0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 11

МАТРИЦЫ

§ 1. Определение матрицы

Дадим определение матрицы размера $m \times n$.

Определение 1. *Матрицей размера $m \times n$ над множеством X называется упорядоченный набор из $m \cdot n$ элементов этого множества, записанных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов. Множество всех матриц размера $m \times n$ обозначается $X^{m\times n}$.*

Замечание 1. Отметим, что при указании размеров матрицы $m \times n$ сначала указывают количество строк (m строк), а потом количество столбцов (n столбцов).

Используется две системы обозначений. В первой системе матрица обозначается следующим образом:

$$A = (a_k^j)_n^m, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

т. е. верхний индекс нумерует строки, а нижний индекс нумерует столбцы. Во второй системе используется обозначение

$$A = (a_{jk})_{mn}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

т. е. первый индекс нумерует строки, а второй индекс нумерует столбцы. Иногда удобно использовать такое обозначение

$$A_{m\times n}$$

В дальнейшем мы будем использовать *операцию извлечения элемента из матрицы*, которую определим следующим образом:

$$A = (a_k^j)_n^m \Rightarrow \{A\}_k^j \overset{\text{def}}{=} a_k^j;$$

$$A = (a_{jk})_{mn} \Rightarrow \{A\}_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} a_{jk}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда все элементы a_k^j матрицы A принадлежат полю $\mathbb{K}$. При этом множество таких матриц обозначается как $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Важные примеры матриц. В дальнейшем мы часто будем пользоваться двумя вариантами матриц — *вектор–строки* и *вектор–столбцы*.

Определение 2. *Матрица A размера $1 \times n$ называется вектор–строкой:*

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Если элементы вектор–строки из поля $\mathbb{K}$, то используется обозначение $\mathbb{K}_n$. Матрица A размера $m \times 1$ называется вектор–столбцом

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}.$$

Если элементы вектор–столбца из поля $\mathbb{K}$ используется обозначение $\mathbb{K}^m$.

§ 2. Различные способы записи матриц

Помимо рассмотренных ранее обозначений вида (1.1) и (1.2) используется еще такие. Пусть задана матрица $A = (a_k^j)_n^m$. Будем обозначать символом A_k при $k = \overline{1,n}$ столбцы матрицы A, а символом A^j при $j = \overline{1,m}$ — строки матрицы A. Тогда для матрицы A можно ввести еще две формы записи:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \left\| A_1\ A_2\ \cdots\ A_n \right\|, \tag{2.1}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}$$

либо

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$A^1 = (a_1^1\, a_2^1\, \cdots\, a_n^1), \quad A^2 = (a_1^2\, a_2^2\, \cdots\, a_n^2), \quad \cdots, \quad A^m = (a_1^m\, a_2^m\, \cdots\, a_n^m).$$

Кроме того, используют так называемые *блочные матрицы*, т. е. такие матрицы, элементы которых сами являются блочными. Например,

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \left\Vert\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right\Vert$$

где

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Специальные матрицы

Среди всех возможных матриц выделяют ряд матриц специального вида.

1. Нулевая матрица. Эта матрица, все элементы которой равны $0 \in \mathbb{K}$.

2. Квадратная матрица. Эта матрица размера $n \times n$, т. е. количество строк равно количеству столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Число n называется порядком квадратной матрицы.

Определение 3. *Главной диагональю называются элементы*

$$a_1^1,\ a_2^2,\ \cdots\ a_n^n$$

матрицы. Побочной диагональю называются элементы

$$a_n^1,\ a_{n-1}^2,\ \cdots,\ a_2^{n-1},\ a_1^n.$$

Следом $\operatorname{tr} A$ *квадратной матрицы* A *называется число*

$$\operatorname{tr} A := a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n.$$

3. Диагональная матрица.

Определение 4. *Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю называется диагональной.*

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_1^1, a_2^2, \cdots, a_n^n).$$

4. Верхнетреугольные матрицы и нижнетреугольные матрицы.

