Предварительные сведения теории разностных схем

1 Формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина для сеточных функций

Получим ряд соотношений, которые в дальнейшем будем использовать при исследовании свойств разностных схем в различных сеточных гильбертовых пространствах.

1.1 Формулы суммирования по частям как разностный аналог формул интегрирования по частям

Прежде всего рассмотрим так называемые формулы суммирования по частям. Формулы суммирования по частям для сеточных функций — это аналог формул интегрирования по частям для непрерывно дифференцируемых функций непрерывно изменяющегося аргумента.

Напомним, что для любых двух вещественных функций $u(x)$ и $v(x)$, таких что $u, v \in C[a,b] \cap C^{(1)}(a,b)$, справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx,$$

или, что то же самое, равенство

$$(u, v')_{L_2(a,b)} = u(b)v(b) - u(a)v(a) - (u', v)_{L_2(a,b)}, \tag{1.1}$$

где $(u, v)_{L_2(a,b)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(a,b)$:

$$(u, v)_{L_2(a,b)} = \int\limits_a^b u(x)v(x)dx. \tag{1.2}$$

Введем на отрезке $[a, b]$ сетку $\overline{\omega}_h$ (в общем случае неравномерную):

$$\overline{\omega}_h = \{x_k,\ x_0 = a,\ x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_K,\ x_K = b\}.$$

Рассмотрим две произвольные вещественные ограниченные сеточные функции u_h и v_h, заданные на сетке $\overline{\omega}_h$. Для них можно ввести сеточные аналоги скалярного произведения (1.2), заменяя интеграл одной из следующих интегральных сумм:

$$(u_h, v_h) = \sum_{k=1}^{K-1} u_h(x_k)v_h(x_k)h_k \quad \text{или} \quad (u_h, v_h) = \sum_{k=1}^{K-1} u_h(x_k)v_h(x_k)h_{k+1},$$

$$(u_h, v_h] = \sum_{k=1}^{K} u_h(x_k)v_h(x_k)h_k,$$

$$[u_h, v_h) = \sum_{k=0}^{K-1} u_h(x_k)v_h(x_k)h_{k+1},$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}$, $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$. Далее для краткости будем использовать обозначения $u_k = u_h(x_k)$ и т.д.

Для того чтобы получить формулы суммирования по частям, сначала рассмотрим формулы разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций. Будем использовать обозначение $u_{\bar{x},k}$ для левой односторонней производной функции u_h в узле с номером k:

$$u_{\bar{x},k} = \frac{u_k - u_{k-1}}{h_k},$$

и обозначение $u_{x,k}$ для правой односторонней производной в узле с номером k:

$$u_{x,k} = \frac{u_{k+1} - u_k}{h_{k+1}}.$$

Для любых двух сеточных функций u_h и v_h, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$, имеют место следующие равенства:

$$(uv)_{\bar{x},k} = \frac{1}{h_k}(u_k v_k - u_{k-1}v_{k-1}) = \frac{1}{h_k}(u_k v_k - u_{k-1}v_{k-1} + u_{k-1}v_k - u_{k-1}v_k) =$$
$$= u_{\bar{x},k}v_k + u_{k-1}v_{\bar{x},k} = u_{\bar{x},k}v_{k-1} + u_k v_{\bar{x},k} = u_{\bar{x},k}v_k + u_k v_{\bar{x},k} - h_k u_{\bar{x},k}v_{\bar{x},k}, \tag{1.3}$$

$$(uv)_{x,k} = u_{x,k}v_k + u_{k+1}v_{x,k} = u_{x,k}v_{k+1} + u_k v_{x,k} = u_{x,k}v_k + u_k v_{x,k} + h_{k+1}u_{x,k}v_{x,k}. \tag{1.4}$$

Получим первую формулу суммирования по частям, пользуясь равенством (1.4), которое перепишем в виде:

$$u_k v_{x,k} = (uv)_{x,k} - u_{x,k}v_{k+1} = (uv)_{x,k} - u_{\bar{x},k+1}v_{k+1},$$

учитывая, что $u_{x,k} = u_{\bar{x},k+1}$. Умножим полученное равенство на h_{k+1} и просуммируем по k в пределах от 1 до $K-1$. В результате получим:

$$(u, v_x) = \sum_{k=1}^{K-1} u_k v_{x,k} h_{k+1} = \sum_{k=1}^{K-1} (uv)_{x,k} h_{k+1} - \sum_{k=1}^{K-1} u_{\bar{x},k+1} v_{k+1} h_{k+1},$$

