Основы теории специальных функций

Необходимость изучения специальных функций математической физики связана с двумя основными обстоятельствами. Во-первых, при разработке математической модели физического явления сначала целесообразно рассматривать упрощенные задачи, допускающие аналитическое решение. Во-вторых, эти упрощенные задачи могут использоваться в качестве тестовых для выбора численного алгоритма решения более сложной задачи и его отладки.

При решении многих задач теоретической и математической физики используются различные специальные функции. На практике специальные функции обычно возникают как решения различных дифференциальных уравнений. Поэтому в данном курсе будет рассматриваться подход, позволяющий получить все основные свойства специальных функций непосредственно из дифференциальных уравнений, присутствующих в постановке задачи.

1 Дифференциальное уравнение для специальных функций

Многие важные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальному уравнению

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \tag{1.1}$$

где $\sigma(z)$ и $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени z, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени z.

Частными решениями уравнения вида (1.1) являются классические ортогональные полиномы, цилиндрические и гипергеометрические функции. Эти функции часто называют специальными функциями математической физики.

Покажем, что с помощью специальной замены искомой функции уравнение (1.1) можно упростить и привести к виду:

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \tag{1.2}$$

где λ — некоторая постоянная, $\tau(z)$ — полином не выше первой степени z. Уравнение (1.2) называется *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения — *функциями гипергеометрического типа*.

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$u(z) = \varphi(z)y(z),$$

где функцию $\varphi(z)$ необходимо подобрать так, чтобы уравнение (1.1) преобразовалось в уравнение (1.2). Подставляя $u(z)$ в уравнение (1.1), получаем:

$$u' = \varphi' y + \varphi y', \quad u'' = \varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y'' \;\Rightarrow$$

$$\varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y'' + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}(\varphi' y + \varphi y') + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\varphi y = 0 \;\Rightarrow$$

$$y'' + \left(\frac{2\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right) y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right) y = 0. \tag{1.3}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при y' имел вид $\dfrac{\tau(z)}{\sigma(z)}$, где $\tau(z)$ — некоторый полином не старше первой степени:

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma} = \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)},$$

где $\pi(z) = \dfrac{\tau(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}$ — полином не старше первой степени. Так как имеет место равенство

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

то уравнение (1.3) для функции $y(z)$ принимает вид:

$$y'' + \frac{\tau}{\sigma} y' + \underbrace{\left\{ \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 + \frac{\pi\tilde{\tau}}{\sigma^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2} \right\}}_{\frac{\pi'}{\sigma} - \frac{\pi\sigma'}{\sigma^2} + \frac{\pi^2 + \pi\tilde{\tau} + \tilde{\sigma}}{\sigma^2} = \frac{\pi'\sigma + \pi^2 + \pi(\tilde{\tau} - \sigma') + \tilde{\sigma}}{\sigma^2}} y = 0,$$

причем $\bar{\sigma} = \pi'\sigma + \pi^2 + \pi(\tilde{\tau} - \sigma') + \tilde{\sigma}$ — полином не старше второй степени. Итак, в результате замены приходим к уравнению:

$$y'' + \frac{\tau}{\sigma} y' + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2} y = 0$$

того же типа, что и исходное уравнение (1.1). Выберем коэффициенты полинома $\pi(z)$ так, чтобы выполнялось равенство $\bar{\sigma}(z) = \lambda \sigma(z)$:

$$\pi' \sigma + \pi^2 + \pi(\tilde{\tau} - \sigma') + \tilde{\sigma} = \lambda \sigma. \tag{1.4}$$

Так как π' — число, то и $k = \lambda - \pi'$ — число. Следовательно, уравнение (1.4) можно переписать в виде:

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0.$$

Это квадратное относительно функции π уравнение имеет корни

$$\pi_{\pm} = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \tag{1.5}$$

Так как функция $\pi(z)$ должна быть полиномом, то подкоренное выражение в (1.5) должно быть представимо в виде полного квадрата некоторого полинома. Из этого условия получаем в общем случае квадратное уравнение для постоянной k. Если k найдено, то по нему можно найти $\pi(z)$ и λ, а затем $\tau(z)$ и $\varphi(z)$. Все эти функции, вообще говоря, находятся неоднозначно. Выбирать один из возможных вариантов следует в соответствии с дополнительными условиями конкретной задачи.

