Лекция 1

ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ.

§ 1. Определение пространства $\mathbb{BV}[a, b]$ и его свойства

Пусть вещественная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b] \subset \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ произвольное разбиение

$$\mathrm{T} \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

и сопоставим данному разбиению величину

$$\mathrm{V_T}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \,. \tag{1.1}$$

Кроме того, рассмотрим supremum по всем таким разбиениям T отрезка $[a, b]$. И определим следующую величину

$$\mathrm{V}_a^b(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathrm{T}} \mathrm{V_T}(f). \tag{1.2}$$

Докажем теперь линейность пространства функций ограниченной вариации.

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \mathrm{V_T}(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \,,$$

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \\ &= |\alpha_1 f_1(x_k) + \alpha_2 f_2(x_k) - \alpha_1 f_1(x_{k-1}) - \alpha_2 f_2(x_{k-1})| \leqslant \\ &\leqslant \alpha_1 |f_1(x_k) - f_1(x_{k-1})| + \alpha_2 |f_2(x_k) - f_2(x_{k-1})| \,. \end{aligned}$$

Откуда сразу же получаем неравенство

$$\mathrm{V_T}(f) \leqslant \alpha_1 \mathrm{V_T}(f_1) + \alpha_2 \mathrm{V_T}(f_2).$$

Определение 1. *Назовем пространством функций ограниченной вариации на отрезке* $[a, b]$ *линейное пространство тех вещественных функций, определенных на отрезке* $[a, b]$, *для которых конечна величина* $\mathrm{V}_a^b(f)$ *из* (1.2). *Обозначим это линейное пространство через* $\mathbb{BV}[a, b]$.

П Р И М Е Р 1. Монотонные функции.

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Аналогичный результат имеет место и для монотонно невозрастающих функций, и вместе получим равенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

Естественно, и supremum по всем разбиениям T отрезка $[a, b]$ равен этой же величине:

$$\mathrm{V}_a^b(f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

Теперь мы докажем теорему об аддитивности величины $\mathrm{V}_a^b(f)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{BV}[a, b]$ *и* $c \in (a, b)$ *— произвольная точка, тогда*

$$f(x) \in \mathbb{BV}[a, c] \cap \mathbb{BV}[c, b],$$

причем имеет место равенство

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Итак, пусть $c \in (a, b)$. Пусть

$$\mathrm{T} := \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2,$$

где T_1 — это произвольное разбиение отрезка $[a, c]$, а T_2 — это произвольное разбиение отрезка $[c, b]$. Ясно, что T — это разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f). \tag{1.3}$$

Поскольку объединение разбиений T_1 и T_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ дает разбиение отрезка $[a, b]$, то из (1.3) вытекает неравенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f),$$

откуда, взяв supremum от обеих частей этого неравенства по T_1 и T_2, получим

$$\mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f).$$

Шаг 2. Пусть теперь T — это произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. К сожаленью, его сужения на $[a, c]$ и $[c, b]$ могут не быть разбиениями этих отрезков, поскольку точка $c \in (a, b)$ не обязана входить в произвольное разбиение T. Поэтому добавим к нашему разбиению T точку c. Получившееся разбиение обозначим через T'. Теперь сужения T' на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ образуют разбиения T_1 и T_2 соответственно. Поэтому из (1.3) вытекает неравенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_{\mathrm{T}'}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f)$$

и, взяв supremum от обеих частей этого неравенства по T, получим неравенство

$$\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Произвольную функцию $f(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$ всегда можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функций*

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Доказательство.

Возьмем в качестве функции $f_1(x)$ функцию $f_1(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$, тогда из теоремы 1 получим, что функция $f_1(x)$ монотонно неубывающая. Определим теперь функцию $f_2(x)$ следующим равенством

$$f_2(x) := \mathrm{V}_a^x(f) - f(x).$$

Проверим монотонность функции $f_2(x)$. Действительно, из теоремы 1 имеем

$$f_2(x) - f_2(y) = \mathrm{V}_y^x(f) - [f(x) - f(y)] \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant y.$$

Действительно, по определению $\mathrm{V}_y^x(f)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{V}_y^x(f).$$

Следствие доказано.

Вопрос. Возникает вопрос: можно сделать линейное пространство $\mathbb{BV}[a,b]$ нормированным? А если можно, то будет ли оно полно относительно этой нормы? Для ответа на эти вопросы необходимо построить интегралы Римана–Стилтьеса и Лебега–Стилтьеса. Начнем с построения интеграла Римана–Стилтьеса.