где

$$\sum_{k=1}^{K-1} (uv)_{x,k} h_{k+1} = (u_2 v_2 - u_1 v_1) + (u_3 v_3 - u_2 v_2) + ...+$$

$$+(u_{K-1} v_{K-1} - u_{K-2} v_{K-2}) + (u_K v_K - u_{K-1} v_{K-1}) = u_K v_K - u_1 v_1,$$

$$\sum_{k=1}^{K-1} u_{\bar{x},k+1} v_{k+1} h_{k+1} = \{k' = k+1\} = \sum_{k'=2}^{K} u_{\bar{x},k'} v_{k'} h_{k'} = \sum_{k'=1}^{K} u_{\bar{x},k'} v_{k'} h_{k'} - u_{\bar{x},1} v_1 h_1 =$$

$$= (u_{\bar{x}}, v] - u_1 v_1 + u_0 v_1.$$

Итак, первая формула суммирования по частям, являющаяся разностным аналогом формулы (1.1), имеет вид:

$$(u, v_x) = u_K v_K - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v]. \tag{1.5}$$

Аналогично можно получить вторую формулу суммирования по частям, пользуясь равенством (1.3):

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_K v_{K-1} - u_0 v_0 - [u_x, v), \tag{1.6}$$

где

$$(u, v_{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{K-1} u_k v_{\bar{x},k} h_k.$$

1.2 Разностные формулы Грина

Пусть a — произвольная вещественная ограниченная сеточная функция, заданная на $\overline{\omega}_h$. Воспользуемся равенством (1.5), в котором заменим функцию v на произведение $av_{\bar{x}}$:

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) = a_K u_K v_{\bar{x},K} - a_1 u_0 v_{\bar{x},1} - (au_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}]\,. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) называется первой разностной формулой Грина.

Вторую разностную формулу Грина получим из первой, меняя в ней u и v ролями и вычитая из (1.7) получающееся при этом равенство:

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) - ((au_{\bar{x}})_x, v) = a_K \left(u_K v_{\bar{x},K} - v_K u_{\bar{x},K}\right) - a_1 \left(u_0 v_{\bar{x},1} - v_0 u_{\bar{x},1}\right). \tag{1.8}$$

2 Линейные разностные уравнения порядка m

Рассмотрим разностный аналог линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка m:

$$r_m(x)u^{(m)}(x) + r_{m-1}(x)u^{(m-1)}(x) + ... + r_1(x)u'(x) + r_0(x)u(x) = f(x).$$

Введем равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_k,\ x_k = kh,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

с шагом h и будем рассматривать заданные на ней сеточные функции y_h как функции целочисленного аргумента k:

$$y_k = y_h(k).$$

Введем обозначения:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \nabla y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\Delta y_{k-1} = \nabla y_k, \quad \Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k,$$

$$\Delta\nabla y_k = \Delta^2 y_{k-1} = y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}, \quad \Delta^m y_k = \Delta\left(\Delta^{m-1} y_k\right).$$

Определение 2.1 *Уравнение*

$$\alpha_k^{(m)}\Delta^m y_k + \alpha_k^{(m-1)}\Delta^{m-1} y_k + ... + \alpha_k^{(1)}\Delta y_k + \alpha_k^{(0)} y_k = \varphi_k, \tag{2.1}$$

где $\alpha_k^{(p)}$, $p = 0, 1, ..., m$ *и* φ_k *— заданные функции целочисленного аргумента* k*, называется линейным разностным уравнением* m*-го порядка относительно неизвестной функции* y_k *целочисленного аргумента* k*.*

2.1 Линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$A\Delta^2 y_{k-1} + B\Delta y_{k-1} + C y_{k-1} = 0, \tag{2.2}$$

где A, B, C — вещественные константы, являющееся разностным аналогом линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) можно переписать в виде:

$$a y_{k-1} - c y_k + b y_{k+1} = 0, \tag{2.4}$$

где $a = A - B + C$, $b = A$, $c = 2A - B$.

Как известно, решение дифференциального уравнения (2.3) ищется в виде $u = e^{\lambda x}$, где параметр λ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0. \tag{2.5}$$

Если уравнение (2.5) имеет два различных корня λ_1 и λ_2, то функции $u_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $u_2 = e^{\lambda_2 x}$ образуют ФСР уравнения (2.3). Если же уравнение (2.5) имеет кратный корень λ_0, то ФСР уравнения (2.3) образуют функции $u_1 = e^{\lambda_0 x}$ и $u_2 = x e^{\lambda_0 x}$.

По аналогии, решение разностного уравнения (2.4) будем искать в виде:

$$y_k = q^k,$$

где $q \neq 0$ — некоторое число. Подставляя y_k в уравнение (2.4), получаем квадратное уравнение для параметра q:

$$b q^2 - c q + a = 0, \tag{2.6}$$

из которого находим

$$q_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{D}}{2b}, \quad D = c^2 - 4ab.$$

Рассмотрим три возможные ситуации: когда дискриминант D уравнения (2.6) положителен, когда он равен нулю и когда отрицателен.

