Лекция 7

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ

В этой лекции мы изучим свойства потенциала простого слоя при $N \geqslant 3$.

§ 0. План лекции

1. Потенциал простого слоя.

2. Теорема о непрерывности потенциала простого слоя.

3. Формулы

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}} = -\frac{N-2}{r^{N-1}}\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi), \qquad \frac{\partial}{\partial n_{x_0}}\frac{1}{r^{N-2}} = \frac{N-2}{r^{N-1}}\cos(\mathbf{r}, n_{x_0}).$$

4. Лемма о сходимости интеграла

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} = (N-2)\int\limits_\Gamma \mu(\xi)\frac{\cos(\mathbf{r}, n_{x_0})}{|x_0-\xi|^{N-1}}\,dS_\xi.$$

5. Теорема о предельных свойствах.

5.1. Шаг 1. Непрерывность функции

$$I(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}\frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\right]dS_\xi;$$

5.2. Шаг 2. Предельные свойства как следствие непрерывности выражения

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}V[\mu](x) + W[\mu](x).$$

6. Обозначения:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}},$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e = \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}}, \quad \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}.$$

§ 1. Нормальная производная потенциала простого слоя

Напомним, что потенциал простого слоя определяется следующей формулой:

$$V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_{\xi}, \quad r := |x-\xi|. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Если $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — это замкнутая поверхность в $\mathbb{R}^N$, а плотность $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, то потенциал простого слоя $V[\mu](x) \in \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство.

Очевидно, что $V[\mu](x)$ непрерывен во всех точках $x \in \mathbb{R}^N\backslash\Gamma$. Если $x \in \Gamma$, то можно воспользоваться теоремой 3 из первой лекции, где нужно положить

$$\lambda = N-2 < N-1,$$

тогда, поскольку $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, получим

$$V[\mu](x) \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Докажем теперь, что потенциал непрерывен в каждой точке $x_0 \in \Gamma$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$|x - x_0| < \min\{\delta, \eta/2\}$$

будут справедливы нужные оценки. Рассмотрим следующую разность:

$$|V[\mu](x) - V[\mu](x_0)| \leqslant |V_1[\mu](x) - V_1[\mu](x_0)| + |V_2[\mu](x)| + |V_2[\mu](x_0)|,$$

где

$$V_1[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma\backslash O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_{\xi},$$

$$V_1[\mu](x_0) = \int\limits_{\Gamma\backslash O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x_0-\xi|^{N-2}}\,dS_{\xi},$$

$$V_2[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_{\xi},$$

$$V_2[\mu](x_0) = \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \mu(\xi)\frac{1}{|x_0-\xi|^{N-2}}\,dS_{\xi}.$$

Поскольку

$$|x-\xi| \leqslant |x-x_0| + |\xi - x_0| \leqslant \frac{3}{2}\eta,$$

то для интеграла $V_2[\mu](x)$ справедлива следующая оценка:

$$|V_2[\mu](x)| \leqslant c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x_0,\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi \leqslant c_1 \int\limits_{\Gamma\cap O(x,3/2\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\,dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{O'(x,3/2\eta)} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \frac{d\xi_1\cdot d\xi_{N-1}}{\cos(\nu_\xi,\xi_N)}, \quad c_1 := \sup_{\xi\in\Gamma}|\mu(\xi)|, \quad \cos(\nu_\xi,\xi_N) \geqslant \frac{1}{2},$$

где $O^{'}(x,3/2\eta)$ — это $(N-1)$–мерный шар на касательной гиперплоскости к точке $x\in\Gamma$. Переходя в последнем интеграле к сферической системе координат с центром в точке x, мы получим следующую оценку:

$$|V_2[\mu](x)| \leqslant c_1 2\omega_{N-1} \int\limits_0^{3/2\eta} \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-2}\,d\rho = c_1\omega_{N-1}3\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

при условии, что

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{9}.$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$|V_2[\mu](x_0)| \leqslant c_1 2\omega_{N-1} \int\limits_0^{\eta} \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-2}\,d\rho = 2c_1\omega_{N-1}\eta < \frac{\varepsilon}{3}$$

при условии, что

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{6}.$$

Фиксируем теперь число η таким образом, чтобы

$$\eta < \frac{1}{c_1\omega_{N-1}}\frac{\varepsilon}{9}$$

и выберем достаточно малое $\delta(\varepsilon) > 0$ таким образом, чтобы

$$|V_1[\mu](x) - V_1[\mu](x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Этого, действительно, можно добиться, поскольку при $\eta > 0$ подынтегральные выражения непрерывны и не имеют особенностей. Для интеграла $V_1[\mu](x_0)$ это очевидно. У интеграла $V_1[\mu](x)$ это тоже так, поскольку справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x-\xi| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \eta/2 = \eta/2 > 0.$$

Теорема доказана.

