0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 13

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основные определения

Рассмотрим следующую систему m–уравнений относительно n–неизвестных в поле $\mathbb{K}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1^1 x^1 + a_2^1 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m + \cdots + a_n^m x^n = b^m. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Введём *основную матрицу системы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \cdots, A_n\|, \tag{1.2}$$

столбец неизвестных X, столбец правой части B

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

и *расширенную матрицу системы* $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{array} \right) = \|A_1, A_2, \cdots, A_n, B\| = \|A, B\|. \tag{1.4}$$

С учетом введённых матричных обозначений (1.2) и (1.3) систему уравнений (1.1) можно записать в компактной матричной форме

$$AX = B \quad \text{или} \quad A_1 x^1 + \cdots + A_n x^n = B. \tag{1.5}$$

Дадим определения.

Определение 1. *Столбец* $X_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)^T$ *называется решением системы уравнений* (1.5), *если после его подстановки в систему уравнений* (1.5) *получиться тождество.*

Определение 2. *Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Система уравнений называется несовместной, если она не имеет решений.*

§ 2. Однородные системы

Определение 3. *Система линейных уравнений называется однородной, если правая часть уравнения* (1.5) *равна нулевому столбцу* $B = O$:

$$AX = O \quad \text{или} \quad A_1 x^1 + \cdots + A_n x^n = O, \quad O = (0, \cdots, 0)^T. \qquad (2.1)$$

Замечание 1. Очевидно, что однородная система уравнений (2.1) всегда совместна, поскольку всегда имеет *тривиальное решение*

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однако, однородная система уравнений может иметь нетривиальное решение. Например, система уравнений

$$x^1 + x^2 = 0$$

имеет нетривиальное решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 1. *Если* X_1 *и* X_2 *— это два решения однородной системы уравнений* (2.1), *то* *любая* *их линейная комбинация*

$$X_3 = c^1 X_1 + c^2 X_2, \quad c^1, c^2 \in \mathbb{K}$$

также будет решением системы (2.1).

Доказательство.

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O \Rightarrow A(c^1 X_1 + c^2 X_2) = c^1 AX_1 + c^2 AX_2 = O.$$

Теорема доказана.

Определение 4. *Фундаментальное семейство решений* (*ФСР*) *однородной системы* (2.1) *— это такое семейство линейно независимых решений–столбцов* $X_1, X_2, \ldots, X_s$, *что любое*

решение данной системы можно представить в виде их линейной комбинации:
$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \dots + c^s X_s, \tag{2.2}$$
где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — *это произвольные числа. Выражение* (2.2) *называется общим решением системы* (2.1).

Замечание 2. Число $s \in \mathbb{N}$ линейно независимых решений однородной системы (2.1) как будет показано ниже $0 \leqslant s \leqslant n$. Например, такая однородная система
$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0$$
имеет следующие n линейно независимых решений
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 5. *Матрица* Φ, *столбцами которой являются столбцы* ФСР, *называется фундаментальной матрицей однородной системы* (2.1):
$$\Phi = \|X_1, X_2, \dots, X_s\|. \tag{2.3}$$
Общее решение X *однородной системы* (2.1) *выражается через фундаментальную матрицу* Φ *следующим образом*:
$$X = \sum_{l=1}^{s} c^l X_l = \Phi \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$
где $c^1, \dots, c^s$ — *это произвольные числа из* $\mathbb{K}$.

§ 3. Неоднородные системы

Определение 6. *Система уравнений*
$$A \cdot X = B \neq O \tag{3.1}$$
называется неоднородной.

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Общее решение неоднородной системы* (3.1) *представимо в следующем виде*:
$$X = Y + X_0, \tag{3.2}$$

где Y — какое–либо решение неоднородной системы уравнений (3.1), *а X_0 — это общее решение соответствующей однородной системы уравнений $AX_0 = O$.*

Доказательство.

Действительно, пусть Y — это какое либо решение уравнения

$$AY = B,$$

тогда система уравнений (3.1) примет следующий эквивалентный вид:

$$AX = B \Leftrightarrow AX = AY \Leftrightarrow A(X - Y) = O \Leftrightarrow X - Y = X_0,$$

где X_0 — это общее решение соответствующей однородной системы уравнений.

