0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 1

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 0. План лекции

1. Определитель второго порядка.

1.1 Система двух уравнений.

1.2. Метод исключения переменных.

1.3. Матрица 2×2.

1.4. Определитель второго порядка.

1.5. Запись решения.

1.6. Примеры.

1.7. Лемма о равенстве нулю определителя матрицы.

2. Определитель третьего порядка.

2.1. Система трёх уравнений относительно трёх неизвестных.

2.2. Метод исключения неизвестных.

2.3. Определение квадратной матрицы 3×3.

2.4. Определение определителя третьего порядка.

2.5. Запись решения системы трёх уравнений.

2.6. Правило Саррюса.

2.7. Дополнительный минор.

2.8. Алгебраическое дополнение.

2.9. Примеры.

2.10 Лемма о разложении определителя по строчке и по столбцу.

§ 1. Определитель второго порядка

Рассмотрим следующую систему двух уравнений относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Методом исключения переменных построим решение при некотором условии, которое будет указано далее. Найдём выражение для неизвестной x. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второе уравнение умножим на $-b_1$ тогда получим равенства

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Теперь сложим эти два уравнения и получим равенство

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{1.3}$$

Теперь получим выражение для неизвестной y. Умножим обе части первого уравнения в (1.1) на $-a_2$, а второе на a_1 и сложим полученные равенства. Тогда получим следующее выражение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{1.4}$$

Предположим, что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{1.5}$$

тогда из равенств (1.3) и (1.4) получим следующие эквивалентные равенства:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить непосредственной проверкой, что выражения (1.6) действительно удовлетворяют уравнениям (1.1).

Выражения для неизвестных x и y можно переписать в гораздо более удобном виде. С этой целью введём понятие матрицы 2×2.

Определение 1. *Матрицей A размера 2×2 называется квадратная таблица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

состоящая из двух строк и двух столбцов, на пересечении которых расположены элементы матрицы

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{22}.$$

Замечание 1. Элементы a_{jk} квадратной матрицы A размера 2×2 индексируются двумя наборами натуральных чисел $j, k = 1, 2$. Первый индекс j равен номеру строчки,в которой располагается элемент a_{jk}, а второй индекс k равен номеру столбца, в котором расположен элемент

a_{jk}. Элементы матрицы могут иметь различную природу. Например, элементами могут быть числа или векторы.

Теперь дадим определение определителя квадратной матрицы 2×2.

Определение 2. *Определителем квадратной матрицы A размера 2×2 называется следующее выражение*:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.8}$$

Замечание 2. Правило, по которому вычисляется определитель квадратной матрицы 2×2, можно схематично представить в следующем виде:

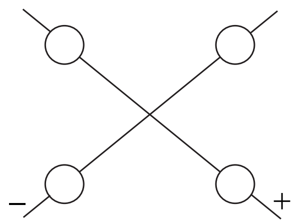

Рис. 1. Правило умножения.

ПРИМЕР 1. Вычислим определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, согласно определению 2 имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Теперь рассмотрим следующие три квадратные матрицы, связанные с коэффициентами и правами частями системы уравнений (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Согласно определению 2 имеем

$$|A| = a_1b_2 - a_2b_1, \quad |A_1| = c_1b_2 - c_2b_1, \quad |A_2| = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{1.10}$$

Тогда формулы (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.11}$$

ПРИМЕР 2. Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 5x + 4y = 12. \end{cases} \tag{1.12}$$

Составим три квадратные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители этих трёх матриц.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 4 - (-3) \cdot 12 = -28 + 36 = 8,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-7) \cdot 5 = 24 + 35 = 59.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то система уравнений (1.12) имеет единственное решение, которое даётся следующими формулами:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{23}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{59}{23}.$$

Мы рассмотрели полностью случай, когда $|A| \neq 0$. Что можно сказать о существовании решения системы уравнений (1.1) в том случае, когда $|A| = 0$? Рассмотрим ряд примеров.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

Матрица A имеет в данном случае вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Очевидно, что эта система уравнений не имеет решений. Отметим, что

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = 1 - 2 = -1, \quad |A_2| = 2 - 1 = 1.$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим теперь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases} \tag{1.14}$$

Матрица A имеет в данном случае следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна одному уравнению

$$x + y = 1,$$

всё множество решений которой можно записать в следующем виде:

$$x = c, \quad y = 1 - c,$$

где c — это произвольное вещественное число. Отметим, что в данном случае

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = |A_2| = 0.$$

З а м е ч а н и е 3. Могло бы показаться, что наличие бесконечного множества решений системы уравнений (1.14) связано с тем, что $|A| = |A_1| = |A_2| = 0$. Однако, это не так. Рассмотрим ещё один пример.