Пример 1.1. *Приведите уравнение Бесселя к уравнению гипергеометрического типа.*
Решение. Запишем уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - \nu^2) u = 0$$

в виде

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \frac{z^2 - \nu^2}{z^2} u = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.1), находим: $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. В результате замены $u = \varphi y$ получаем:

$$\pi_{\pm} = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} = \frac{1 - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - 1}{2}\right)^2 - z^2 + \nu^2 + kz} = \pm\sqrt{-z^2 + kz + \nu^2}.$$

Подкоренное выражение является полным квадратом, если его дискриминант равен нулю:

$$D = k^2 + 4\nu^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k = \pm 2i\nu.$$

Следовательно,

$$\pi_{\pm}(z) = \pm\sqrt{-(z \mp i\nu)^2} = \pm(iz \pm \nu).$$

Выберем, например, $k = 2i\nu$ и $\pi = iz + \nu$. Тогда

$$\lambda = k + \pi'(z) = i(2\nu + 1), \qquad \tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z) = 1 + 2iz + 2\nu,$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{iz+\nu}{z} = i + \frac{\nu}{z} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dz}\ln\varphi = i + \frac{\nu}{z} \;\Rightarrow\; \ln\varphi = iz + \nu\ln z + \ln C = \ln(Cz^{\nu}e^{iz}) \;\Rightarrow$$
$$\varphi(z) = Cz^{\nu}e^{iz},$$

где C — нормировочный множитель. Не ограничивая общности, возьмем $C = 1$. Тогда для $y(z)$ получим уравнение гипергеометрического типа:

$$zy'' + (2iz + 2\nu + 1)y' + i(2\nu + 1)y = 0,$$

где $u(z) = z^{\nu}e^{iz}y(z)$.

Замечание 1.1 *В дальнейшем можно ограничиться случаем, когда $\sigma(z)$ не имеет кратных корней. В самом деле, если $\sigma(z) = (z-a)^2$, то можно сделать замену переменных $z - a = \frac{1}{s}$. При этом*

$$\frac{d}{dz} = \frac{ds}{dz}\cdot\frac{d}{ds} = -\frac{1}{(z-a)^2}\cdot\frac{d}{ds} = -s^2\frac{d}{ds} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dz} = -s^2\frac{du}{ds}, \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = s^2\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{du}{ds}\right) = s^4\frac{d^2u}{ds^2} + 2s^3\frac{du}{ds},$$

и уравнение (1.1) принимает вид:

$$s^4\frac{d^2u}{ds^2} + \left(2s^3 - s^4\tilde{\tau}\left(a + 1/s\right)\right)\frac{du}{ds} + s^4\tilde{\sigma}\left(a + 1/s\right)u = 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}\left(a+1/s\right)}{s}\frac{du}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}\left(a+1/s\right)}{s^2}u = 0. \tag{1.6}$$

Так как $s\tilde{\tau}\left(a+1/s\right)$ — полином не старше первой степени, а $s^2\tilde{\sigma}\left(a+1/s\right)$ — полином не старше второй степени, то уравнение (1.6) является уравнением типа (1.1), где $\sigma(s) = s$ кратных корней не имеет.

2 Полиномы гипергеометрического типа

Рассмотрим ряд свойств уравнения

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0. \tag{2.1}$$

Утверждение 2.1 *Производные $y^{(n)}$ любого порядка n функции гипергеометрического типа являются функциями гипергеометрического типа.*

Решение. Необходимо показать, что функции $y^{(n)}$ удовлетворяют уравнению гипергеометрического типа. Докажем это утверждение по индукции. Пусть $n = 1$. Обозначим $v_1(z) = y'(z)$, где $y(z)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Дифференцируя уравнение (2.1), получаем:

$$\sigma' \underbrace{y''}_{v_1'} + \sigma \underbrace{y'''}_{v_1''} + \tau' \underbrace{y'}_{v_1} + \tau \underbrace{y''}_{v_1'} + \lambda \underbrace{y'}_{v_1} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma v_1'' + \underbrace{(\sigma' + \tau)}_{\tau_1} v_1' + \underbrace{(\lambda + \tau')}_{\mu_1} v_1 = 0.$$

Так как $\tau_1(z)$ — полином степени не старше 1, а μ_1 — число, то $v_1(z)$ — функция гипергеометрического типа, то есть для $n = 1$ утверждение 2.1 справедливо.