Пусть $x\in\mathbb{R}^N\backslash\Gamma$, тогда мы можем вычислить производную потенциала простого слоя по направлению внешней нормали n_{x_0} к поверхности $\Gamma\ni x_0$ в предположении, что $x\in\{tn_{x_0},\ t\in\mathbb{R}^1\}$. Причём вычислить эту производную можно дифференцируя потенциал простого слоя $V[\mu](x)$ под знаком интеграла.

□ Действительно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} = \frac{N-2}{r^{N-1}} \cos(\mathbf{r}, n_{x_0}), \quad \mathbf{r} = \xi - x.$$

Напомним, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} = -\frac{N-2}{r^{N-1}} \cos(\mathbf{r}, \nu_\xi), \quad \mathbf{r} = \xi - x.$$

Поэтому

$$\frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}} = (N-2) \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}, n_{x_0})}{r^{N-1}}\, dS_\xi. \quad \boxtimes \tag{1.2}$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 1. *Интеграл* (1.2) *сходится при* $x = x_0 \in \Gamma$ *для всех* $\mu(\xi) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Действительно, пусть $x = x_0 \in \Gamma$. Тогда разобьём замкнутую поверхность $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ на две части

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma \cap O(x_0, d), \quad \Gamma_2 = \Gamma \backslash O(x_0, d),$$

где d — это радиус сферы Ляпунова. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, n_{x_0})}{r_0^{N-1}}\, dS_\xi = \int\limits_{\Gamma_1} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, n_{x_0})}{r_0^{N-1}}\, dS_\xi + \\ + \int\limits_{\Gamma_2} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, n_{x_0})}{r_0^{N-1}}\, dS_\xi := I_1 + I_2, \quad r_0 := |x_0 - \xi|.$$

Нам достаточно рассмотреть интеграл I_1. Выберем локальную систему координат $(\xi^{'}, \xi_N)$, $\xi^{'} = (\xi_1, ..., \xi_{N-1})$ с центром в точке $x_0 \in \Gamma$, координата ξ_N в которой соответствует нормали n_{x_0} в точке $x_0 \in \Gamma_1$, а оставшиеся координаты соответствуют касательной плоскости $\xi_N = 0$. Пусть $G^{'}(x_0)$ — это проекция куска Γ_1 поверхности Γ на касательную плоскость $\xi_N = 0$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$|I_1| = \left| \int\limits_{G^{'}(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(\mathbf{r}_0, n_{x_0})}{r_0^{N-1}} \frac{d\xi_1 \cdots dx_{N-1}}{\cos(\nu_\xi, \xi_N)} \right| \leqslant \\ \leqslant 2M \int\limits_{G^{'}(x_0)} \frac{1}{r_0^{N-1}} |\cos(n_{x_0}, \mathbf{r}_0)| d\xi_1 \cdots dx_{N-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2Ma \int\limits_{G'(x_0)} \frac{1}{r_0^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots dx_{N-1}, \quad r_0 := |x_0 - \xi|,$$

где

$$M := \sup_{\xi \in \Gamma} |\mu(\xi)|$$

и мы воспользовались доказанными в лекции 5 оценками

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \xi \in \Gamma_1, \quad |\cos(n_{x_0}, \mathbf{r}_0)| \leqslant a r_0^\alpha.$$

Введём следующую величину:

$$h_0 := \sup_{z_1, z_2 \in G'(x_0)} |z_1 - z_2|, \quad G'(x_0) \subset \overline{O(x_0, h_0)} \subset \mathbb{R}^{N-1}_{x_0}.$$

Продолжим оценку $|I_1|$.

$$|I_1| \leqslant M_1 \int\limits_{O(x_0,h_0)} \frac{1}{r_0^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots dx_{N-1} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_{O(x_0,h_0)} \frac{1}{\rho_0^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots dx_{N-1} = M_1 \omega_{N-1} \int\limits_0^{h_0} \frac{1}{\rho_0^{N-1-\alpha}} \rho_0^{N-2} \, d\rho_0 =$$

$$= M_1 \omega_{N-1} \int\limits_0^{h_0} \frac{1}{\rho_0^{1-\alpha}} \, d\rho_0 < +\infty, \quad \rho_0 := |x_0 - \xi'|.$$

Лемма доказана.