Определение 5. *Матрица A размера $m \times n$ называется верхнетреугольной, если $a_k^j = 0$ при $j > k$, т.е. все элементы лежащие ниже главной диагонали равны нулю.*

Рассмотрим примеры. Сначала приведём общий вид верхнетреугольной матрицы размера 5×3.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & 0 & a_3^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем числа a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_2^2, a_3^2 и a_3^3 — это произвольные числа из поля $\mathbb{K}$. В частности, эти числа могут равняться нулю. Теперь приведём пример верхнетреугольной матрицы размера 3×5.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ 0 & 0 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \end{pmatrix},$$

причем числа a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1, a^{2_2}, a_3^2, a_4^2, a_5^2, a_3^3, a_4^3, a_5^3 произвольные числа из поля $\mathbb{K}$.

Определение 6. *Матрица A размера $m \times n$ называется нижнетреугольной, если $a_k^j = 0$ при $j < k$, т.е. все элементы лежащие выше главной диагонали равны нулю.*

§ 4. Линейные операции над матрицами

Определение 7. *Матрицы A и B называются равными, если их размеры совпадают и все элементы $\{A\}_k^j$ и $\{B\}_k^j$ равны.*

Определение 8. *Суммой двух матриц $A = (a_k^j)_n^m$ и $B = (b_k^j)_n^m$ называется матрица*

$$C = (c_k^j)_n^m, \quad c_k^j = a_k^j + b_k^j, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Произведением матрицы $A = (a^j_k)^m_n$ *на число* $\alpha \in \mathbb{K}$ *называется матрица*

$$C = (c^j_k)^m_n, \quad c^j_k = \alpha a^j_k, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Замечание 2. Иначе говоря,

$$\{A + B\}^j_k = \{A\}^j_k + \{B\}^j_k, \quad \{\alpha A\}^j_k = \alpha \{A\}^j_k, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Имеет место очевидное утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$n \cdot A = \underbrace{A + \cdots + A}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Определение 9. *Введенные операции сложения матриц и умножения матриц на число называются линейными операциями.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Линейные операции над матрицами из* $\mathbb{K}^{m \times n}$ *обладают следующими свойствами*:

1. *коммутативность сложения*:
$$A + B = B + A, \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m \times n};$$
2. *ассоциативность сложения*:
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n};$$
3. *свойство нулевой матрицы:*
$$A + O = A, \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times n},$$
где $O \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *— это нулевая матрица;*
4. *существование противоположной матрицы*:
$$\forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad \exists\, A' \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad A + A' = O;$$
5. *свойство единицы*:
$$1 \cdot A = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times n};$$
6. *ассоциативность умножения на число*:
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$
7. *дистрибутивность относительно сложения матриц*:
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K};$$
8. *дистрибутивность относительно сложения чисел*:
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

§ 5. Произведение матриц

Дадим определение произведения двух матриц.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_p^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_1^j \quad a_2^j \quad \cdots \quad a_p^j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_p^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_k^1 & \cdots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_k^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1^p & b_2^p & \cdots & b_k^p & \cdots & b_n^p \end{pmatrix},$$

$$\boxed{c_k^j} = \boxed{a_1^j \quad a_2^j \quad \cdots \quad a_p^j} \times \boxed{\begin{matrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ \vdots \\ b_k^p \end{matrix}},$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_k^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_k^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^j & c_2^j & \cdots & \boxed{c_k^j} & \cdots & c_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^m & c_2^m & \cdots & c_k^m & \cdots & c_n^m \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Произведение C матриц A и B.

Определение 10. *Произведением двух матриц* $A = (a_l^j)_p^m$ *и* $B = (b_k^l)_n^p$ *называется матрица* $C = (c_k^j)_n^m$, *элементы которой равны*

$$c_k^j = a_1^j b_k^1 + a_2^j b_k^2 + \cdots + a_p^j b_k^p = \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l. \tag{5.1}$$

Замечание 3. Прежде всего заметим, что

1. произведение $A \cdot B$ определено только для таких матриц A и B, что <u>число столбцов</u> матрицы A равно <u>числу строк</u> матрицы B;