Первый случай: $D > 0$. При этом корни q_1 и q_2 уравнения (2.6) вещественны и различны. Пусть $y_k^{(1)} = q_1^k$ и $y_k^{(2)} = q_2^k$.

Известно, что две непрерывно-дифференцируемые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ непрерывно изменяющегося аргумента x линейно независимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского

$$W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. По аналогии можно доказать, что две функции $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ целочисленного аргумента k линейно независимы тогда и только тогда, когда отличен от нуля разностный аналог определителя Вронского:

$$\Delta_{k,k+1}[v_k^{(1)}, v_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} v_k^{(1)} & v_k^{(2)} \\ \Delta v_k^{(1)} & \Delta v_k^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_k^{(1)} & v_k^{(2)} \\ v_{k+1}^{(1)} & v_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_k^{(1)} & v_k^{(2)} \\ v_k^{(1)} & v_k^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_k^{(1)} & v_k^{(2)} \\ v_{k+1}^{(1)} & v_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что для найденных частных решений $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ уравнения (2.4) имеет место соотношение

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_1^{k+1} & q_2^{k+1} \end{vmatrix} = (q_2 - q_1) q_1^k q_2^k \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (2.4) может быть записано в виде:

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Второй случай: $D = 0$. При этом $q_1 = q_2 = \dfrac{c}{2b} = q_0$. Пусть $y_k^{(1)} = q_0^k$. Покажем, что в этом случае, по аналогии с обыкновенным дифференциальным уравнением (2.3), функция $y_k^{(2)} = k \cdot q_0^k$ удовлетворяет уравнению (2.4):

$$a y_{k-1}^{(2)} - c y_k^{(2)} + b y_{k+1}^{(2)} = a(k-1) q_0^{k-1} - ck q_0^k + b(k+1) q_0^{k+1} = k \underbrace{\left(a q_0^{k-1} - c q_0^k + b q_0^{k+1}\right)}_{=0} - a q_0^{k-1} + b q_0^{k+1} =$$

$$= q_0^{k-1} (b \underbrace{q_0^2}_{c^2/4b^2} - a) = \frac{q_0^{k-1}}{4b} (c^2 - 4ab) = \frac{q_0^{k-1}}{4b} \cdot D = 0.$$

Так как

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} q_0^k & k q_0^k \\ q_0^{k+1} & (k+1) q_0^{k+1} \end{vmatrix} = q_0^{2k+1} \neq 0,$$

то функции $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ линейно независимы, то есть они образуют ФСР уравнения (2.4). Общее решение уравнения (2.4) в данном случае имеет вид:

$$y_k = (C_1 + C_2 k)\, q_0^k,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Третий случай: $D < 0$. При этом корни q_1 и q_2 уравнения (2.6) различны и комплексно сопряжены друг другу, так как по предположению коэффициенты уравнения (2.6) вещественны. Следовательно, числа q_1 и q_2 можно записать в виде:

$$q_{1,2} = \frac{c \pm i\sqrt{|D|}}{2b} = \rho \cdot e^{\pm i\varphi},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|D|}}{c}, \quad \rho = \frac{\sqrt{c^2+|D|}}{2b} = \frac{\sqrt{c^2+4ab-c^2}}{2b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Так как

$$q_1^k = \rho^k e^{ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

$$q_2^k = \rho^k e^{-ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi),$$

то частными решениями уравнения (2.4) являются функции $y_k^{(1)} = \rho^k\cos k\varphi$ и $y_k^{(2)} = \rho^k\sin k\varphi$. Покажем, что эти функции линейно независимы:

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} \rho^k\cos k\varphi & \rho^k\sin k\varphi \\ \rho^{k+1}\cos[(k+1)\varphi] & \rho^{k+1}\sin[(k+1)\varphi] \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^{2k+1}\left(\sin[(k+1)\varphi]\cos k\varphi - \sin k\varphi\cos[(k+1)\varphi]\right) = \rho^{2k+1}\sin\varphi = \rho^{2k+1}\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{ab}} \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ образуют ФСР уравнения (2.4), а его общее решение может быть записано в виде

$$y_k = \rho^k(C_1\cos k\varphi + C_2\sin k\varphi),$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

3 Разностная задача Штурма-Лиувилля на отрезке

В дальнейшем для исследования свойств разностных операторов нам понадобится сеточный аналог полной ортогональной системы функций непрерывно изменяющегося аргумента на отрезке. Как известно, для функций непрерывно изменяющегося аргумента такой системой является система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Рассмотрим разностный аналог этой задачи.