Введем обозначение $v_n = y^{(n)}$ и продифференцируем теперь уравнение (2.1) n раз:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \sigma^{(m)} y^{(n+2-m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m \tau^{(m)} y^{n+1-m} + \lambda y^{(n)} = 0,$$

где $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Так как σ — полином не старше второй степени, а τ — полином не старше первой степени, получаем:

$$\underbrace{C_n^0}_{1} \sigma \underbrace{y^{(n+2)}}_{v_n''} + \underbrace{C_n^1}_{n} \sigma' \underbrace{y^{(n+1)}}_{v_n'} + \underbrace{C_n^2}_{\frac{n(n-1)}{2}} \sigma'' \underbrace{y^{(n)}}_{v_n} + \underbrace{C_n^0}_{1} \tau \underbrace{y^{(n+1)}}_{v_n'} + \underbrace{C_n^1}_{n} \tau' \underbrace{y^{(n)}}_{v_n} + \lambda \underbrace{y^{(n)}}_{v_n} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\sigma v_n'' + \underbrace{(\tau + n\sigma')}_{\tau_n} v_n' + \underbrace{\left(\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''\right)}_{\mu_n} v_n = 0.$$

Так как $\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z)$ — полином не старше первой степени, а $\mu_n = \lambda + n\tau' + \dfrac{n(n-1)}{2}\sigma''$ — число, то уравнение

$$\sigma v_n'' + \tau_n v_n' + \mu_n v_n = 0 \tag{2.2}$$

является уравнением гипергеометрического типа. При этом любое решение уравнения (2.2) можно представить в виде $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, где $y(z)$ — некоторое решение уравнения (2.1).

Заметим, что при $\mu_n = 0$ уравнение (2.2) имеет частное решение $v_n(z) = const$. Так как $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, то это означает, что при

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

существует частное решение $y(z)$ уравнения (2.1), являющееся полиномом степени n. Такие решения называют *полиномами гипергеометрического типа.*

Чтобы получить явное выражение полинома гипергеометрического типа $y(z)$, приведем уравнение (2.1) к дивергентному виду. Для этого умножим его на некоторую функцию $\rho(z)$:

$$\rho\sigma y'' + \rho\tau y' + \lambda\rho y = 0.$$

Заметим, что $\rho\sigma y'' + \rho\tau y' = (\rho\sigma y')'$, если

$$(\rho\sigma)' = \rho\tau. \tag{2.3}$$

Далее будем считать, что функция $\rho(z)$ удовлетворяет этому условию. Уравнение (2.3) называется уравнением Пирсона.

Аналогично введем функцию $\rho_n(z)$, такую что $(\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n$. Тогда уравнение (2.2) можно переписать в эквивалентном виде

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0. \tag{2.4}$$

Установим связь между функциями ρ_n и $\rho_0 = \rho$. Для этого воспользуемся уравнением Пирсона:

$$\frac{(\sigma\rho_n)'}{\rho_n} = \tau_n = \tau + n\sigma' = \frac{(\sigma\rho_0)'}{\rho_0} + n\sigma' \quad\Rightarrow\quad \sigma' + \sigma\frac{\rho_n'}{\rho_n} = \sigma' + \sigma\frac{\rho_0'}{\rho_0} + n\sigma' \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\rho_n'}{\rho_n} = \frac{\rho_0'}{\rho_0} + n\frac{\sigma'}{\sigma} \quad\Rightarrow\quad (\ln\rho_n)' = (\ln\rho_0)' + n(\ln\sigma)' \quad\Rightarrow\quad \rho_n = C\sigma^n\rho_0,$$

где C — нормировочная постоянная. Не ограничивая общности, можно взять $C = 1$. Итак, для функций ρ_0 и ρ_n получаем следующие соотношения:

$$\rho_n = \sigma^n\rho_0, \qquad \rho_{n+1} = \sigma\rho_n.$$

Следовательно, уравнение (2.4) можно переписать в виде:

$$\rho_n v_n = -\frac{1}{\mu_n}(\rho_{n+1}v_{n+1})'.$$

Пусть $m < n$ — целое неотрицательное число. Тогда имеет место цепочка равенств:

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}v_{m+1})' = \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)(\rho_{m+2}v_{m+2})'' = \ldots =$$

$$= (-1)^{n-m}\prod_{k=m}^{n-1}\frac{1}{\mu_k}(\rho_n v_n)^{(n-m)}.$$

Введем обозначения: $A_0 = 1,\;\; A_m = (-1)^m\prod\limits_{k=0}^{m-1}\mu_k$. Тогда

$$\rho_m v_m = \frac{A_m}{A_n}(\rho_n v_n)^{(n-m)}.$$

Если $y(z) = y_n(z)$ — полином степени n, то $v_n = y_n^{(n)} = const$, и

$$v_m = y_n^{(m)} = \frac{A_m B_n}{\rho_m} \rho_n^{(n-m)}, \quad \text{где} \quad B_n = \frac{y_n^{(n)}}{A_n}.$$

В частности, при $m = 0$ получаем явное выражение для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]^{(n)}. \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) называют формулой Родрига, так как оно было получено Родригом в 1814 г. для частного случая полиномов гипергеометрического типа — полиномов Лежандра, для которых $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = 1$.