2. вообще говоря, даже для квадратных матриц $A \cdot B \neq B \cdot A$. Например,
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. В отличие от произведения вещественных или комплексных чисел существуют ненулевые матрицы произведение которых равно нулевой матрице, т. е. существуют нетривиальные делители нуля. Например,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 11. *Единичной матрицей* $\mathbb{I}$ *называется квадратная порядка* $p \in \mathbb{N}$ *диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся* $1 \in \mathbb{R}$.
$$\mathbb{I}_p \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами*:

1. *ассоциативность*:
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times s}, \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{s\times p}, \quad C \in \mathbb{K}^{p\times n};$$
2. *дистрибутивность слева*:
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n};$$
3. *дистрибутивность справа*:
$$(B + C)A = B \cdot A + C \cdot A \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n};$$
4. *свойство единичной матрицы*:
$$\mathbb{I}_m \cdot A = A \cdot \mathbb{I}_n = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n},$$
где $\mathbb{I}_n$ *и* $\mathbb{I}_m$ *— единичные матрицы порядков* m *и* n *соответственно;*
5. *Свойство следа*:
$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A) \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad B \in \mathbb{K}^{n\times m}.$$

Доказательство. В доказательстве нуждаются только наиболее сложные утверждения — это утверждения 1 и 5.

Докажем свойство 1.

□ Действительно, пусть

$$A = (a_l^j)_s^m, \quad B = (b_r^l)_p^s, \quad C = (c_k^r)_n^p.$$

Заметим, что $A \cdot B$ — это матрица размера $m \times p$, $(A \cdot B) \cdot C$ — матрица размера $m \times n$. $B \cdot C$ — матрица размера $s \times n$, $A \cdot (B \cdot C)$ — матрица размера $m \times n$. Итак, матрицы $A \cdot (B \cdot C)$ и $(A \cdot B) \cdot C$ одинакового размера $m \times n$. Далее докажем, что

$$\{(A \cdot B) \cdot C\}_k^j = \{A \cdot (B \cdot C)\}_k^j, \quad j \in \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\{(A \cdot B) \cdot C\}_k^j = \sum_{r=1}^{p} \{A \cdot B\}_r^j \, c_k^r = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{s} a_l^j b_r^l \right) c_k^r =$$
$$= \sum_{l=1}^{s} a_l^j \left(\sum_{r=1}^{p} b_r^l c_k^r \right) = \sum_{l=1}^{s} a_l^j \, \{B \cdot C\}_k^l = \{A \cdot (B \cdot C)\}_k^j. \quad \boxtimes$$

Докажем свойство 5.

□ Действительно, пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Прежде всего заметим, что $A \cdot B \in \mathbb{K}^{m \times m}$ и $B \cdot A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Согласно определению 3 следа имеет место цепочка равенств

$$\mathrm{tr}\,(A \cdot B) = \sum_{j=1}^{m} \{A \cdot B\}_j^j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_k^j b_j^k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_j^k a_k^j =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j^k a_k^j = \sum_{k=1}^{n} \{B \cdot A\}_k^k = \mathrm{tr}\,(B \cdot A). \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Нетрудно проверить, что множество $\mathbb{K}^{m \times n}$ является некоммутативным кольцом с единицей относительно операции «+» сложения матриц и операции «·» умножения матриц.

Замечание 5. Отметим, что для квадратных матриц $A \subset \mathbb{K}^{m \times m}$ можно определить степень A^n при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$A^0 = \mathbb{I}, \quad A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ раз}}.$$

Кроме того, если $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_n$ — это полином над полем $\mathbb{K}$, то можно определить матричный полином

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_1 A^1 + a_n A^0.$$

§ 6. Структура произведения матриц

Для дальнейшего нам нужно проанализировать структуру произведения двух матриц. Пусть $A = (a^j_l)^m_p \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B = (b^l_k)^p_n \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Рассмотрим произведение $C = A \cdot B = (c^j_k)^m_n \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$c^j_k = \sum_{l=1}^{p} a^j_l b^l_k.$$