Теорема доказана.

Следствие. *Общее решение неоднородной системы уравнений* (3.1) *представимо в следующем виде*:

$$X = Y + c^1 X_1 + \cdots + c^s X_s, \tag{3.3}$$

где $X_1, \ldots, X_s$ — это ФСР соответствующей однородной системы и $c^1, \cdots, c^s \in \mathbb{K}$ — это произвольные числа.

§ 4. Системы уравнений упрощённого вида

Определение 7. *Неизвестная x^k называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.*

Определение 8. *Система линейных уравнений называется системой упрощённого вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В случае, если некоторое уравнение содержит более одной базисной неизвестной, то выбирается одна из них.*

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^4 = 0 \\ x^3 + x^4 = 0 \end{cases}.$$

В этой системе уравнений неизвестные x^1 и x^2 входят только в первое уравнение, а неизвестная x^3 только во второе. Поэтому при выборе базисных переменных у нас имеется произвол. Мы можем выбрать в качестве базисных либо x^1 и x^3 либо x^2 и x^3. Переменная x^4 базисной не является, поскольку входит как в первое уравнение, так и во второе уравнение.

Определение 9. *Неизвестные, не относящиеся к выбранным базисным, называются свободными.*

Замечание 3. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — это все неизвестные. Если $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — это базисные, то $x^{r+1}, \ldots, x^n$ — это свободные переменные.

Продолжение примера 2. Если мы выбрали в качестве базисных переменных переменные x^1 и x^3, то свободные переменные —

это x^2 и x^4. Если мы выбрали в качестве базисных переменные x^2 и x^3, то свободные переменные — это x^1 и x^4.

С п е ц и а л ь н а я л и н е й н а я о д н о р о д н а я с и с т е м а у р а в н е н и й у п р о щ ё н н о г о в и д а. Рассмотрим такую систему уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{x^1} & & & + & a^1_{r+1}x^{r+1} & + & \cdots & + & a^1_n x^n & = & 0, \\
& \boxed{x^2} & & + & a^2_{r+1}x^{r+1} & + & \cdots & + & a^2_n x^n & = & 0, \\
\multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\
& & \boxed{x^r} & + & a^r_{r+1}x^{r+1} & + & \cdots & + & a^r_n x^n & = & 0.
\end{array}
\right.
\tag{4.1}
$$

Матричная форма записи системы уравнений (4.1) имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & a^1_{r+1} & \cdots & a^1_n \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a^2_{r+1} & \cdots & a^2_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a^r_{r+1} & \cdots & a^r_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}.
$$

Система линейных уравнений (4.1) удобна тем, что её общее решение легко явно выписать.

□ Действительно, в качестве базисных переменных в данном случае удобно выбрать переменные $x^1, x^2, \ldots, x^r$, а в качестве свободных переменных соответственно выбираем все оставшиеся переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Даже если во всех уравнениях системы (4.1) коэффициенты при некоторой переменной x^s $(s \in \overline{r+1, n})$ равны нулю мы все равно относим эту переменную к свободной. Теперь перепишем систему (4.1) в следующем виде:

$$
\left\{
\begin{array}{ccl}
x^1 & = & -a^1_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^1_n x^n, \\
x^2 & = & -a^2_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^2_n x^n, \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
x^r & = & -a^r_{r+1}x^{r+1} - \cdots - a^r_n x^n.
\end{array}
\right.
\tag{4.2}
$$

Теперь мы можем построить общее решение системы (4.2). С этой целью придадим свободным переменным $x^{r+1}, \ldots, x^n$ соответственно произвольные значения $c^1, \ldots, c^{n-r} \in \mathbb{K}$ и представим общее решение в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1}c^1 - \dots - a^1_n c^{n-r} \\ -a^2_{r+1}c^1 - \dots - a^2_n c^{n-r} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1}c^1 - \dots - a^r_n c^{n-r} \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Проверим, что столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми. Действительно, рассмотрим линейную комбинацию

$$c^1 X_1 + \dots + c^{n-r} X_{n-r} = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a^1_{r+1}c^1 - \dots - a^1_n c^{n-r} \\ -a^2_{r+1}c^1 - \dots - a^2_n c^{n-r} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1}c^1 - \dots - a^r_n c^{n-r} \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c^1 = 0, \ldots, c^{n-r} = 0.
$$