3 Интегральное представление функций гипергеометрического типа

Получим обобщение формулы Родрига для частных решений уравнения

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0 \tag{3.1}$$

при произвольных значениях λ. Для этого воспользуемся интегральной формулой Коши для аналитической функции f:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \tag{3.2}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точку $s = z$.

Пользуясь равенством (3.2), перепишем выражение для полинома гипергеометрического типа $y_n(z)$, отвечающего $\lambda_n = -n\tau' - \dfrac{n(n-1)}{2}\sigma''$, в виде:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left(\sigma^n(z)\rho(z)\right) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \tag{3.3}$$

где $C_n = \dfrac{B_n n!}{2\pi i}$, $\rho(z)$ — решение уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$.

Выражение (3.3) для частного решения уравнения гипергеометрического типа при $\lambda = \lambda_n$ дает возможность предположить, что при произвольном λ частное решение уравнения (3.1) можно искать в виде:

$$y(z) = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds, \tag{3.4}$$

где C_ν — нормировочная постоянная, а величина ν связана с параметром λ соотношением

$$\lambda = -\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''. \tag{3.5}$$

Контур C в выражении (3.4) может быть незамкнутым.

Теорема 3.1 *Уравнение (3.1) имеет частные решения вида (3.4), если контур C удовлетворяет условиям:*

1) при дифференцировании выражения (3.4) можно менять местами порядок дифференцирования по z и интегрирования по s, то есть если имеет место равенство

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}ds\right\} = (\nu+1)...(\nu+k)\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+k+1}}ds,$$

где k принимает значения 1 и 2;

2) имеет место равенство

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0,$$

где s_1 и s_2 — концы контура C.

Доказательство. Пусть ν — корень уравнения (3.5), а $y_\nu(z)$ — частное решение уравнения (3.1), которое мы ищем в виде

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)}w_\nu(z), \qquad w_\nu(z) = \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}ds.$$

Тогда:

$$y'_\nu = -\frac{C_\nu}{\rho^2}\rho' w_\nu + \frac{C_\nu}{\rho}w'_\nu, \qquad y''_\nu = \frac{2C_\nu}{\rho^3}(\rho')^2 w_\nu - \frac{C_\nu}{\rho^2}\rho'' w_\nu - 2\frac{C_\nu\rho'}{\rho^2}w'_\nu + \frac{C_\nu}{\rho}w''_\nu.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.5), получаем:

$$\sigma\frac{2}{\rho^3}(\rho')^2 w_\nu - \sigma\frac{\rho''}{\rho^2}w_\nu - 2\sigma\frac{\rho'}{\rho^2}w'_\nu + \frac{\sigma}{\rho}w''_\nu - \tau\frac{\rho'}{\rho^2}w_\nu + \frac{\tau}{\rho}w'_\nu - \frac{\nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''}{\rho}w_\nu = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\sigma w''_\nu + \left(-2\sigma\frac{\rho'}{\rho} + \tau\right)w'_\nu + \left[2\sigma\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \sigma\frac{\rho''}{\rho} - \tau\frac{\rho'}{\rho} - \left(\nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''\right)\right]w_\nu = 0.$$

Так как имеет место равенство

$$\frac{\rho''}{\rho} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2,$$

окончательно получаем:

$$\sigma w_\nu'' + \left(-2\sigma\frac{\rho'}{\rho} + \tau\right) w_\nu' + \left[\sigma\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 - \sigma\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' - \tau\frac{\rho'}{\rho} - \left(\nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''\right)\right] w_\nu = 0.$$

Так как функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, то

$$\sigma'\rho + \sigma\rho' = \tau\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\tau - \sigma'}{\sigma}.$$

С учетом этого равенства уравнение для функции w_ν принимает вид:

$$\sigma w_\nu'' + \underbrace{(-2\tau + 2\sigma' + \tau)}_{2\sigma' - \tau} w_\nu' + \left[\frac{(\tau - \sigma')^2}{\sigma} - \sigma\left(\frac{\tau - \sigma'}{\sigma}\right)' - \frac{\tau^2 - \tau\sigma'}{\sigma} -\right.$$

$$\left. - \left(\nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''\right)\right] w_\nu = 0.$$