Представим матрицы A, B и C в следующем виде

$$A = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\|, \quad B = \|B_1, B_2, \cdots, B_n\|, \quad C = \|C_1, C_2, \cdots, C_n\|,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix}, \cdots, A_p = \begin{pmatrix} a^1_p \\ a^2_p \\ \vdots \\ a^m_p \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b^1_1 \\ b^2_1 \\ \vdots \\ b^p_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b^1_2 \\ b^2_2 \\ \vdots \\ b^p_2 \end{pmatrix}, \cdots, B_n = \begin{pmatrix} b^1_n \\ b^2_n \\ \vdots \\ b^p_n \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} c^1_1 \\ c^2_1 \\ \vdots \\ c^m_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c^1_2 \\ c^2_2 \\ \vdots \\ c^m_2 \end{pmatrix}, \cdots, C_n = \begin{pmatrix} c^1_n \\ c^2_n \\ \vdots \\ c^m_n \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$C_k = \begin{pmatrix} c^1_k \\ c^2_k \\ \vdots \\ c^m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p} a^1_l b^l_k \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a^2_l b^l_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a^m_l b^l_k \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a^1_l b^l_k \\ a^2_l b^l_k \\ \vdots \\ a^m_l b^l_k \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a^1_l \\ a^2_l \\ \vdots \\ a^m_l \end{pmatrix} b^l_k =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} A_l b^l_k = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\| \cdot \begin{pmatrix} b^1_k \\ b^2_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\| \cdot B_k =$$

$$= A \cdot B_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.1)$$

Теперь представим матрицы A, B и C в следующем виде:

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^m \end{Vmatrix},$$

$$A^1 = \left(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_p^1\right), \quad A^2 = \left(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_p^2\right), \ldots, A^m = \left(a_1^m, a_2^m, ..., a_p^m\right),$$

$$B^1 = \left(b_1^1, b_2^1, \ldots, b_n^1\right), \quad B^2 = \left(b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2\right), \ldots, B^p = \left(b_1^p, b_2^p, ..., b_n^p\right),$$

$$C^1 = \left(c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1\right), \quad C^2 = \left(c_1^2, c_2^2, \ldots, c_n^2\right), \ldots, C^m = \left(c_1^m, c_2^m, ..., c_n^m\right).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$C^j = \left(\sum_{l=1}^p a_l^j b_1^l, \sum_{l=1}^p a_l^j b_2^l, \ldots, \sum_{l=1}^p a_l^j b_n^l\right) = \sum_{l=1}^p \left(a_l^j b_1^l, a_l^j b_2^l, \ldots, a_l^j b_n^l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^p a_l^j \left(b_1^l, b_2^l, \ldots, b_n^l\right) = \sum_{l=1}^p a_l^j B^l =$$

$$= \left(a_1^j, a_2^j, ..., a_p^j\right) \cdot \begin{Vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{Vmatrix} = A^j \cdot \begin{Vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{Vmatrix} = A^j \cdot B \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}. \tag{6.2}$$

§ 7. Обратная матрица

Определение 12. *Квадратная матрица A^{-1} порядка $n \in \mathbb{N}$ называется обратной к матрице A порядка n, если*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

Замечание 6. Очевидно, что не все ненулевые квадратные матрицы имеют обратную.

Квадратные матрицы обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Единичная матрица $\mathbb{I}_n$ обратима и $\mathbb{I}_n^{-1} = \mathbb{I}_n$.

☐ Действительно,

$$\mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Если матрица A обратима, то обратная матрица A^{-1} единственна.

☐ Действительно, пусть нет и

$$B \cdot A = A \cdot B = \mathbb{I}_n, \quad C \cdot A = A \cdot C = \mathbb{I}_n.$$

Тогда в силу ассоциативности умножения справедлива следующая цепочка равенств:

$$B = \mathbb{I}_n \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C \cdot \mathbb{I}_n = C. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. Если матрицы A и B обратимы, то обратимо и их произведение $A \cdot B$, причем

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

□ Действительно, справедливы две цепочки равенств

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = \mathbb{I}_n,$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot \mathbb{I}_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n. \boxtimes$$

Свойство 4. Если матрица A обратима, то обратима и матрица A^{-1}, причем $(A^{-1})^{-1} = A$.

□ Действительно, это следствие исходного определения

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n. \quad \boxtimes$$

Обратная матрица для матриц второго порядка. Получим явную формулу для обратной матрицы к матрице второго порядка, имеющей следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Дадим определение.