3.1 Разностная задача Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле

Прежде всего, рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $[0,l]$ с граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0,l), \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Задача (3.1) имеет бесконечно много собственных значений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...,$$

каждому из которых соответствует нормированная собственная функция вида

$$u^{(n)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Введем на отрезке $[0, l]$ равномерную сетку с шагом h:

$$\overline{\omega_h} = \{x_k = k \cdot h;\ k = 0, 1, 2, ..., K;\ \ K \cdot h = l\}.$$

Разностная аппроксимация задачи (3.1) на этой сетке имеет вид:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad k = 1, 2, ..., K-1, \\ y_0 = y_K = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Задачу Штурма-Лиувилля (3.2) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} y_{k+1} - 2\left(1 - \dfrac{h^2\lambda}{2}\right) y_k + y_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, ..., K-1, \\ y_0 = y_K = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Будем искать решение однородного разностного уравнения (3.3) в виде $y_k = q^k$, где $q \neq 0$. Подставляя это выражение в уравнение (3.3), получаем:

$$q^{k+1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) q^k + q^{k-1} = 0,\ k = 1, 2, ..., K-1 \ \Rightarrow\ q^2 - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) q + 1 = 0. \tag{3.4}$$

Корни полученного квадратного уравнения имеют вид

$$q_{1,2} = 1 - \frac{h^2\lambda}{2} \pm \sqrt{D/4},$$

где

$$\frac{D}{4} = \left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right)^2 - 1.$$

Рассмотрим три возможных случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1) Неравенство $D > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\left|1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{h^2\lambda}{2} > 1, \\ 1 - \dfrac{h^2\lambda}{2} < -1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda < 0, \\ \lambda > \dfrac{4}{h^2}. \end{array} \right.$$

В этом случае

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

где q_1 и q_2 вещественны и различны. Подставим функцию y_k в граничные условия задачи (3.3):

$$y_0 = C_1 + C_2 = 0, \quad y_K = C_1 q_1^K + C_2 q_2^K = 0.$$

В результате для неизвестных C_1 и C_2 получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений, определитель которой отличен от нуля:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 q_1^K + C_2 q_2^K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^K & q_2^K \end{vmatrix} = q_2^K - q_1^K \neq 0.$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = 0$ и $y_k \equiv 0$, то есть не является собственной функцией по определению.

2) Равенство $D = 0$ выполняется, если

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \lambda = \dfrac{4}{h^2}. \end{array}\right.$$

В этом случае $y_k = (C_1 + kC_2)q_0^k$, где $q_0 = 1 - \dfrac{h^2\lambda}{2}$. Подставляя эту функцию в граничные условия, получаем:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ (C_1 + KC_2)q_0^K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $y_k \equiv 0$, то есть, как и в предыдущем случае, не является собственной функцией.

3) Неравенство $D < 0$ выполняется при условии $0 < \lambda < \dfrac{4}{h^2}$. В этом случае можно ввести обозначение

$$\cos(\alpha h) = 1 - \frac{h^2\lambda}{2}, \tag{3.5}$$

где α — некоторое число, и записать корни характеристического уравнения (3.4) следующим образом:

$$q_{1,2} = \cos(\alpha h) \pm \sqrt{\cos^2(\alpha h) - 1} = \cos(\alpha h) \pm i\sin(\alpha h) = e^{\pm i\alpha h}.$$

Соответствующие частные решения разностного уравнения (3.3) имеют вид:

$$y_k^{(1)} = q_1^k = e^{i\alpha hk} = e^{i\alpha x_k} = \cos(\alpha x_k) + i\sin(\alpha x_k),$$

$$y_k^{(2)} = q_2^k = e^{-i\alpha hk} = e^{-i\alpha x_k} = \cos(\alpha x_k) - i\sin(\alpha x_k).$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.3) можно записать как линейную комбинацию функций $\cos(\alpha x_k)$ и $\sin(\alpha x_k)$:

$$y_k = C_1\sin(\alpha x_k) + C_2\cos(\alpha x_k),$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа.

Из условия $y_0 = 0$ получаем, что $C_2 = 0$, то есть $y_k = C_1 \sin(\alpha x_k)$. Воспользуемся вторым граничным условием:

$$y_K = C_1 \sin(\alpha x_K) = C_1 \sin(\alpha l) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha l = \pi n \;\Rightarrow\; \alpha_n = \frac{\pi n}{l},\; n = 1, 2, ...$$

Так как найденные параметры α_n и собственные значения λ_n задачи Штурма-Лиувилля (3.3) связаны соотношением (3.5), то имеют место равенства:

$$\cos\frac{\pi n h}{l} = 1 - \frac{h^2\lambda_n}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\frac{\pi n h}{l}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n h}{2l},\; n = 1, 2, ... \tag{3.6}$$

Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$y_k^{(n)} = C_1 \sin\frac{\pi n x_k}{l}.$$

Заметим, что в отличие от дифференциальной задачи Штурма-Лиувилля (3.1), разностная задача (3.3) имеет конечное число различных собственных значений. В самом деле, при $n = K$ соответствующая λ_K функция $y_k^{(K)}$ будет тождественно равна нулю:

$$y_k^{(K)} = C_1 \sin\frac{\pi K x_k}{l} = C_1 \sin\frac{\pi K h k}{l} = C_1 \sin\frac{\pi l k}{l} = C_1 \sin(\pi k) = 0.$$

Кроме того, при $n = K + 1$ и при $n = K - 1$ собственные значения (3.6) совпадают:

$$\lambda_{K+1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(K+1)h}{2l}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2l}\right) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l},$$
$$\lambda_{K-1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(K-1)h}{2l}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2l}\right) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l},$$

так как $Kh = l$.