Следовательно, фундаментальная матрица Φ системы линейных однородных уравнений (4.1) имеет следующий явный вид:

$$
\Phi = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} & -a^1_{r+2} & \cdots & -a^1_n \\ -a^2_{r+1} & -a^2_{r+2} & \cdots & -a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^r_{r+1} & -a^r_{r+1} & \cdots & -a^r_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},
$$

где серым цветом выделена единичная матрица размера $n - r$. ☒

Специальная линейная неоднородная система уравнений. Рассмотрим теперь неоднородную линейную систему уравнений специального вида

$$
\left\{ \begin{array}{l} x^1 + a^1_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^1_n x^n = b^1, \\ x^2 + a^2_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^2_n x^n = b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^r + a^r_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^r_n x^n = b^r. \end{array} \right. \tag{4.4}
$$

В силу результата теоремы 2 общее решение системы уравнений (4.4) нужно искать в следующем виде:

$$
X = Y + X_0,
$$

где Y — это частное решение неоднородной системы уравнений (4.4), а X_0 — это общее решение соответствующей однородной системы уравнений. Заметим, что

$$Y = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$X = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую неоднородную систему уравнений упрощённого типа:

$$\begin{cases} x^1 + 3x^3 + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5; \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Серым цветом выделены значения свободных неизвестных.

§ 5. Метод Гаусса–Жордана

В этом разделе мы рассмотрим на конкретном примере метод Гаусса–Жордана приведения системы линейных уравнений (вообще говоря, неоднородной) к специальному упрощённому виду. Прежде всего определим так называемые элементарные преобразования системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

приводящую её к эквивалентной системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} k_1^1x^1 + k_2^1x^2 + \dots + k_n^1x^n = d^1, \\ k_1^2x^1 + k_2^2x^2 + \dots + k_n^2x^n = d^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_1^px^1 + k_2^px^2 + \dots + k_n^px^n = d^p. \end{array}\right.$$

Элементарные преобразования системы линейных уравнений.

Тип 1. *Перестановка двух уравнений местами*;

Тип 2. *Умножение любого уравнения системы на ненулевое число*;

Тип 3. *Прибавление к любому уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число*;

Тип 4. *Удаления из системы уравнений уравнения вида*

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Любую систему линейных уравнений элементарными преобразованиями можно привести к упрощённой системе уравнений вида* (4.4).

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 3. Найти общее решение неоднородной системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x^1 & + & x^2 & + & 2x^3 & + & x^4 & = & 1, \\ 2x^1 & + & 3x^2 & + & 0x^3 & + & x^4 & = & 0, \\ 3x^1 & + & 4x^2 & + & 2x^3 & + & 2x^4 & = & 1. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Решение. Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right). \tag{5.3}$$

Шаг 1. Вычтем из третьей строки сумму первой и второй. В результате получим матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.4}$$

Шаг 2. Вычеркнем третью строчку. Получим матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \tag{5.5}$$

Шаг 3. Вычтем из второй строчки первую умноженную на 2. В результате получим

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right). \tag{5.6}$$

Шаг 4. Вычтем из первой строчки вторую. В результате получим

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right). \tag{5.7}$$

Итак, мы пришли к следующей упрощённой системе двух неоднородных уравнений

$$\begin{array}{ccccccccc} x^1 & = & - & 6x^3 & - & 2x^4 & + & 3, \\ x^2 & = & & 4x^3 & + & x^4 & - & 2 \end{array} \tag{5.8}$$

Итак, переменные x^1 и x^2 — базисные, поэтому оставшиеся переменные x^3 и x^4 — свободные. Выпишем теперь общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6c^1 - 2c^2 \\ -2 + 4c^1 + c^2 \\ c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

§ 6. Матрицы элементарных преобразований

В этом разделе мы предложим матрицы 4–х элементарных преобразований. Пусть

$$A = (a_k^j)_n^m, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|.$$

1. Перемена местами двух строк. Обозначим через P_{sp} преобразование, заключающееся в перемене местами s–й и p–й строк матрицы A. матрица P_{sp} является квадратной размера $m \times m$. Без ограничения общности будем считать, что $s < p$.