Определение 13. *Определителем* $\det A$ *матрицы* A *размера* 2×2 *вида* (7.1) *называется число*

$$\det A := ad - bc.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Матрица A вида* (7.1) *обратима тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$, тогда предъявим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $\det A = ad - bc = 0$. Без ограничения общности можно считать, что найдется такое число $\lambda \in \mathbb{K}$, что

$$b = \lambda a, \quad d = \lambda c.$$

Тогда матрица A примет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица такого вида обратима, т. е. существует такая матрица B

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

что

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{I}_2.$$

Раскроем выражение

$$C := A \cdot B$$

по столбцам C_1 и C_2 матрицы $C = \|C_1, C_2\|$.

□ Действительно,

$$C_1 = A \cdot B_1 = A \cdot \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} b_1^1 + \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{pmatrix} b_1^2 = (b_1^1 + \lambda b_1^2) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

$$C_2 = A \cdot B_2 = A \cdot \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} b_2^1 + \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{pmatrix} b_2^2 = (b_2^1 + \lambda b_2^2) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Таким образом, с одной стороны, столбцы C_1 и C_2 матрицы C являются пропорциональными. С другой стороны,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и нетрудно убедиться, что столбцы

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не являются пропорциональными.

□ Действительно, предположим найдется такое число $\gamma \in \mathbb{K}$, что, например,

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \gamma = 0, \quad 0 = 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что столбцы единичной матрицы не пропорциональны. ⊠

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 8. Транспонированная матрица

Определение 14. *Матрицей транспонированной к матрице* $A = (a_k^j)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *называется матрица* $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *с элементами*

$$\left\{A^T\right\}_j^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A\}_k^j .$$

ПРИМЕР 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонированные матрицы обладают некоторым набором свойств, которые мы сейчас приведём.

Свойство 1. Линейность.

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$

Свойство 2. Инволютивность.

$$\left(A^T\right)^T = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n};$$

Свойство 3. Транспонирование произведения матриц.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{p\times n};$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left\{(AB)^T\right\}_k^j = \{AB\}_j^k = \sum_{l=1}^{p} a_l^k b_j^l =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \left\{A^T\right\}_k^l \left\{B^T\right\}_l^j = \sum_{l=1}^{p} \left\{B^T\right\}_l^j \left\{A^T\right\}_k^l = \left\{B^T A^T\right\}_k^j .$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Транспонирование обратной матрицы. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ обратима, то

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Доказательство.

Имеют место равенства

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}_n \Rightarrow (A^{-1}A)^T = (AA^{-1})^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n.$$

Поэтому в силу свойства 3 имеем

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = \mathbb{I}_n.$$

Свойство доказано.

§ 9. Симметричные и кососимметричные матрицы

Определение 15. *Квадратная матрица называется симметричной, если $A^T = A$. Квадратная матрица A называется кососимметричной, если $A^T = -A$.*

ПРИМЕР 2. Симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}: \quad A^T = A;$$

кососимметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}: \quad A^T = -A;$$

Замечание 7. Из условия $A^T = -A$ вытекает, что $a_j^j = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, где n — это порядок квадратной матрицы $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

□ Действительно, имеем

$$\{A^T\}_j^j = a_j^j, \quad -\{A\}_j^j = -a_j^j, \quad \{A^T\}_j^j = -\{A\}_j^j \Rightarrow a_j^j = -a_j^j \Rightarrow a_j^j = 0. \quad \boxtimes$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Любая квадратная матрица A может быть единственным образом представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц.*

Доказательство.

Прежде всего заметим, что имеет место равенство

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} =: A_1 + A_2.$$

Очевидно,

$$A_1^T = \frac{A^T + A}{2} = A_1, \quad A_2^T = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A - A^T}{2} = -A_2.$$

Докажем, что указанное разложение единственно.