Аналогично можно показать, что $\lambda_{K+n} = \lambda_{K-n}$ для любого n, то есть λ_n принимает *различные* значения, которым соответствуют нетривиальные собственные функции, только при $n = 1, 2, ..., K - 1$.

Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций разностной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с граничными условиями Дирихле.

1) Для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля (3.3) справедливы неравенства:

$$\frac{8}{l^2} \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{K-1} < \frac{4}{h^2}.$$

В самом деле,

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} = \frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{\sin(\pi h/2l)}{\pi h/2l}\right]^2.$$

Так как $h \leqslant \dfrac{l}{2}$, то $\dfrac{\pi h}{2l} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Поскольку

$$\min_{z\in[0,\pi/4]} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = \left.\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|_{z=\pi/4} = \frac{8}{\pi^2},$$

то для первого собственного значения получаем оценку снизу: $\lambda_1 \geqslant \dfrac{8}{l^2}$.

Так как

$$\lambda_{K-1} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l},$$

получаем очевидную оценку сверху: $\lambda_{K-1} < \dfrac{4}{h^2}$.

2) Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.3), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой:

$$\left(y^{(n)}, y^{(m)}\right) = 0 \quad \text{при } n \neq m. \tag{3.7}$$

В самом деле, воспользуемся второй разностной формулой Грина

$$\left(u, (av_{\bar{x}})_x\right) - \left(v, (au_{\bar{x}})_x\right) = a_K\left(uv_{\bar{x}} - u_{\bar{x}}v\right)_K - a_1\left(uv_x - u_xv\right)_0,$$

в которой положим $a_k \equiv 1$, $u = y^{(n)}$, $v = y^{(m)}$. Учитывая граничные условия для собственных функций $y^{(n)}$ и $y^{(m)}$, получаем:

$$0 = \left(y^{(n)}, y^{(m)}_{\bar{x}x}\right) - \left(y^{(n)}_{\bar{x}x}, y^{(m)}\right) = (\lambda_n - \lambda_m)\left(y^{(n)}, y^{(m)}\right).$$

Так как при несовпадающих n и m собственные значения различны ($\lambda_m \neq \lambda_n$), то полученное равенство означает, что при $m \neq n$ выполняются соотношения (3.7).

3) Для того чтобы получить ортонормированную систему собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (3.3), нужно взять нормировочный множитель равным $C_1 = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$.

В самом деле, если $C_1 = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$, то квадрат нормы собственных функций, определяемый как $\|y^{(n)}\|^2 = (y^{(n)}, y^{(n)})$, будет иметь вид:

$$\|y^{(n)}\|^2 = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{K-1}\left(y_k^{(n)}\right)^2 h = \frac{2h}{l}\sum_{k=1}^{K-1}\sin^2\frac{\pi n x_k}{l} = \frac{2h}{l}\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n x_k}{l}\right) =$$

$$= \frac{h}{l}(K-1) - \frac{h}{l}\sum_{k=1}^{K-1}\mathrm{Re}(\underbrace{e^{i2\pi nh/l}}_{z_n})^k = \frac{hK - h}{l} - \frac{h}{l}\mathrm{Re}\frac{z_n^K - z_n}{z_n - 1}.$$

Учитывая, что $hK = l$ и $z_n^K = e^{i2\pi nhK/l} = e^{i2\pi n} = 1$, окончательно получаем:

$$\|y^{(n)}\|^2 = 1 - \frac{h}{l} - \frac{h}{l} \cdot \frac{1 - z_n}{z_n - 1} = 1.$$

4) Для любой сеточной функции $f(x_k)$, $x_k \in \overline{\omega_h}$, ограниченной по норме и обращающейся в 0 при $k = 0$ и $k = K$, справедливо равенство:

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^{K-1} f_n \cdot \mu^{(n)}(x_k), \tag{3.8}$$

где $\mu^{(n)}(x_k)$ — нормированные собственные функции задачи (3.3):

$$\mu^{(n)}(x_k) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x_k}{l},$$

а коэффициенты f_n определяются как коэффициенты Фурье:

$$f_n = \left(f, \mu^{(n)}\right).$$

При этом

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{K-1} f_n^2. \tag{3.9}$$

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим равенство (3.8) как СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $f_1, ..., f_{K-1}$. Умножая его скалярно на $\mu^{(n)}(x_k)$ для $n = 1, 2, ..., K-1$ и пользуясь тем, что

$$\left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \delta_{n,m},$$

получаем, что $f_n = \left(f, \mu^{(n)}\right)$.