Приведем подобные в выражении в квадратных скобках:

$$\frac{(\tau - \sigma')^2}{\sigma} - \sigma\left(\frac{\tau - \sigma'}{\sigma}\right)' - \frac{\tau^2 - \tau\sigma'}{\sigma} =$$

$$= \frac{\tau^2 - 2\tau\sigma' + (\sigma')^2 - \tau'\sigma + \sigma''\sigma + \tau\sigma' - (\sigma')^2 - \tau^2 + \tau\sigma'}{\sigma} = \sigma'' - \tau'.$$

Итак, функция $w_\nu(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\sigma w_\nu'' + (2\sigma' - \tau) w_\nu' - (\nu + 1)\left(\tau' + \frac{\nu - 2}{2}\sigma''\right) w_\nu = 0. \tag{3.6}$$

Покажем, что функция $w_\nu(z)$ действительно является частным решением уравнения (3.6), если выполнены условия теоремы. В самом деле, по условию функцию $w_\nu(z)$ можно дифференцировать по параметру z под знаком интеграла, то есть

$$w_\nu'(z) = (\nu + 1)\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^{\nu+2}} ds, \qquad w_\nu''(z) = (\nu + 1)(\nu + 2)\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^{\nu+3}} ds.$$

Рассмотрим выражение в левой части уравнения (3.6):

$$\Phi(z) = \sigma w_\nu'' + (2\sigma' - \tau) w_\nu' - (\nu + 1)\left(\tau' + \frac{\nu - 2}{2}\sigma''\right) w_\nu =$$

$$= (\nu + 1)\int\limits_C \Big\{(\nu + 2)\sigma(z) + (s - z)(2\sigma'(z) - \tau(z)) -$$

$$-(s - z)^2\left(\tau'(z) + \frac{\nu - 2}{2}\sigma''(z)\right)\Big\} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s - z)^{\nu+3}} ds.$$

Обозначим $\psi(z, s)$ выражение в фигурных скобках под интегралом. Так как имеют место равенства:

$$\tau(z) = \tau(z - s + s) = \tau(s) + (z - s)\tau',$$

$$\sigma(z)=\sigma(z-s+s)=\sigma(s)+(z-s)\sigma'(s)+\frac{(z-s)^2}{2}\sigma'',$$

то

$$\psi(z,s)=(\nu+2)\sigma(s)+(\nu+2)(z-s)\sigma'(s)+(\nu+2)\frac{(z-s)^2}{2}\sigma''(s)+$$
$$+(s-z)(2\sigma'(s)+2(z-s)\sigma''-\tau(s)-(z-s)\tau')-(s-z)^2\left(\tau'+\frac{\nu-2}{2}\sigma''\right)=$$
$$=(\nu+2)\sigma(s)+\sigma'(s)\underbrace{[(\nu+2)(z-s)+2(s-z)]}_{\nu(z-s)}+\tau(s)(z-s)=(\nu+2)\sigma(s)-(s-z)\underbrace{(\tau(s)+\nu\sigma'(s))}_{\tau_\nu(s)}.$$

Итак, левая часть уравнения (3.6) имеет вид:

$$\Phi(z)=(\nu+1)\int\limits_C((\nu+2)\sigma(s)-(s-z)\tau_\nu(s))\frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+3}}ds.$$

Пусть $\rho_\nu=\sigma^\nu\rho$. Тогда $(\sigma\rho_\nu)'=\tau_\nu\rho_\nu$, и поэтому

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right]=-(\nu+2)\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}+\frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}=-((\nu+2)\sigma(s)-(s-z)\tau_\nu(s))\frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}.$$

Следовательно,

$$\Phi(z)=-(\nu+1)\int\limits_C\frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right]ds=-(\nu+1)\left.\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2}=-(\nu+1)\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2}.$$

В силу второго требования на контур C, сформулированного в условиях теоремы, получаем, что $\Phi(z)=0$, то есть функция $w_\nu(z)$ действительно удовлетворяет уравнению (3.6), что в свою очередь означает, что функция $y_\nu(z)$ является частным решением уравнения (3.1). ■

4 Выбор контура C и аналитическое продолжение решения

Выбирая различные контуры C и различные корни ν уравнения (3.5) (в общем случае квадратного), мы получаем различные частные решения уравнения гипергеометрического типа. Как правило, в качестве контура C выбираются либо некоторые отрезки прямых, либо лучи.