□ Действительно, предположим, что имеет место двойственное разложение

$$A = A_1 + A_2 = B_1 + B_2,$$

где

$$A_1^T = A_1, \quad A_2^T = -A_2, \quad B_1^T = B_1, \quad B_2^T = -B_2.$$

Тогда

$$C := A_1 - B_1 = A_2 - B_2,$$

причем левая часть равенства — это симметричная матрица, а правая часть — это кососимметричная матрица. Заметим, что матрица C одновременно симметричная и кососимметричная матрица. Следовательно,

$$C = C^T = -C \Rightarrow 2C = 0 \Rightarrow C = O. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 10. Матричная модель поля комплексных чисел

Рассмотрим множество матриц

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

На множестве Z как подмножестве множества всех вещественных квадратных матриц 2×2 определены две операции — это операции сложения матриц «$+$» и умножения матриц «$\cdot$». Покажем, что множество Z относительно этих двух операций является одной из возможных моделей поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Наблюдение 1. Прежде всего согласно определению операции «$+$» справедливо равенство

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = x\mathbb{I}_2 + y\mathbb{J}_2,$$

где

$$\mathbb{I}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вывод 1. На множестве Z определены операции «$+$» и «$\cdot$» и во множестве Z имеется «единица» — $\mathbb{I}_2$.

Наблюдение 2. Рассмотрим отдельно матрицу

$$\mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\mathbb{J}_2 \cdot \mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_2.$$

Вывод 2. Во множестве Z есть «мнимая единица» — $\mathbb{J}_2$.

Наблюдение 3. Пусть заданы две матрицы

$$Z_1 = x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2, \quad Z_2 = x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2.$$

Тогда, с одной стороны,

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1)\mathbb{I}_2 + (y_1 + y_2)\mathbb{J}_2.$$

С другой стороны,

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2) \cdot (x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2) = \\ = x_1x_2\mathbb{I}_2\mathbb{I}_2 + x_1y_2\mathbb{I}_2\mathbb{J}_2 + y_1x_2\mathbb{J}_2\mathbb{I}_2 + y_1y_2\mathbb{J}_2\mathbb{J}_2 = \\ = (x_1x_2 - y_1y_2)\,\mathbb{I}_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathbb{J}_2.$$

Вывод 4. Операции «+» и «·» являются внутренними операциями во множестве Z, т.е. не выводят за рамки множества Z.

Наблюдение 4. На множестве Z определены операции вычитания и деления на ненулевую матрицу.

□ Действительно, пусть

$$Z_1 = x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2, \quad Z_2 = x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2.$$

Тогда уравнение

$$Z_1 + Z_3 = Z_2$$

имеет единственное решение $Z_3 = (x_2 - x_1)\mathbb{I}_2 + (y_2 - y_1)\mathbb{J}_2 \in Z$.

Пусть $Z_1 \neq O$, тогда уравнение

$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2$$

имеет единственное решение следующего вида:

$$Z_4 = Z_1^{-1}Z_2, \quad Z_1^{-1} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \in Z \Rightarrow Z_4 \in Z.$$

Вывод 4. Множество Z является полем.

Наблюдение 5. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно отождествить со множеством

$$Z_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x\mathbb{I}_2 + 0\mathbb{J}_2,\ x \in \mathbb{R} \right\} \subset Z.$$

Вывод 5. Поле вещественных чисел является подполем множества Z.

Лемма 2. *Множество матриц $Z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ является полем комплексных чисел.*

Замечание 8. Заметим, что операции комплексного сопряжения $z \in \mathbb{C} \to \overline{z} \in \mathbb{C}$ в поле Z соответствует операция транспонирования матрицы:

$$Z = x\mathbb{I}_2 + y\mathbb{J}_2 \to Z^T = x\mathbb{I}_2^T + y\mathbb{J}_2^T = x\mathbb{I}_2 - y\mathbb{J}_2.$$

Операции взятия модуля комплексного числа

$$z = x + iy \to |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

соответствует операция

$$Z = x\mathbb{I}_2 + y\mathbb{J}_2 \to |Z| := \sqrt{\det Z} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Замечание 9. Заметим, что в поле $\mathbb{C}$ имело место равенство

$$z\overline{z} = |z|^2 1.$$

Аналогичным образом имеем в поле Z

$$ZZ^T = \det Z \mathbb{I}_2.$$