Рассмотрим теперь квадрат нормы f. Так как по условию $f_0 = f_K = 0$, то

$$\|f\|^2 = (f, f) = \left(\sum_{n=1}^{K-1} f_n \cdot \mu^{(n)}(x_k), \sum_{m=1}^{K-1} f_m \cdot \mu^{(m)}(x_k)\right) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{K-1} f_n f_m \left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \sum_{n,m=1}^{K-1} f_n f_m \delta_{n,m} = \sum_{n=1}^{K-1} f_n^2.$$

3.2 Разностная задача Штурма-Лиувилля с условиями Неймана

Собственные значения дифференциальной задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad x \in (0,\, l), \\ u'(0) = u'(l) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

имеют вид

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Им отвечают нормированные собственные функции

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{l \cdot (1 + \delta_{n,0})}} \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Построим разностную аппроксимацию задачи (3.10) на равномерной сетке со вторым порядком погрешности аппроксимации. Для этого, например, используем сетку с фиктивными узлами:

$$x_k = (k - 0.5)h, \quad k = 0, 1, ..., K, \quad x_K = l + 0.5h, \quad h = \frac{l}{K-1}.$$

Разностная аппроксимация задачи (3.10) на этой сетке имеет вид:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x_k \in \omega_h, \\ y_{x,0} = y_{\bar{x},K} = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

или же в явном виде

$$\begin{cases} y_{k+1} - 2\left(1 - \dfrac{h^2\lambda}{2}\right) y_k + y_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, ..., K-1, \\ y_0 = y_1, \quad y_K = y_{K-1}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Как и в случае задачи Дирихле, решение ищем в виде $y_k = q^k$, где

$$q_{1,2} = 1 - \frac{h^2\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right)^2 - 1}.$$

Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \dfrac{4}{h^2}$, то существуют вещественные отличные от 1 числа $q_1 \neq q_2$. Общее решение разностного уравнения (3.12) при этом имеет вид $y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k$. Подставляя его в граничные условия задачи (3.12), получаем

$$\begin{cases} C_1(q_1 - 1) + C_2(q_2 - 1) = 0, \\ C_1 q_1^{K-1}(q_1 - 1) + C_2 q_2^{K-1}(q_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} (q_1 - 1) & (q_2 - 1) \\ q_1^{K-1}(q_1 - 1) & q_2^{K-1}(q_2 - 1) \end{vmatrix} = (q_1 - 1)(q_2 - 1)(q_2^{K-1} - q_1^{K-1})$$

отличен от нуля, то $C_1 = C_2 = 0$, то есть $y_k \equiv 0$ и собственной функцией не является.

Если $\lambda = 0$, то $q_1 = q_2 = 1$, откуда получаем $y_k = C_1 + C_2 k$. Эта функция удовлетворяет граничным условиям при $C_2 = 0$ и любом C_1. Это означает, что, как и в случае дифференциальной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Неймана, $\lambda_0 = 0$ является собственным значением, которому отвечает собственная функция, равная константе.

Если $\lambda = \dfrac{4}{h^2}$, то $q_1 = q_2 = -1$, откуда получаем $y_k = (C_1 + C_2 k)\cdot(-1)^k$. Подставляя эту функцию в граничные условия, получаем

$$\begin{cases} C_1 = -C_1 - C_2, \\ (C_1 + KC_2)(-1)^K = (C_1 + (K-1)C_2)(-1)^{K-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + (2K-1)C_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен $4(K-1)$. Он отличен от нуля при любом $K > 1$, откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$, то есть $y_k \equiv 0$. Следовательно, $\lambda = \dfrac{4}{h^2}$ не является собственным значением задачи (3.12).

Если $0 < \lambda < \dfrac{4}{h^2}$, то как и в случае задачи Дирихле, можно ввести обозначение

$$\cos(\alpha h) = 1 - \frac{h^2\lambda}{2},$$

позволяющее записать общее решение разностного уравнения (3.12) в виде

$$y_k = C_1\cos(\alpha k h) + C_2\sin(\alpha k h) = C_1\cos\left(\alpha x_k + \frac{\alpha h}{2}\right) + C_2\sin\left(\alpha x_k + \frac{\alpha h}{2}\right).$$

Подставляя это выражение в первое граничное условие задачи (3.12), получаем

$$C_1 = C_1\cos(\alpha h) + C_2\sin(\alpha h).$$

Так как $\cos(\alpha h) < 1$, то

$$C_1 = C_2\frac{\sin(\alpha h)}{1-\cos(\alpha h)},$$

откуда следует, что

$$y_k = \frac{C_2}{1-\cos(\alpha h)}\left(\sin(\alpha h)\cos\left(\alpha x_k + \frac{\alpha h}{2}\right) + (1-\cos(\alpha h))\sin\left(\alpha x_k + \frac{\alpha h}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{C_2}{1-\cos(\alpha h)}\left(\sin\left(\alpha x_k + \frac{\alpha h}{2}\right) - \sin\left(\alpha x_k - \frac{\alpha h}{2}\right)\right) = \frac{2C_2\sin\frac{\alpha h}{2}}{1-\cos(\alpha h)}\cos(\alpha x_k).$$