§ 2. Предельные свойства нормальной производной потенциала простого слоя

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область, граница которой $\partial\Omega = \Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$. Введём следующие обозначения:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}},$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e = \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega \ni x \to x_0} \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}},$$

а прямое значение нормальной производной в точке $x_0 \in \Gamma$ будем обозначать как

$$\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}.$$

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — *это замкнутая поверхность и* $\mu(\xi) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *тогда справедливы следующие предельные формулы*:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i = \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}, \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e = -\frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}, \tag{2.2}$$

где $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство. Доказательство проведём за несколько шагов.

Шаг 1. Введём потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$

$$W[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi \tag{2.3}$$

и составим сумму

$$I(x) := \frac{\partial V[\mu](x)}{\partial n_{x_0}} + W[\mu](x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\right] dS_\xi. \tag{2.4}$$

Нам нужно доказать, что сумма (2.4) непрерывно меняется при переходе точки x по нормали n_{x_0} через точку $x_0 \in \Gamma$. Очевидно, что, как и ранее, нам нужно разбить выражение (2.4) на две части

$$I_1(x) := \int\limits_{\Gamma_1} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\right] dS_\xi, \tag{2.5}$$

$$I_2(x) := \int\limits_{\Gamma_2} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\right] dS_\xi, \tag{2.6}$$

где

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma \cap O(x_0, \eta), \quad \Gamma_2 = \Gamma \backslash O(x_0, \eta), \quad \eta \in (0, d).$$

Шаг 2. Оценка для I_1. Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} = \frac{N-2}{r^{N-1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(n_{x_0}, \xi_k), \quad k = \overline{1, N} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} = -\frac{N-2}{r^{N-1}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(\nu_\xi, \xi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{2.8}$$

Стандартным образом введём локальную систему координат $(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \xi_N)$ в точке $x_0 \in \Gamma$. Поскольку точка x находится всегда на прямой с направляющим вектором n_{x_0}, то в этой системе координат $x = (0, \ldots, 0, x_N)$, т. е. $x_k = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Кроме того,

$$\cos(n_{x_0}, \xi_k) = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}, \quad \cos(n_{x_0}, \xi_N) = 1. \tag{2.9}$$

Из формул (2.7)–(2.9) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} = \\ &\qquad = \frac{N-2}{r^{N-1}} \frac{\xi_N - x_N}{r} \left[\cos(n_{x_0}, \xi_N) - \cos(\nu_\xi, \xi_N)\right] + \\ &\qquad + \frac{N-2}{r^{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(n_{x_0}, \xi_k) - \frac{\xi_k - x_k}{r} \cos(\nu_\xi, \xi_k)\right] = \\ &= \frac{N-2}{r^{N-1}} \frac{\xi_N - x_N}{r} \left[1 - \cos(\nu_\xi, \xi_N)\right] - \frac{N-2}{r^{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\xi_k}{r} \cos(\nu_\xi, \xi_k). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Во–первых, имеет место следующее неравенство, доказанное в первой лекции:

$$|\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leqslant a r_0^\alpha, \quad r_0 := |x_0 - \xi|, \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{2.11}$$

Во–вторых, имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\nu_\xi, \xi_N) = 1 - \frac{1}{\left[1 + |f_\tau|^2\right]^{1/2}} = \\ = \frac{1}{\left[1 + |f_\tau|^2\right]^{1/2}} \frac{1}{1 + \left[1 + |f_\tau|^2\right]^{1/2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

из которой вытекает оценка

$$1 - \cos(\nu_\xi, \xi_N) \leqslant \frac{1}{2} a^2 r_0^{2\alpha} \leqslant a_1 r_0^\alpha, \quad a_1 = \frac{a^2}{2} d^\alpha. \tag{2.13}$$

Из равенства (2.10) с учётом оценок (2.11) и (2.13) приходим к следующему неравенству:

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| \leqslant a_2 \frac{r_0^\alpha}{r^{N-1}}, \tag{2.14}$$

где

$$r_0 := |x_0 - \xi| = |\xi|, \quad r := |x - \xi|.$$

Поскольку $\xi \in \Gamma_1 = \Gamma(x_0)$, то имеет место неравенство

$$r_0 \leqslant 2\rho, \quad \rho = |x_0 - \xi'| = |\xi'|, \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}). \tag{2.15}$$