§ 2. Интеграл Римана–Стилтьеса.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mathrm{T} \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, а также две ограниченные на отрезке $[a,b]$ функции $f(x), g(x) : [a,b] \to \mathbb{R}^1$. Составим следующую интегральную сумму

$$\sigma = \sigma(g; f; \mathrm{T}) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})]\,. \tag{2.1}$$

Введем параметр разбиения

$$\lambda(\mathrm{T}) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i-1}|\,.$$

Предположим, что существует предел интегральных сумм (2.1) при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$, тогда полученный предел будем называть интегралом Римана–Стилтьеса и будем его обозначать следующим образом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x). \tag{2.2}$$

Из построения интеграла Римана–Стилтьеса ясно, что в случае, когда функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и функция $g(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[a,b]$, то соответствующий интеграл Римана–Стилтьеса существует и совпадает с интегралом Римана:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)g^{'}(x)\,dx.$$

Однако, условие $g(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[a,b]$ очень обременительно, и возникает вопрос о более слабом достаточном условии существования интеграла Римана–Стилтьеса. На этот вопрос отвечает следующая важная теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, а функция $g(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$. Тогда существует интеграл Римана–Стилтьеса*

$$\mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x),$$

причем

$$|\mathrm{I}| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\mathrm{V}_a^b(g). \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. В силу следствия из теоремы 1 в качестве $g(x)$ можно взять монотонно неубывающую функцию. Действительно, пусть $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ и нам достаточно доказать существование следующих интегралов Римана–Стилтьеса:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

и тогда мы докажем существование интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Шаг 2. Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a,b]$ и на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1},x_k]$ рассмотрим минимум и максимум функции $f(x)$:

$$m_k := \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad M_k := \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Так что помимо интегральной суммы (2.1) составим нижнюю s и верхнюю S суммы

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]. \quad (2.4)$$

Отметим, что выполнены следующие неравенства для произвольного фиксированного разбиения T отрезка $[a,b]$:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Докажем, что при добавлении одной новой точки к разбиению T отрезка $[a,b]$ нижняя сумма не убывает, а верхняя сумма не возрастает.

□ Действительно, пусть $y_k \in [x_{k-1},x_k]$ — это новая точка разбиения T. Тогда

$$m_{1k} := \min_{x\in[x_{k-1},y_k]} f(x) \geqslant m_k, \quad m_{2k} := \min_{x\in[y_k,x_k]} f(x) \geqslant m_k. \quad (2.5)$$

При этом в нижней сумме до добавления новой точки было слагаемое

$$m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

а после добавления новой точки получились два слагаемых

$$m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Причем в силу (2.5) имеет место неравенство снизу

$$m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right] \geqslant m_k \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + \\ + m_k \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right] = m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Аналогичным образом доказывается, что верхняя сумма S не возрастает при добавлении новой точки разбиения. ⊠

Шаг 3. Теперь докажем, что для двух произвольных разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$ соответствующая разбиению T_1 нижняя сумма $s_1 :=$ $= s_1(T_1)$ меньше соответствующей разбиению T_2 верхней суммы $S_2 :=$ $= S_2(T_2)$

$$s_1 \leqslant S_2.$$

□ Действительно, с этой целью возьмем объединение этих двух разбиений $\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ и сопоставим ему нижнюю сумму s_3 и верхнюю сумму S_3. В силу предыдущего имеет место неравенства

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2.$$

Значит, всегда $s_1 \leqslant S_2$. ⊠

Шаг 4. Пусть теперь
$$\mathrm{I} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\mathrm{T}} s(\mathrm{T}).$$

З а м е ч а н и е 1 . Альтернативно можно определить величину I как
$$\mathrm{I} \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\mathrm{T}} S(\mathrm{T}).$$

По доказанному имеет место неравенство
$$s \leqslant \mathrm{I} \leqslant S \quad \text{и} \quad s \leqslant \sigma \leqslant S \Rightarrow I - \sigma \leqslant S - s, \quad \sigma - I \leqslant S - s.$$

Стало быть,
$$|\sigma - \mathrm{I}| \leqslant S - s. \tag{2.6}$$

Шаг 5. Рассмотрим разность
$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Заметим, что поскольку функция $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$, то она по теореме Кантора является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\lambda(\mathrm{T}) < \delta$ получим
$$M_k - m_k < \varepsilon$$

для всех $k = 1, 2, ..., n$. Тогда из (2.6) получим неравенство
$$|\sigma - \mathrm{I}| \leqslant S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

А это означает, что
$$\lim_{\lambda(\mathrm{T}) \to 0} \sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{I} \Rightarrow I = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Шаг 6. Теперь заметим, что для произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство
$$|\sigma(g; f; \mathrm{T})| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \mathrm{V}_a^b(g).$$

Имеет место следующая цепочка неравенств:
$$|\mathrm{I}| \leqslant |\mathrm{I} - \sigma(g; f; \mathrm{T})| + |\sigma(g; f; \mathrm{T})| \leqslant |\mathrm{I} - \sigma(g; f; \mathrm{T})| + \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \mathrm{V}_a^b(g).$$

Переходя к пределу при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ получим искомую оценку.

