(\tilde{u})}{H(\tilde{u})} \ \ (30)$$

$$\lambda = \min_{u \in P} J(u) = \min_{u \in P} \frac{D(u)}{H(u)} < \tilde{\lambda}$$

§2 2.Метод Ритца

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \; ; (Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \;\Rightarrow\; (A\sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i, \varphi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (A\varphi_i, \varphi_i) a_i = (f, \varphi_i) \quad ; \quad \hat{A} = \left\{ A_{ij} \right\}, \, A_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_i),$$

$$a = (a_1, \ldots, a_N)^T, \; b = (f_1, \ldots, f_N)^T, \; f_j = (f, \varphi_j), \; i, j = 1, \ldots, N.$$

Так как A – положительно определенный оператор и $\{\varphi_i\}$ - линейно независимая система, то при $v_N = \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i, \; b = (f_1, \ldots, f_N)^T \neq 0 = (0, \ldots, 0)^T$ имеем:

$$(\hat{A}b, b) = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} b_i b_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (A\varphi_i, \varphi_j) b_i b_j = \left(A\sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i, \sum_{i=1}^{N} b_j \varphi_j \right) = (Av_N, v_N) \geq \gamma^2 \left\| v_N \right\|^2 > 0$$

то есть $\hat{A}$ - положительно определенная матрица, а значит, невырожденная. Следовательно, система $\hat{A}a = b$ имеет единственное решение, определяя единственную функцию $u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i$. Для u_N можно получить априорную оценку:

$$(Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i (Au_N, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i (f, \varphi_i) \Rightarrow \left(Au_N, \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \right) = \left(f, \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \right) \Rightarrow$$

$$(Au_N, u_N) = (f, u_N), \; (Au_N, u_N) \geq \gamma^2 \left\| u_N \right\|^2 \;\Rightarrow\; \left| (f, u_N) \right| \geq \gamma^2 \left\| u_N \right\|^2.$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| (f, u_N) \right| \leq \| f \| \left\| u_N \right\|^2 \Rightarrow \gamma^2 \left\| u_N \right\|^2 \leq \| f \| \left\| u_N \right\|^2 \;\Rightarrow\; \left\| u_N \right\| \leq \frac{\| f \|}{\gamma^2}$$

<u>Т.</u> $(A(u_0 - v), u_0 - v) = (Au_0, u_0) - (Au_0, v) - (v, Au_0) + (Av, v) =$

$$(Au_0,u_0)+(Av,v)-2(Au_0,v)=(Au_0,u_0)+(Av,v)-2(f,v)=$$

$$=(Av,v)-2(v,f)-(Au_0,u_0)+2(u_0,f)-2(Au_0,v)+2(f,v)=$$

$$=F(v)-F(u_0)-2(f,v)+2(f,v)=F(v)-F(u_0) \quad \Rightarrow$$

$$(A(u_0-v),u_0-v)=F(v)-F(u_0)$$

u_0 минимизирует $F(v)$ на $D(A)$, u_N минимизирует $F(v)$ на H_N $\Rightarrow$

$$(A(u_0-u_N),u_0-u_N)=F(v)-F(u_0)\le F(v_N)-F(u_0)=$$

$=(A(u_0-v_N),u_0-v_N)$ для $\forall v_N=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi_i\in H_N \Rightarrow$

$$\gamma^2\left\|u_0-u_N\right\|^2\le(A(u_0-u_N),u_0-u_N)\le(A(u_0-v_N),u_0-v_N)=$$

$$(u_0-v_N,A(u_0-v_N))=(A^{-1}A(u_0-v_N),(u_0-v_N))=\left\|A^{-1}\right\|\cdot(A(u_0-v_N),A(u_0-v_N))$$
$$=\left\|A^{-1}\right\|\left\|A(u_0-v_N)\right\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left\|u_0-u_N\right\|^2\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{\gamma^2}\left\|A(u_0-v_N)\right\|^2$$

$$\left\|A\right\|=\sup_{u\ne0}\frac{\left\|Au\right\|}{\left\|u\right\|}$$