Кроме того,

$$r = |x - \xi| = \left(\sum_{k=1}^{N} (x_k - \xi_k)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2 + (x_N - \xi_N)^2 \right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2 \right)^{1/2} = \rho. \quad (2.16)$$

Поэтому из (2.14) с учётом неравенств (2.15) и (2.16) приходим к оценке

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| \leqslant \frac{a_3}{\rho^{N-1-\alpha}}. \quad (2.17)$$

Теперь мы можем получить оценку для интеграла I_1, определенного формулой (2.5). С этой целью обозначим через $G^{'}(x_0)$ проекцию куска Γ_1 поверхности Ляпунова Γ на касательную плоскость $\xi_N = 0$ к точке $x_0 \in \Gamma_1$. В результате с учётом (2.17) получим следующую оценку:

$$|I_1(x)| \leqslant \int\limits_{\Gamma_1} |\mu(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant M a_3 \int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \, dS_\xi = M_1 \int\limits_{G^{'}(x_0)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1}}{\cos(\nu_\xi, \xi_N)}. \quad (2.18)$$

Заметим, что

$$G^{'}(x_0) \subset O^{'}(x_0, \eta), \quad O^{'}(x_0, \eta) := \left\{ \xi^{'} \in \mathbb{R}^{N-1}_{x_0} : |\xi^{'} - x_0| < \eta \right\},$$

где $\mathbb{R}^{N-1}_{x_0}$ — это касательная плоскость в точке $x_0 \in \Gamma$. Продолжим оценивание I_1.

$$|I_1(x)| \leqslant 2M_1 \int\limits_{O^{'}(x_0,\eta)} \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1} =$$

$$= 2M_1 \omega_{N-1} \int\limits_0^\eta \frac{1}{\rho^{N-1-\alpha}} \rho^{N-2} \, d\rho = \frac{M_2}{\alpha} \eta^\alpha. \quad (2.19)$$

Точно также (даже проще) доказывается справедливость следующей оценки:

$$|I_1(x_0)| \leqslant \frac{M_2}{\alpha} \eta^\alpha. \quad (2.20)$$

Шаг 3. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда выберем $\eta > 0$ следующим образом:

$$0 < \eta < \min \left\{ d, \left(\frac{\alpha \varepsilon}{3M_2} \right)^{1/\alpha} \right\}. \quad (2.21)$$

Тогда из оценок (2.19) и (2.20) получим следующие оценки:

$$|I_1(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.22}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|I(x) - I(x_0)| \leqslant |I_1(x) - I_1(x_0)| + |I_2(x) - I_2(x_0)| \leqslant \\ \leqslant |I_1(x)| + |I_1(x_0)| + |I_2(x) - I_2(x_0)| \,. \tag{2.23}$$

Поскольку $\eta > 0$ фиксировано, то можно стандартным образом как и ранее доказать, что интеграл $I_2(x)$ непрерывен в точке x_0. Следовательно, найдётся такое $\delta = \delta(\eta, \varepsilon) > 0$, что

$$|I_2(x) - I_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \{\eta/2, \delta\} \,. \tag{2.24}$$

Итак, из (2.22)–(2.24) вытекает непрерывность в точке $x_0 \in \Gamma$ выражения $I(x)$, определённого формулой (2.4).

Шаг 4. Из непрерывности суммы (2.4) в точке $x = x_0 \in \Gamma$ вытекает равенство предельных значений извне области Ω, изнутри области Ω с прямым значением суммы в точке $x_0 \in \Gamma$:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i + W_i[\mu](x_0) = \\ = \left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e + W_e[\mu](x_0) = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} + W[\mu](x_0). \tag{2.25}$$

Из равенств (2.25) вытекают следующие формулы:

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} + W[\mu](x_0) - W_i[\mu](x_0) = \\ = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0), \tag{2.26}$$

$$\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} + W[\mu](x_0) - W_e[\mu](x_0) = \\ = \frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}} - \frac{(N-2)\omega_N}{2}\mu(x_0), \tag{2.27}$$

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы имеет место следующее равенство*

$$\frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[\left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_i - \left(\frac{\partial V[\mu](x_0)}{\partial n_{x_0}}\right)_e\right] = \mu(x_0). \tag{2.28}$$