Т е о р е м а д о к а з а н а .

§ 3. Интегрирование по частям в интеграле Римана–Стилтьеса

Теорема 3. *При условии существования одного из интегралов в следующей формуле вытекает существование другого*:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = -\int_a^b g(x)\,df(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathrm{T} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ — это произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ при $k = \overline{1,n}$. Рассмотрим следующую интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f(\xi_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) f(\xi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f(\xi_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) f(\xi_{k+1}) = g(b) f(\xi_n) - g(a) f(\xi_1) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] = g(b)f(b) - g(a)f(a) +$$

$$+ g(b)\,[f(\xi_n) - f(b)] - g(a)\,[f(\xi_1) - f(a)] - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)]\,.$$

Шаг 2. Теперь перейдем к пределу при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ в обеих частях полученного на шаге 1 равенстве и получим, что из существования одной из интегральных сумм вытекает существование предела другой интегральной суммы: либо

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]\,,$$

либо

$$\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)]\,.$$

В итоге получим в пределе равенство (3.1).

Теорема доказана.

Приведем некоторые свойства интеграла Римана–Стилтьеса.

(i) $\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\,dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$;

(ii) $\int_a^b f(x)\,d\,(\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)) = \alpha_1 \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \alpha_2 \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$;

(iii) $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\,dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\,dg(x)$, $c \in (a, b)$,

причем равенства (i)–(ii) имеют место при условии существования всех интегралов в правой части, а в случае (iii) при условии существования интеграла в левой части.

ПРИМЕР 2. Приведем пример функций $f(x)$ и $g(x)$, когда интегралы в правой части (iii) существуют, а интеграл в левой части не существует. Пусть функции f и g заданы на сегменте $[-1, 1]$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда существуют оба интеграла

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dg(x) = 0,$$

однако, интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$$

не существует. Для того чтобы это доказать возьмем произвольное разбиение T отрезка, но таким образом, чтобы точка 0 не попала в число точек разбиения. Рассмотрим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma(g; f; \mathrm{T}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

и пусть $x_{i-1} < 0 < x_i$, тогда эта сумма равна $\sigma = f(\xi_i)$, а стало быть, равно либо 0 либо 1 в зависимости от того, где лежит точка

$$\xi_i: \ \xi_i > 0 \quad \text{или} \quad \xi_i < 0.$$

Поэтому предела при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ не существует.

§ 4. Линейные функционалы над $\mathbb{C}[a, b]$

Рассмотрим некоторый линейный (по-построению) функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a, b]$, определенный следующим интегралом Римана–Стилтьеса:

$$\langle \Phi_g, f \rangle = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{при некотором} \quad g \in \mathbb{BV}[a, b] \tag{4.1}$$

и для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Докажем, что функционал $\Phi_g \in (\mathbb{C}[a, b])^*$.

□ Действительно, линейность этого функционала вытекает из свойства (i) интегралов Римана–Стилтьеса.

Докажем непрерывность. Пусть $f_n \rightrightarrows f(x)$ равномерно по $x \in [a,b]$, что равносильно

$$\|f_n - f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда в силу теоремы 2 справедлива цепочка неравенств

$$|\langle \Phi_g, f_n - f\rangle| = \left|\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dg(x)\right| \leqslant \\ \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \mathrm{V}_a^b(g) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым мы приходим к выводу о том, что линейная оболочка этого семейства

$$\left\{\Phi_g \middle| \, g \in \mathbb{BV}[a,b]\right\}$$

образует линейное подпространство в банаховом пространстве всех линейных, непрерывных функционалов на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a,b]$. Возникает вопрос: имеются ли другие функционалы, действие которых нельзя представить формулой (4.1). Оказывается, что все функционалы на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a,b]$ можно представить формулой (4.1).

Теорема 4. *Каждый линейный и непрерывный функционал на банаховом пространстве* $\mathbb{C}[a,b]$ *со стандартной нормой можно представить в виде следующего интеграла Римана–Стилтьеса*:

$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x) \quad \text{\textit{при}} \quad g(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$$

для всех

$$f(x) \in \mathbb{C}[a,b].$$