Матрица P_{sp} имеет следующий вид:

$$P_{sp} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^p \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^{p-1} \\ I^s \\ I^{p+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

где символом I^j при $j = \overline{1,m}$ мы обозначили вектор–строчку длины m, у которой на j-ом месте находится 1, а все оставшиеся элементы строчки равны нулю

$$I^j = \|0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0\| \,.$$

□ Действительно,

$$A^{'j} = P^j_{sp} A, \quad A^{'j} = I^j A = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s \quad \text{и} \quad j \neq p;$$

$$A^{'s} = P^s_{sp} A = \sum_{k=1}^{m} I^p_k A^k = A^p, \quad A^{'p} = P^p_{sp} A = \sum_{k=1}^{m} I^s_k A^k = A^s.$$

Таким образом, умножая матрицу A слева на матрицу P_{sp} мы приходим к матрице $A^{'}$, у которой строчки s и p поменялись местами:

$$A^{'} = P_{sp} A, \quad A^{'} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^p \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^s \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}. \quad \boxtimes$$

2. Умножение произвольной строчки на ненулевое число. Матрица этого преобразования $P_{\beta s}$ представляет собой квадратную матрицу размера $m \times m$, которая отличается от единичной матрицы того же размера только наличием у s–й строчки на s–ом месте вместо единицы число $\beta \in \mathbb{K}$, т. е. имеет следующий вид:

$$P_{\beta s} = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ \beta \cdot I^s \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

□ Действительно,

$$A'^j = P^j_{\beta s} A, \quad A'^j = I^j A = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s;$$

$$A'^s = P^s_{\beta s} A = \beta I^s A = \beta \sum_{k=1}^{m} I^s_k A^k = \beta A^s.$$

Таким образом, умножая матрицу A слева на матрицу $P_{\beta s}$ мы приходим к матрице A', у которой s–я строчка умножается на число β :

$$A' = P_{\beta s} A, \quad A' = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ \beta A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|. \quad \boxtimes$$

3. Прибавление к произвольной строчке другую строчку, умноженную на произвольное число. Матрица этого преобразования $P_{s+\beta p}$ представляет собой квадратную матри-

цу размера $m \times m$, имеющую следующий вид:

$$P_{s+\beta p} = \left\| \begin{array}{c} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^s + \beta I^p \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^{p-1} \\ I^p \\ I^{p+1} \\ \vdots \\ I^m \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

$\square$ Действительно,

$$A^{'j} = P^j_{s+\beta p} A = I^j A = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \neq s;$$

$$A^{'s} = P^s_{s+\beta p} A = (I^s + \beta I^p)\, A = \sum_{k=1}^{m} (I^s_k + \beta I^p_k)\, A^k = A^s + \beta A^p.$$

Таким образом, умножая матрицу A слева на матрицу $P_{s+\beta p}$ мы приходим к матрице $A^{'}$, которая имеет следующий вид:

$$A^{'} = P_{s+\beta p} A, \quad A^{'} = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s + \beta A^p \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|, \quad A = \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^{p-1} \\ A^p \\ A^{p+1} \\ \vdots \\ A^m \end{array} \right\|. \quad \boxtimes$$

4. Вычёркивание нулевой строчки. Пусть у матрицы A s–я строчка нулевая. Тогда матрица P_{s-0} операции вычеркивания s–й строчки является матрицей размера $(m-1) \times m$, имеющая следующий

вид:

$$P_{s-0} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{s-1} \\ I^{s+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix}. \tag{6.4}$$

□ Действительно,

$$A^{'j} = P^j_{s-0}A = I^j A = \sum_{k=1}^{m} I^j_k A^k = A^j \quad \text{при} \quad j \in \overline{1, s-1} \cup \overline{s+1, m}.$$

Таким образом, умножая матрицу A слева на матрицу P_{s-0} мы приходим к матрице $A^{'}$ размера $(m-1) \times n$, которая имеет следующий вид:

$$A^{'} = P_{s-0}A, \quad A^{'} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{s-1} \\ A^s \\ A^{s+1} \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть A — некоторая матрица размера $m \times n$,*

$$R(A) := R \cdot A$$

— это матрица, полученная из A последовательностью матриц элементарных преобразований R. Тогда

$$R(A) = R(\mathbb{I}_m) \cdot A, \tag{6.5}$$

где $\mathbb{I}_m$ — это единичная матрица размера $m \times m$, $R(\mathbb{I}_m)$ — это матрица размера $p \times n$ при $1 \leqslant p \leqslant m$, полученная из единичной матрицы в результате применения последовательности матриц элементарных преобразований R. В том случае, если в последовательность R не входит элементарные преобразования четвертого типа матрица $R(\mathbb{I})$ размера $m \times m$ и обратима.