П Р И М Е Р 5. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Очевидно, что последнее уравнение противоречиво и поэтому эта система уравнений не имеет решений, хотя

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = |A_1| = |A_2| = 0.$$

В заключение этого параграфа мы изучим вопрос о том, что можно сказать о матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

в том случае, когда $|A| = 0$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Для того, чтобы*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.16}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа α *и* β, $|\alpha| + |\beta| > 0$, *что выполнены следующие равенства:*

$$\alpha a_1 + \beta b_1 = \alpha a_2 + \beta b_2 = 0. \tag{1.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (1.17) и для определённости $\alpha \neq 0$. Тогда

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 \\ \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda b_1 b_2 - b_1 \lambda b_2 = 0.$$

Необходимость. Пусть выполнено равенство (1.16), тогда согласно определению 2 имеет место следующее равенство:

$$a_1 b_2 = a_2 b_1. \tag{1.18}$$

Рассмотрим случаи.

Первый случай. Пусть $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$. Тогда в силу равенства (1.18) имеем либо $a_1 = a_2 = 0$ либо одновременно $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. Если $a_1 = = a_2 = 0$, то

$$\begin{cases} a_1 = 0 \cdot b_1, \\ a_2 = 0 \cdot b_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot b_1 = 0, \\ 1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2 = 0, \end{cases},$$

т. е. имеют место равенства (1.17) при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Если $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то из равенства (1.18) вытекают равенства

$$\lambda := \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot a_1 - \lambda \cdot b_1 = 0, \\ 1 \cdot a_2 - \lambda \cdot b_2, \end{cases}$$

т. е. справедливы равенства (1.17) при $\alpha = 1$ и $\beta = -\lambda$.

Второй случай. Пусть $b_1 = 0$, тогда в силу равенства (1.18) либо $b_1 = 0$ либо $a_1 = 0$. Если $b_1 = b_2 = 0$, то имеют место следующие равенства:

$$\begin{cases} b_1 = 0 \cdot a_1, \\ b_2 = 0 \cdot a_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot a_1 - b_1 = 0, \\ 0 \cdot a_2 - b_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. имеет место равенство (1.17) при $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Пусть теперь $b_1 = a_1 = 0$. Очевидно, найдутся такие числа α и β не равные одновременно нулю, что

$$\alpha a_2 + \beta b_2 = 0.$$

Кроме того, всегда выполнено равенство

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha a_1 + \beta b_1 = 0.$$

Аналогично второму случаю рассматривается случай $b_2 = 0$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Справедливо следующее равенство для определителя числовых матриц* 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Прямое следствие определения 2.

Лемма доказана.

§ 2. Определитель третьего порядка

Рассмотрим теперь систему трёх уравнений относительно трёх неизвестных

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Наша задача при некотором условии на коэффициенты этого уравнения выписать единственное решение этой системы уравнений. Воспользуемся теперь определением 2 определителя второго порядка.

Умножим первое уравнение из системы (2.1) на определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \tag{2.2}$$

второе уравнение из системы (2.1) умножим на определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = b_3c_1 - b_1c_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} x + b_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} y + c_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} z = d_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}; \tag{2.3}$$

третье уравнение из системы (2.1) умножим на определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Заметим, что имеют место следующие равенства:

$$b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$
$$= b_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2(b_3c_1 - b_1c_3) + b_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0, \tag{2.5}$$

$$c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$
$$= c_1(b_2c_3 - b_3c_2) + c_2(b_3c_1 - b_1c_3) + c_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0. \tag{2.6}$$

Сложим равенства (2.2)–(2.4) с учётом полученных равенств (2.5) и (2.6) вытекает следующее равенство:

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) x = \\ = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим отдельно множитель при неизвестной x в последнем равенстве. Справедливы следующие равенства:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \\ = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \\ = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2. \quad (2.8)$$

Дадим определение квадратной матрицы размера 3×3.

Определение 3. *Квадратной матрицей A размера 3×3 называется квадратная таблица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

состоящая из трёх строк и трёх столбцов, на пересечении j–ой строчки и k–ого столбца расположен элемент a_{jk} матрицы A.

Замечание 4. Элементы a_{ij} матрицы A могут быть различной природы, например, числа и векторы.

Замечание 5. Помимо формы (2.9) записи матриц используется альтернативный (во многих случаях более удобный) способ записи матрицы в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Элементы a^j_k матрицы индексируются двумя индексами $j = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, 3$, причём верхний индекс j указывает на номер строчки, в которой расположен элемент матрицы, а нижний индекс k указывает на номер столбца, в котором расположен элемент матрицы.

Теперь мы в состоянии дать определение определителя квадратной матрицы 3×3 вида (2.10).

Определение 4. *Определителем третьего порядка квадратной матрицы A вида* (2.10) *называется следующее выражение*:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

ПРИМЕР 6. В силу определения 4 и равенства (2.8) справедливо следующее равенство:

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Кроме того,

$$d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

Сделаем одно важное предположение

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.14)$$

Тогда если решение x, y, z системы уравнений (2.1) существует, то в силу равенства (2.7) выражение для неизвестной x даётся следующим равенством:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad (2.15)$$

Аналогичным образом (это будет проделано в следующей лекции) могут быть в предположении существования решения получены следующие равенства для неизвестных y, z:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad (2.16)$$

Более того, используя определение 4 определителя третьего порядка и определение 2 определителя второго порядка подстановкой равенств (2.15) и (2.16) в систему уравнений (2.1) при выполнении условия (2.14) можно проверить, что они превращаются в тождества.

