0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 4

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

ЗАДАЧА 1. Теорема косинусов. Докажите, что справедливы равенства для векторов

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\pm\mathbf{b},\mathbf{a}\pm\mathbf{b}) = \\ = (\mathbf{a},\mathbf{a}) \pm (\mathbf{a},\mathbf{b}) \pm (\mathbf{b},\mathbf{a}) + (\mathbf{b},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \pm 2(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

ЗАДАЧА 2. В треугольнике ABC заданы длины его сторон $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Найдите длину медианы $|CM|$.

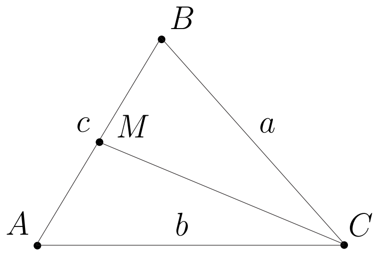

Рис. 1. К задаче 2.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right),$$
$$a^2 = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB}), \quad b^2 = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}),$$
$$m_c^2 = \left|\overrightarrow{CM}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\right),$$
$$c^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 = a^2 + b^2 - 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right),$$
$$2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

З А Д А Ч А 3. Докажите, что в треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

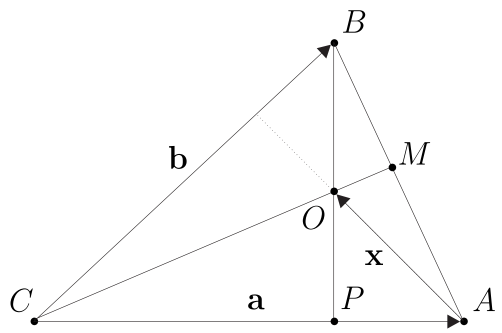

Рис. 2. К задаче 3.

Р е ш е н и е. Пусть CM — это высота, опущенная из точки C на сторону AB, BP — это высота, опущенная из точки B на сторону CA. Пусть O — это точка пересечения высот CM и BP. Нужно доказать, что

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CB}) = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{AO}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AO} = -\mathbf{x} - \mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

По определению высоты имеем

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow (-\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{a}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{a}|^2;$$
$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{a}|^2.$$

Итак,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0.$$

З А Д А Ч А 4. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении

$$\frac{AD}{DB} = \lambda.$$

Выразить длину отрезка $\overrightarrow{CD}$ через длины a, b, c сторон треугольника и число λ.

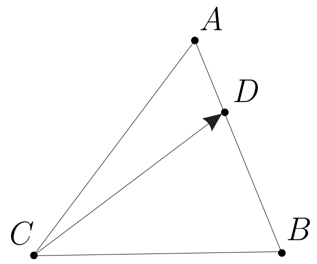

Рис. 3. К задаче 4.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}}{1+\lambda},$$

$$a^2 = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA}), \quad b^2 = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}), \quad c^2 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left[a^2 + \lambda^2 b^2 + 2\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right];$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2};$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{1}{1+\lambda} a^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} b^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} c^2.$$

ЗАДАЧА 5. Даны вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Представить вектор $\mathbf{b}$ в виде суммы двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ так, чтобы вектор $\mathbf{x}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{y}$ ортогонален вектору $\mathbf{a}$.

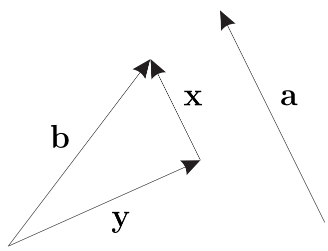

Рис. 4. К задаче 5.

Решение. Итак,

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{y} \perp \mathbf{a};$$

$$\lambda = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})};$$

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}.$$

З А Д А Ч А 6. Даны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1, \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0.$$

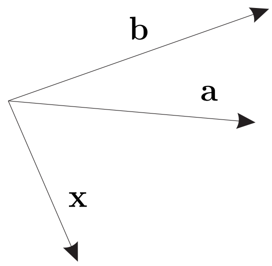

Рис. 5. К задаче 6.