Доказательство.

Для доказательства заметим, что в силу ассоциативности умножения матриц

$$R(A) = R \cdot A = R \cdot (\mathbb{I}_m \cdot A) = (R \cdot \mathbb{I}_m) \cdot A = R\left(\mathbb{I}_m\right) \cdot A.$$

Можно проверить, что все элементарные преобразования типов 1–3 обратимы. И, следовательно, матрица R обратима тоже.

Теорема доказана.

§ 7. Вычисление обратной матрицы

Пусть R — это последовательность элементарных преобразований, приводящие $m \times m$ матрицу A к единичной матрице $\mathbb{I}_m$:

$$R \cdot A = R \cdot (\mathbb{I}_m \cdot A) = (R \cdot \mathbb{I}_m) \cdot A = \\ = R(\mathbb{I}_m) \cdot A = \mathbb{I}_m \Leftrightarrow A = R^{-1}(\mathbb{I}_m). \quad (7.1)$$

На практике для вычисления обратной матрице к обратимой матрице A удобно составить $m \times 2m$ матрицу

$$\|A, \mathbb{I}_m\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_m^m & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

и применением последовательности матриц элементарных преобразований строк R привести матрицу A (левый блок матрицы (7.2)) к единичной $\mathbb{I}_m$, тогда в правом блоке мы получим обратную A^{-1}:

$$\|A, \mathbb{I}_m\| \to \left\|\mathbb{I}_m, \mathbb{A}^{-1}\right\|. \quad (7.3)$$

$\square$ Действительно, в силу (7.1) имеем

$$A = R^{-1}(\mathbb{I}_m), \quad R(\mathbb{I}_m) = A^{-1},$$

поэтому

$$\|A, \mathbb{I}_m\| = \left\|R^{-1}(\mathbb{I}_m), \mathbb{I}_m\right\| \Rightarrow \\ \Rightarrow R \cdot \|A, \mathbb{I}_m\| = R \cdot \left\|R^{-1}(\mathbb{I}_m), \mathbb{I}_m\right\| = \|\mathbb{I}_m, R(\mathbb{I}_m)\| = \left\|\mathbb{I}_m, \mathbb{A}^{-1}\right\|. \quad \boxtimes$$

Здесь мы воспользовались следующим утверждением.
Лемма 1. $B \cdot \|A_1|A_2\| = \|B \cdot A_1|B \cdot A_2\|$ *для всех* $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{m\times p}$ *и* $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

Доказательство.

$$C := B \cdot \|A_1|A_2\|, \\ C_k = B \cdot A_{1k}, \quad k = \overline{1, s}, \quad C_l = B \cdot A_{2l}, \quad l = \overline{s+1, s+p}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 4. Вычислить обратную матрицу к

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Р е ш е н и е. Запишем составную матрицу размера 3×6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7.5}$$

Шаг 1. Вычтем из третьей строчки сумму первых двух. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right). \tag{7.6}$$

Шаг 2. Вычтем из второй строчки первую, умноженную на 2. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right). \tag{7.7}$$

Шаг 3. Умножим вторую и третью строчки на -1. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right). \tag{7.8}$$

Шаг 4. Вычтем из третьей строчки вторую. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \tag{7.9}$$

Шаг 5. Прибавим к первой строчке третью умноженную на 3. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right). \tag{7.10}$$

Шаг 6. Прибавим ко второй строчке третью, умноженную на 2. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

Шаг 7. Вычтем из первой строчки вторую, умноженную на 2. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right). \tag{7.12}$$

Шаг 8. Умножим третью строчку на -1. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right). \tag{7.13}$$

Таким образом, обратная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$