Итак, решение уравнения, удовлетворяющее первому граничному условию, имеет вид $y_k = C\cos(\alpha x_k)$. Подставим его во второе граничное условие:

$$\cos\left(\alpha l + \frac{\alpha h}{2}\right) = \cos\left(\alpha l - \frac{\alpha h}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; \sin(\alpha l)\sin\left(\frac{\alpha h}{2}\right) = 0.$$

Так как

$$\sin^2\frac{\alpha h}{2} = \frac{1-\cos(\alpha h)}{2} \neq 0,$$

то $\sin(\alpha l) = 0$, откуда получаем

$$\alpha = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, ...$$

Пользуясь связью величин α и λ, находим выражения для собственных значений λ_n, таких что $0 < \lambda_n < \dfrac{4}{h^2}$:

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2l}, \quad n = 1, 2, ...$$

Различные значения λ_n отвечают $n = 1, 2, ..., K-1$. Соответствующие нормированные собственные функции имеют вид

$$y_k^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi n x_k}{l}.$$

Объединяя собственные функции, отвечающие ненулевым собственным значениям, и равную константе собственную функцию, отвечающую $\lambda_0 = 0$, получаем решение разностной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Неймана:

$$y_k^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{l \cdot (1 + \delta_{n,0})}} \cos \frac{\pi n x_k}{l}, \quad \lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, ..., K-1. \tag{3.13}$$

Для собственных функций (3.13) имеют место условия ортогональности:

$$(y^{(n)}, y^{(m)}) = \delta_{n,m}.$$

4 Разностные теоремы вложения

Теорема 4.1 *Для всякой сеточной функции* $y(x)$*, заданной на произвольной неравномерной сетке* $\hat{\overline{\omega}}_h = \{x_k;\ k = 0, 1, ..., K;\ x_0 = 0,\ x_K = l\}$, $h_k = x_k - x_{k-1}$*, такой что* $y_0 = y_K = 0$*, справедливо неравенство*

$$\|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2} ||y_{\bar{x}}]|, \tag{4.1}$$

где $\|y\|_C = \max\limits_{x_k \in \hat{\overline{\omega}}_h} |y(x_k)|, \quad ||y_{\bar{x}}]| = \sqrt{(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]}, \quad (y, v] = \sum\limits_{k=1}^{K} y_k v_k h_k.$

Доказательство. Для рассматриваемой сеточной функции в произвольном узле x_k справедливо равенство:

$$l y^2(x_k) = (l - x_k) y^2(x_k) + x_k y^2(x_k).$$

Так как $y(0) = 0$, то

$$\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p) h_p = (y(x_1) - y(x_0)) + (y(x_2) - y(x_1)) + ... + (y(x_k) - y(x_{k-1})) = y(x_k) - y(0) = y(x_k).$$

Поскольку $y(l) = 0$, то аналогично получаем:

$$\sum_{p=k+1}^{K} y_{\bar{x}}(x_p)h_p = (y(x_{k+1}) - y(x_k)) + (y(x_{k+2}) - y(x_{k+1})) + ... + (y(x_K) - y(x_{K-1})) =$$

$$= y(l) - y(x_k) = -y(x_k).$$

Следовательно,

$$y^2(x_k) = \left(\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 = \left(\sum_{p=k+1}^{K} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{p=1}^{k} h_p = h_1 + ... + h_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_k - x_{k-1}) = x_k$$

и

$$\sum_{p=k+1}^{K} h_p = h_{k+1} + ... + h_K = (x_{k+1} - x_k) + (x_{k+2} - x_{k+1}) + ... + (x_K - x_{K-1}) = l - x_k.$$

Таким образом, получаем:

$$ly^2(x_k) = (l - x_k)\left(\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 + x_k\left(\sum_{p=k+1}^{K} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (l - x_k)\underbrace{\sum_{p=1}^{k} h_p}_{x_k}\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p + x_k\underbrace{\sum_{p=k+1}^{K} h_p}_{l-x_k}\sum_{p=k+1}^{K} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p = x_k(l - x_k)\sum_{p=1}^{K} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p =$$

$$= x_k(l - x_k)||y_{\bar{x}}|]^2.$$

Так как

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l} x(l - x) = \frac{l^2}{4},$$

то окончательно получаем:

$$\|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2}||y_{\bar{x}}|].$$

Замечание 4.2 *Если y — произвольная функция, не обязательно обращающаяся в 0 на границах отрезка $[0, l]$, то для нее можно получить оценку:*

$$\|y\|_C^2 \leqslant 2\left(y_0^2 + y_K^2 + \frac{l}{4}||y_{\bar{x}}|]^2\right).$$

Теорема 4.3 *Для всякой сеточной функции $y(x_k)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\overline{\hat{\omega}_h} = \{x_k;\ k = 0, 1, ..., K;\ x_0 = 0,\ x_K = l\}$, $h_k = x_k - x_{k-1}$, такой что $y_0 = y_K = 0$, справедливо неравенство*

$$\|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{4} ||y_{\bar{x}}|]^2, \tag{4.2}$$

где $\|y\|^2 = (y, y)$.