Р е ш е н и е. Будем искать вектор $\mathbf{x}$ в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b};$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a})\alpha + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\beta = 1,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})\alpha + (\mathbf{b}, \mathbf{b})\beta = 0.$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ 0 & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & 1 \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}}$$

Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}, \quad \beta = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2},$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}.$$

З А Д А Ч А 7. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Найти вектор $\mathbf{x}$ из системы уравнений

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1, \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0.$$

Р е ш е н и е. Итак, вектор $\mathbf{x} \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{x} \perp \mathbf{c}$. Поэтому ищем искомый вектор в виде векторного произведения

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{b}] \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Итак,

$$\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

ЗАДАЧА 8. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, являющийся векторной ортогональной проекцией вектора $\mathbf{b}$ на ось, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$.

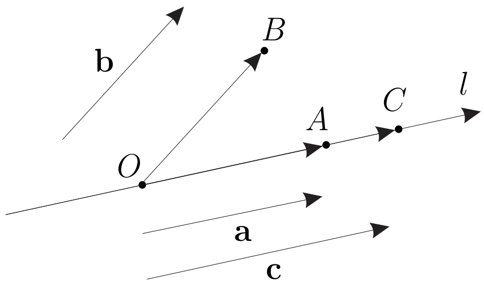

Рис. 6. К задаче 8.

Решение. Пусть l — это произвольная ось со направленная вектору $\mathbf{a}$. Отложим все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от произвольной точки $O \in l$. В результате получим три направленных отрезка

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC}.$$

Тогда искомая векторная проекция — это есть следующая величина:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}, \quad OC = \text{Пр}_l \overrightarrow{OB}, \tag{0.1}$$

где $\overrightarrow{OC}$ — это искомая векторная ортогональная проекция направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$, а OC — это величина направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$ на оси l. Тогда имеем

$$OC = |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|}. \tag{0.2}$$

Из равенств вытекает (0.1) и (0.2) вытекает искомое равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA} = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})}\overrightarrow{OA},$$

из которого в силу произвольности точки $O \in l$ имеем

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}.$$

Отметим, что векторная ортогональная проекция вектора $\mathbf{b}$ на ось, порожденную вектором $\mathbf{a}$, равна первому слагаемому в следующей сумме:

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad (\mathbf{d}, \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{c} = \lambda \cdot \mathbf{a}, \quad \lambda = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

З А Д А Ч А 9. Даны вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$. Найти вектор $\mathbf{b}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\mathbf{a}$ на плоскость, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$.

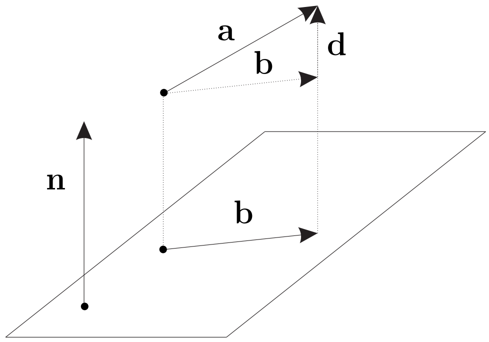

Рис. 7. К задаче 9.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{d} = \lambda \cdot \mathbf{n}.$$

Вектор $\mathbf{b}$ искомый. Умножим скалярно обе части равенства на $\mathbf{n}$ и найдём тогда

$$\lambda = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

З А Д А Ч А 10. Даны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

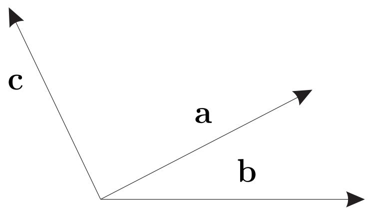

Рис. 8. К задаче 10.

Р е ш е н и е . Ищем вектор $\mathbf{c}$ в следующем виде:

$$\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}.$$

Тогда

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})};$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{c}) = \lambda_1^2(\mathbf{a},\mathbf{a}) + \lambda_2^2(\mathbf{b},\mathbf{b}) + 2\lambda_1\lambda_2(\mathbf{a},\mathbf{b});$$

$$\lambda_2 = \pm\frac{(\mathbf{a},\mathbf{a})}{\sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{a}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}}.$$

Выберем знак «+» или «-» из следующего требования

$$0 > (\mathbf{c},\mathbf{b}) = \lambda_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \lambda_2(\mathbf{b},\mathbf{b}) \Leftrightarrow \lambda_2(\mathbf{b},\mathbf{b}) < \lambda_2\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a},\mathbf{a})} \Rightarrow \lambda_2 < 0.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{a})\mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{b},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{a}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}}.$$