Условия теоремы 3.1 будут выполнены, если функция $\dfrac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}$ обращается в ноль на концах контура C. В качестве одного из концов контура C можно взять корень s_0 уравнения $\sigma(s)=0$, если функция $\rho(s)$ такова, что

$$\sigma^{\nu+1}\rho(s)\big|_{s=s_0}=0.$$

Если $\mathrm{Re}(\nu+2) < 0$, то в качестве одного из концов контура C можно взять $s = z$. Ну и наконец, если

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} = 0,$$

то в качестве одного из «концов» контура C можно взять $s = \infty$ (в этом случае C будет представлять собой луч).

При построении частных решений уравнения гипергеометрического типа мы будем пользоваться только однозначными аналитическими функциями. Для обеспечения однозначности функций (выбора определенной ветви многозначной функции) по некоторым линиям комплексной плоскости проводятся разрезы. В частности, при построении гипергеометрических функций возникнет необходимость выделять определенную ветвь функций вида $(z-a)^\alpha$. При этом будем брать возводимую в степень величину с наименьшим по модулю значением аргумента, совместимым с разрезом $|\arg(z-a)| < \pi$ (см. рис. 1).

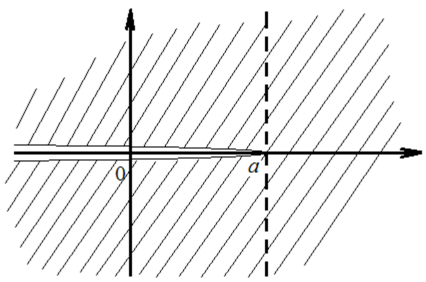

Рис. 1: Комплексная плоскость с разрезом вдоль луча $x \leqslant a$.

Если нужно выбрать ветвь функции $(1-z)^\alpha(1+z)^\beta$, имеющей две точки ветвления $z = \pm 1$, то будем проводить разрез комплексной плоскости, рассматривая каждый из сомножителей последовательно.

Шаг 1: функция $f(z) = (1-z)^\alpha$ будет однозначна в области $|\arg(1-z)| < \pi$ (рис. 2), причем в этой области $f(0) = 1$.

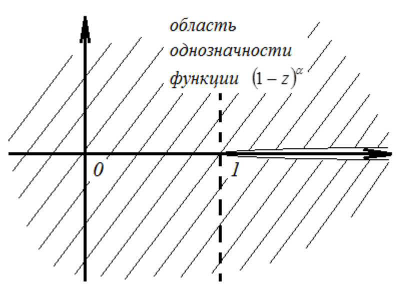

Рис. 2: Комплексная плоскость с разрезом вдоль луча $x \geqslant 1$.

Шаг 2: однозначность функции $g(z) = (1+z)^\beta$ будет обеспечена, если выполнено условие $0 < \arg(1+z) < 2\pi$. Это означает, что нужно продлить уже существующий разрез комплексной плоскости до точки $x = -1$ (рис. 3).

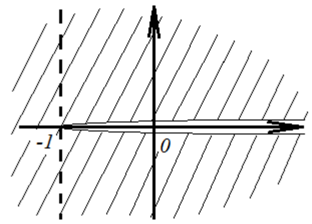

Рис. 3: Комплексная плоскость с разрезом вдоль луча $x \geqslant -1$.

Итак, для выбора ветви функции $q(z) = (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$ достаточно сделать разрез комплексной плоскости вдоль действительной оси при $x \geqslant -1$.

При выборе контура C на коэффициенты уравнения и область изменения переменной z приходится накладывать определенные ограничения, для того чтобы выполнялись условия теоремы 3.1. Получаемое в результате частное решение

$$y_{\nu}(z) = \frac{C_{\nu}}{\rho(z)} \int\limits_{C} \frac{\sigma^{\nu}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds \tag{4.1}$$

уравнения

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0 \tag{4.2}$$

может быть распространено на более широкую область изменения параметров с помощью аналитического продолжения функции (4.1). Напомним, что аналитическим продолжением функции $f(z)$, заданной на множестве E, принадлежащем более широкому множеству D, называется функция $F(z)$, аналитическая в области D и совпадающая с функцией $f(z)$ на множестве E.

Теорема 4.1 *(Принцип аналитического продолжения) Если множество E имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую внутри D, то аналитическая на E функция $f(z)$ имеет не более одного аналитического продолжения в область D.*

Условия теоремы 4.1 выполнены, в частности, если множество E — это отрезок внутри области D.