Правило Саррюса вычисления определителя. Из определений 4 и 2 вытекает следующая формула полного развёртывания определителя третьего порядка квадратной матрицы A вида (2.9):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2.17)$$

Заметим, что в этом выражении следующие произведения входят со знаком «+»:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}, \quad a_{12}a_{23}a_{31};$$

а эти произведения входят со знаком «$-$»:

$$a_{13}a_{22}a_{31}, \quad a_{11}a_{23}a_{31}, \quad a_{12}a_{21}a_{33}.$$

На этом рисунке указано правило вычисления произведений, входящих в формулу (2.17) со знаком «+» и входящих в формулу (2.17) со знаком «$-$»:

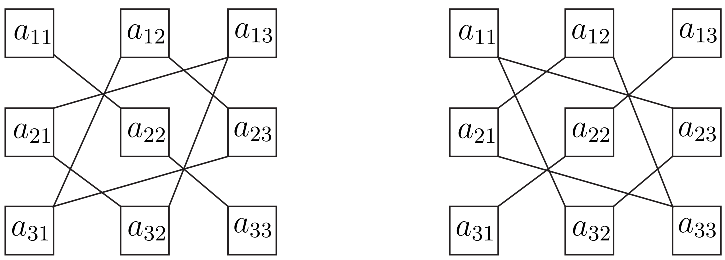

Рис. 2. Правило умножения Саррюса.

§ 3. Миноры и алгебраические дополнения

Прежде всего воспользуемся леммой 2 из первой лекции и запишем формулу (2.11) в следующем виде:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Введём понятие дополнительного минора M_{jk} к элементу a_{jk} матрицы A размера 3×3. Сначала рассмотрим как получается дополнительный минор M_{11}. Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Выделим в этой матрице первую строчку и первый столбец, т. е. ту строчку и тот столбец, на пересечении которых располагается элемент матрицы a_{11} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Удалим из квадратной матрицы A размера 3×3 отмеченные первую строчку и первый столбец и в результате получим следующую квадратную матрицу B размера 2×2:

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Тогда определитель матрицы B, равный

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \tag{3.5}$$

называется дополнительным минором M_{11} к элементу a_{11} квадратной матрицы A.

Определение 1. *Дополнительным минором M_{jk} к элементу a_{jk} матрицы* (3.2) *называется определитель матрицы, полученной из матрицы* (3.2) *вычеркиванием j–ой строчки и k–го столбца.*

ПРИМЕР 1. Найдём дополнительный минор к отмеченному элементу следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Проведём соответствующие действия согласно определению 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 6. \tag{3.7}$$

ПРИМЕР 2. Вычислим дополнительные миноры к элементам a_{11}, a_{21} и a_{31} матрицы (3.2). Дополнительный минор M_{11} к элементу a_{11} нами уже вычислен:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Проведём вычисления дополнительных миноров M_{21} и M_{31} к соответствующим элементам a_{21} и a_{22} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

С учётом полученных равенств (3.8)–(3.10) равенство (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}. \tag{3.11}$$

Дадим определение алгебраического дополнения.

Определение 2. *Алгебраическим дополнением A_{jk} элемента a_{jk} квадратной матрицы A вида* (3.2) *называется следующее выражение*:

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}, \tag{3.12}$$

где M_{jk} — это дополнительный минор элемента a_{jk}.

ПРИМЕР 3. Справедливы следующие равенства:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21},$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31}. \tag{3.13}$$

С учётом равенств (3.13) и (3.11) выражение (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \tag{3.14}$$

Последнее равенство носит название *разложением определителя третьего порядка по первому столбцу*. Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 3. *Справедлива формула разложения определителя третьего порядка по k–ому столбцу*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} \tag{3.15}$$

и справедлива формула разложения того же определителя по j–ой строчке

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + a_{j3}A_{j3}, \qquad (3.16)$$

где $k, j = \overline{1,3}$.

Доказательство. Обе формулы могут быть проверены непосредственно. Остановимся, например, на рассмотрении разложения определителя по первой строчке. Нам нужно доказать следующую формулу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (3.17)$$

С учётом определения 2 алгебраического дополнения имеет место следующее равенство:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \qquad (3.18)$$

Вычисли дополнительные миноры M_{11}, M_{12} и M_{13}. Справедливы следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (3.21)$$

Таким образом, в силу равенств (3.19)–(3.21) из равенства (3.18) получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &\quad = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &\quad = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\qquad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \qquad (3.22) \end{aligned}$$

Осталось раскрыть все скобки и получить в точности все шесть слагаемых, входящих в определение определителя третьего порядка матрицы (3.2), вычисленных, например, по правилу Саррюса.

Лемма доказана.