Доказательство. Пользуясь неравенством (4.1), получаем:

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{K-1} y_k^2 h_k \leqslant \max_k |y_k|^2 \sum_{k=1}^{K-1} h_k \leqslant \frac{l}{4} ||y_{\bar{x}}|]^2 \cdot l.$$

Теорема 4.4 *Для всякой сеточной функции $y(x_k)$, заданной на равномерной сетке $\overline{\omega_h} = \{x_k = kh;\ k = 0, 1, ..., K;\ \ Kh = l\}$, такой что $y_0 = y_K = 0$, справедливы неравенства:*

$$\frac{h^2}{4} ||y_{\bar{x}}|]^2 < \|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{8} ||y_{\bar{x}}|]^2. \tag{4.3}$$

то есть нормы $||y_{\bar{x}}|]$ и $\|y\|$ эквивалентны.

Доказательство. Разложим функцию y по ортонормированной системе собственных функций

$$\mu^{(n)}(x_k) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x_k}{l}$$

разностной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле на отрезке $[0, l]$:

$$y(x_k) = \sum_{n=1}^{K-1} C_n \mu^{(n)}(x_k), \quad C_n = (y, \mu^{(n)}).$$

При этом

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{K-1} C_n^2.$$

Пользуясь первой разностной формулой Грина (1.7) и учитывая граничные условия для функции $y(x_k)$, получаем:

$$-(\Lambda y, y) = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = ||y_{\bar{x}}|]^2, \quad \text{где } \Lambda y = y_{\bar{x}x}.$$

В свою очередь

$$\Lambda y = \sum_{n=1}^{K-1} C_n \underbrace{\Lambda \mu^{(n)}(x)}_{-\lambda_n \mu^{(n)}(x)} = -\sum_{n=1}^{K-1} C_n \lambda_n \mu^{(n)}(x).$$

Так как $\left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \delta_{n,m}$, то

$$||y_{\bar{x}}|]^2 = \sum_{n=1}^{K-1} C_n^2 \lambda_n,$$

откуда получаем:

$$\lambda_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{K-1} C_n^2}_{\|y\|^2} \leqslant ||y_{\bar{x}}|]^2 \leqslant \lambda_{K-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{K-1} C_n^2}_{\|y\|^2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 \|y\|^2 \leqslant ||y_{\bar{x}}|]^2 \leqslant \lambda_{K-1} \|y\|^2.$$

Так как $\lambda_1 \geqslant \dfrac{8}{l^2}$ и $\lambda_{K-1} < \dfrac{4}{h^2}$, то окончательно получаем:

$$\frac{8}{l^2}\|y\|^2 \leqslant ||y_{\bar{x}}|]^2 < \frac{4}{h^2}\|y\|^2,$$

или, что то же самое:

$$\frac{h^2}{4}||y_{\bar{x}}|]^2 < \|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{8}||y_{\bar{x}}|]^2.$$

5 Контрольные вопросы

1) Сформулируйте формулы суммирования по частям для сеточных функций.

2) Сформулируйте первую и вторую разностные формулы Грина.

3) Сформулируйте разностную задачу Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле на отрезке $[0,\, l]$. Получите ее собственные значения и собственные функции.

4) Сформулируйте основные свойства собственных значений и собственных функций разностной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле.

5) Сформулируйте разностную задачу Штурма-Лиувилля с условиями Неймана на отрезке $[0,\, l]$. Докажите, что ее собственные функции

$$y_k^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{l\cdot(1+\delta_{n,0})}}\cos\frac{\pi n x_k}{l}, \quad n = 0, 1, .., K-1$$

образуют ортонормированную систему.

6) Постройте разностную аппроксимацию задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad x \in (0,\, l), \\ u(0) = 0, \quad u'(l) = 0 \end{cases}$$

на равномерной сетке со вторым порядком погрешности аппроксимации. Найдите для полученной разностной задачи собственные функции и собственные значения.

7) Сформулируйте и докажите теорему о связи сеточных норм $\|y\|_C$ и $\|y_{\bar{x}}|]$.

8) Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентности норм $\|y\|$ и $\|y_{\bar{x}}|]$.