В дальнейшем будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 4.2 *Пусть C — кусочно-гладкая кривая в плоскости комплексной переменной s, а D — область в плоскости комплексной переменной z. Если функция $f(z,s)$ непрерывна по совокупности аргументов при $s \in C$, $z \in D$ и при любом $s \in C$ аналитична по переменной z в области D, то функция*

$$F(z) = \int\limits_{C} f(z,s) ds \tag{4.3}$$

является аналитической в области D, если интеграл в выражении (4.3) сходится равномерно. При этом

$$F'(z) = \int\limits_C \frac{\partial f(z,s)}{\partial z} ds.$$

Для исследования интегралов вида (4.3) удобно пользоваться следующим признаком равномерной сходимости: *если при всех $s \in C$ и $z \in D$ непрерывная функция $f(z,s)$ удовлетворяет неравенству $|f(z,s)| \leqslant \varphi(s)$, где функция $\varphi(s)$ такова, что интеграл $\int\limits_C \varphi(s)ds$ сходится, то интеграл $\int\limits_C f(z,s)ds$ сходится равномерно по z в области D.*

Пусть в некоторой области E комплексной плоскости переменной z при некоторых ограничениях на параметры уравнения решение вида (4.1) уравнения гипергеометрического типа построено. Тогда его аналитическое продолжение на более широкую область D также будет удовлетворять уравнению (4.2). В самом деле, так как выражение в левой части уравнения (4.2) является аналитической функцией, которая на множестве E тождественно равна 0, в соответствии с принципом аналитического продолжения, она будет тождественно равна 0 и в области D.

На основании сказанного выше сформулируем основную идею построения частных решений уравнения гипергеометрического типа:

1) с помощью обобщенной формулы Родрига при некоторых ограничениях на параметры уравнения и область изменения переменной z строится частное решение уравнения для достаточно простого контура C;

2) исследуется равномерная сходимость полученного интеграла при ослаблении требований на параметры и переменную z и строится решение уравнения в виде аналитического продолжения интегрального выражения.

5 Некоторые вспомогательные сведения теории специальных функций

Напомним, что γ-функцией называется функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{5.1}$$

Функция $\Gamma(z)$ является аналитической функцией в области ее определения, так как для любых $\delta > 0$ и $A > 0$ при $0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A$ интеграл (5.1) сходится равномерно по z.

Наряду с функцией $\Gamma(z)$ будем также рассматривать функцию

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt. \tag{5.2}$$

Функция $B(u,v)$ является аналитической при $\operatorname{Re} u > 0$ и $\operatorname{Re} v > 0$. Для нее справедливо следующее равенство:

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{5.3}$$

Для доказательства равенства (5.3) рассмотрим интеграл

$$I(u,v) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2u-1}\eta^{2v-1}d\xi d\eta.$$

С одной стороны, имеет место равенство $I(u,v) = I(u)I(v)$, где

$$I(u) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\xi^{2u-1}d\xi = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2}(\xi^2)^{u-1}\frac{1}{2}d\xi^2 = \frac{\Gamma(u)}{2},$$

то есть $I(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{4}$. С другой стороны, если сделать замену $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$, то

$$I(u,v) = \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2u-2v-1}dr}_{\dfrac{\Gamma(u+v)}{2}}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi.$$

Сделаем замену переменных $t = \cos^2\varphi$. При этом $dt = -2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$, и

$$I(u,v) = \frac{\Gamma(u+v)}{4}\int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt = \frac{1}{4}\Gamma(u+v)B(u,v) \quad\Rightarrow\quad B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Для γ-функции справедливы следующие равенства:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} \quad\Leftrightarrow\quad B(z,1) = \frac{1}{z}; \tag{5.4}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad\Leftrightarrow\quad B(z,1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \text{где} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1; \tag{5.5}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) \quad\Leftrightarrow\quad 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} \quad\Leftrightarrow \tag{5.6}$$

$$2^{2z-1}B(z,z) = B\left(z, \frac{1}{2}\right) \tag{5.7}$$

Равенство (5.4) доказывается непосредственной проверкой:

$$B(z,1) = \int_0^1 t^{z-1}dt = \frac{1}{z}.$$

Докажем равенство (5.5). Для этого рассмотрим подробнее выражение $B(z, 1-z)$:

$$B(z,1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}.$$

Сделаем замену переменных

$$s = \frac{t}{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{1+s} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{(1+s)^2}.$$

При этом

$$1 - t = 1 - \frac{s}{1+s} = \frac{1}{1+s} \quad \Rightarrow \quad B(z,1-z) = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}ds.$$

Рассмотрим интеграл от функции $\dfrac{s^{z-1}}{1+s}$ по замкнутому контуру C, представленному на рис. 4. Так как внутри контура C находится только одна особая точка $s = -1 = e^{i\pi}$, то

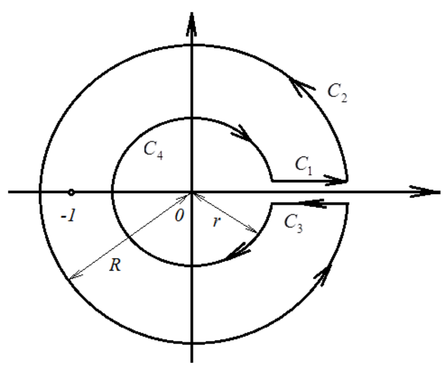

Рис. 4: Контур интегрирования C.

$$\int_C \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = 2\pi i (e^{i\pi})^{z-1} = -2\pi i e^{i\pi z}.$$

Интеграл по контуру C равен сумме четырех интегралов по фрагментам C_1, C_2, C_3, C_4. Рассмотрим отдельно каждый из них:

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = \int_r^R \frac{s^{z-1}}{1+s}ds \to \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}ds = B(z,1-z) \text{ при } r \to 0, \; R \to \infty;$$

$$I_2 = \int\limits_{C_2} \frac{s^{z-1}}{1+s} ds = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^{z-1} e^{i\varphi(z-1)}}{1+Re^{i\varphi}} iRe^{i\varphi} d\varphi = iR^{z-1} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi z} d\varphi}{e^{i\varphi} + R^{-1}} \to 0 \text{ при } R \to \infty,$$

так как $\operatorname{Re} z < 1$;

$$I_3 = \int\limits_{C_3} \frac{s^{z-1}}{1+s} ds = -\int\limits_r^R \frac{\left(e^{2\pi i} s\right)^{z-1}}{1+e^{2\pi i} s} ds = -e^{2\pi i z} I_1 \to -e^{2\pi i z} B(z, 1-z) \text{ при } r \to 0,\ R \to \infty;$$

$$I_4 = \int\limits_{C_4} \frac{s^{z-1}}{1+s} ds = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^{z-1} e^{i\varphi(z-1)}}{1+re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = -ir^z \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi z} d\varphi}{1+re^{i\varphi}} \to 0 \text{ при } r \to 0,$$

так как $\operatorname{Re} z > 0$. Складывая интегралы $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ и переходя к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем равенство

$$B(z, 1-z)\left(1 - e^{2\pi i z}\right) = -2\pi i e^{i\pi z},$$

из которого находим

$$B(z, 1-z) = \frac{2i\pi}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для доказательства равенства (5.7) рассмотрим выражение

$$B(z, z) = \int\limits_0^1 \left[t(1-t)\right]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Парабола $y = t(1-t)$ симметрична относительно точки $t = \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$B(z, z) = 2 \int\limits_0^{1/2} \left[t(1-t)\right]^{z-1} dt.$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$s = 4t(1-t) \ \Leftrightarrow \ t^2 - t + \frac{s}{4} = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-s}\right) \ \Rightarrow \ dt = \frac{ds}{4\sqrt{1-s}}.$$

В результате этой замены приходим к равенству:

$$B(z, z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int\limits_0^1 s^{z-1} (1-s)^{\frac{1}{2}-1} ds = \frac{B\left(z, \frac{1}{2}\right)}{2^{2z-1}},$$

из которого следует (5.7).

Рассмотрим некоторые следствия равенств (5.4) - (5.7). Из равенства (5.4) следует, что $\Gamma(n+1) = n!$, где n — целое неотрицательное число. Из равенства (5.5) при $z = \dfrac{1}{2}$ получаем:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \ \Rightarrow \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Это позволяет переписать равенство (5.6) в виде:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

В случае $z=n+\dfrac{1}{2}$, где n — целое неотрицательное число, получаем:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!}.$$

Пользуясь равенством (5.4), получаем

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)\Gamma(z+n)=...=(z+n)(z+n-1)...(z+1)z\Gamma(z) \quad\Rightarrow$$

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1)...(z+1)z}, \tag{5.8}$$

где n — целое неотрицательное число.

Выражение (5.8) можно использовать в качестве аналитического продолжения функции $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z>-(n+1)$. Так как n может быть любым целым неотрицательным числом, мы получаем аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ для любых значений z. Продолженная таким образом функция $\Gamma(z)$ будет аналитической всюду, кроме точек $z=-n$, $n=0,1,2,...$, в которых функция $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка.