Линейная алгебра–4
Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидово пространство

Евклидово пространство (**ЕП**) $\mathbb{E}$ — это вещественное **ЛП**, в котором зафиксирована симметричная положительно определенная билинейная форма $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Значение **БФ** на паре векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ называется скалярным произведением (**СП**) этих векторов и обозначается $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, т.е.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Очевидно, **СП** обладает следующими свойствами:
1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}$: $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{E}$: $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$;
3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
4) $\forall \mathbf{x}\in\mathbb{E}$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$: $(\mathbf{x},\mathbf{x})>0$.

Если в **ЕП** $\mathbb{E}$ выбран некоторый базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, то **СП** векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ выражается через их координаты по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g_{jk}x^jy^k = X_e^TG_eY_e,$$

где $G_e=(g_{jk})$ — симметричная положительно определенная матрица, называемая матрицей Грама или метрическим тензором. Метрический тензор является дважды ковариантным.

Элементы матрицы Грама представляют собой **СП** векторов базиса:

$$g_{jk}=(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j)=g_{kj}.$$

При переходе к новому базису (с помощью матрицы перехода C) матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и матрица любой билинейной формы:

$$G_{e'}=C^TG_eC,\quad g_{j'k'}=c^j_{j'}c^k_{k'}g_{jk}.$$

Поскольку $\det G_e\neq 0$, матрица G_e обратима; обратная матрица G_e^{-1} называется контравариантным метрическим тензором. Элементы матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{jk}. Имеет место соотношение

$$g_{jk}g^{kl}=\delta^l_j.$$

В любом вещественном **ЛП** имеется бесконечно много симметричных положительно определенных **БФ**; поэтому каждое вещественное **ЛП** может быть сделано евклидовым пространством бесконечным числом способов.

Теорема. *Неравенство Коши—Буняковского:*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}:\quad (\mathbf{x},\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Доказательство. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}$ и любого $\alpha\in\mathbb{R}$ имеем:

$$(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})\ge 0\qquad\Longleftrightarrow$$
$$f(\alpha)=\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+2\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})\ge 0.$$

Для того чтобы квадратный трехчлен $f(\alpha)$ принимал только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})\le 0.$$

□

2. Примеры ЕП

1. **ЛП** $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ становится **ЕП**, если для векторов

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\\vdots\\x^n\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\\vdots\\y^n\end{pmatrix}$$

определить **СП** по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=1}^n x^jy^j=X^TY,$$

где X, Y — столбцы, представляющие данные векторы (или, эквивалентно, столбцы координат векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ относительно стандартного базиса).

2. В $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ можно определить **СП** формулой

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=X^TGY,$$

где G — произвольная симметричная положительно определенная матрица.

3. В $\mathbb{R}^{n\times m}(\mathbb{R})$ можно ввести **СП** по формуле

$$(X,Y)=\operatorname{tr}(X^TY).$$

Задача. Докажите.

4. В $\operatorname{Pol}(n,\mathbb{R})$ можно ввести **СП** векторов

$$\mathbf{x}=x(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n,$$
$$\mathbf{y}=y(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_nt^n$$

по формуле

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=0}^n a_jb_j.$$

5. В $\operatorname{Pol}(n,\mathbb{R})$ можно определить **СП** иначе:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\int_\alpha^\beta x(t)y(t)dt.$$

Задача. Докажите.

3. Длины и углы в ЕП

Длиной вектора $\mathbf{x}\in\mathbb{E}$ называется число

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\ge 0.$$

Теорема. *Имеют место соотношения:*
1) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{E}$: $\|\mathbf{x}\|\ge 0$, причем $\|\mathbf{x}\|=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
2) $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{E}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\|\mathbf{x}\|$.
3) $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}$: $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (неравенство треугольника).

Доказательство. Утверждение 1 очевидно.

2. Имеем:

$$\|\alpha\mathbf{x}\|=\sqrt{(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x})}=\sqrt{\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x})}=|\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

3. Имеем:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \\ &\le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \\ &\le \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = \\ &= (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2,\end{aligned}$$

откуда $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. □

Угол между ненулевыми векторами $\mathbf{x},\mathbf{y}$ — это число φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, определяемый из уравнения

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

4. Унитарное пространство

Унитарное пространство **(УП)** $\mathbb{U}$ — это комплексное **ЛП** со скалярным произведением. Однако в комплексном **ЛП** не удается ввести скалярное произведение с помощью симметричной билинейной формы. Действительно, в этом случае аксиомы скалярного произведения оказываются противоречивыми:

$$\begin{aligned}0 \le (i\mathbf{x},i\mathbf{x}) &= i(\mathbf{x},i\mathbf{x}) = \\ &= i(i\mathbf{x},\mathbf{x}) = i^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -(\mathbf{x},\mathbf{x}),\end{aligned}$$

т.е. $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \le 0$.

Скалярное произведение в унитарном пространстве $\mathbb{U}$ можно определить как функцию $\mathbf{G}: V\times V \to \mathbb{C}$, $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$, обладающую следующими свойствами:
1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$;
2) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{U}$: $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$;
3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$: $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$;
4) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{U}$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$: $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$.

Функция $\mathbf{G}$ не является линейной по второму аргументу:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= \overline{(\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{z},\mathbf{x})} = \\ &= \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}+\overline{(\mathbf{z},\mathbf{x})} = (\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}),\end{aligned}$$

однако

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) &= \overline{(\alpha\mathbf{y},\mathbf{x})} = \overline{\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \\ &= \bar\alpha\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})} = \bar\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Функцию $\mathbf{G}$ называют полуторалинейным функционалом (линейным по первому и полулинейным по второму аргументу).

Если в **УП** выбран некоторый базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, то выражение **СП** через координаты векторов имеет вид

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x^j\mathbf{e}_j, y^k\mathbf{e}_k) = x^j\bar y^k g_{jk},$$

где $g_{jk} = (\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$ — матрица Грама (метрический тензор). В матричных обозначениях

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X_e^T G_e \bar Y_e.$$

Закон преобразования метрического тензора при переходе к новому базису усложняется по сравнению с вещественным случаем:

$$\begin{aligned}g_{j'k'} &= (\mathbf{e}_{j'},\mathbf{e}_{k'}) = (c^j_{j'}\mathbf{e}_j,\ c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = \\ &= c^j_{j'}\ \bar c^k_{k'}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\ \bar c^k_{k'} g_{jk}.\end{aligned}$$

В матричных обозначениях

$$G_{e'} = C^T G_e \bar C.$$

Теорема. *Неравенство Коши—Буняковского:*

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U} : |(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 \le (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Доказательство. При $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ неравенство очевидно. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$ таких, что $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ne 0$, и любого $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем:

$$\begin{aligned}0 &\le (\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ &= \alpha(\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \\ &= \alpha\bar\alpha(\mathbf{x},\mathbf{x})+\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+\bar\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \\ &= |\alpha|^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+\bar\alpha\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}+(\mathbf{y},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Это неравенство должно выполняться для всех $\alpha \in \mathbb{C}$, в том числе для $\alpha = t\dfrac{\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}$, где $t \in \mathbb{R}$. Получаем

$$\begin{aligned}&\frac{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2}t^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+t\frac{\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}(\mathbf{x},\mathbf{y})+ \\ &+t\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|(\mathbf{x},\mathbf{y})|}\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})}+(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ge 0,\end{aligned}$$

т.е.

$$f(t) = (\mathbf{x},\mathbf{x})t^2+2|(\mathbf{x},\mathbf{y})|t+(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ge 0$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Это возможно лишь при условии неположительности дискриминанта квадратного трехчлена $f(t)$:

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \le 0.$$

□

В **УП** понятие длины векторов и свойства этого понятия формулируются и доказываются так же, как и в случае **ЕП**. Понятие угла между векторами **УП** не вводится.

Задача. Используя примеры **ЕП**, приведенные в § **??**, в качестве образцов, постройте аналогичные примеры **УП**.

5. Ортогональные векторы

Векторы $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ (или $\in \mathbb{U}$) называются ортогональными $(\mathbf{x}\perp\mathbf{y})$, если $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

Пусть $P \Subset \mathbb{E}$ — **ЛПП** в **ЕП** $\mathbb{E}$ (в **УП** $\mathbb{U}$). Вектор $\mathbf{x}$ называется ортогональным подпространству $P \Subset \mathbb{E}$ $(P \Subset \mathbb{U})$, если он ортогонален любому вектору из P:

$$\mathbf{x}\perp P \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{x}\perp\mathbf{y}\ \forall \mathbf{y} \in P.$$

Обозначение: $\mathbf{x}\perp P$.

Теорема. *1)* $\mathbf{x}\perp\mathbf{x}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2) Если $\mathbf{x} \in P$ *и* $\mathbf{x}\perp P$, *то* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3) Если $\mathbf{y}\perp\mathbf{x}_1,\ \dots,\ \mathbf{y}\perp\mathbf{x}_k$, *то* $\mathbf{y}\perp L(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k)$.
4) Если $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$, *то* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$ *(теорема Пифагора).*
5) Если ненулевые векторы $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_p$ *попарно ортогональны, т.е.* $\mathbf{x}_j\perp\mathbf{x}_k$, $j \ne k$, *то они линейно независимы.*

Доказательство. 1), 2), 3), 4) — докажите самостоятельно.

4. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$, равную нулевому вектору:

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^s \mathbf{x}_s + \dots + \alpha^p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно это равенство на вектор $\mathbf{x}_s$, получаем $\alpha^s = 0$, что и требовалось. □

6. Ортогональные проекторы

Пусть P — **ЛПП** в **ЕП** $\mathbb{E}$ (или в $\mathbb{U}$). Вектор $\mathbf{y}$ называется ортогональной проекцией **(ОП)** вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ на **ЛПП** P, если $\mathbf{y} \in P$ и $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp P$.

Теорема. *Пусть $P \Subset \mathbb{E}$ ($P \Subset \mathbb{U}$). Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$) его **ОП** единственна.*

Замечание. Вопрос о существовании **ОП** будет исследован позже.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ — две различные **ОП** данного вектора $\mathbf{x}$ на **ЛПП** P, т.е.

$$\mathbf{y}_1 \in P, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y}_1 \perp P,$$
$$\mathbf{y}_2 \in P, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y}_2 \perp P.$$

Тогда, очевидно, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in P$ и

$$\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2)}_{\perp P} \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}_{\perp P} \perp P,$$

так что $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$, противоречие. □

Определим оператор $\mathbf{P}$, ставящий в соответствие каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$) его ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ на **ЛПП** P:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Задача. Докажите, что этот оператор линейный.

Теорема. $\mathbf{P}$ — *проектор, т.е.* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{im} \mathbf{P} = P$. Рассмотрим векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ ($\in \mathbb{U}$), $\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \in P = \operatorname{im} \mathbf{P}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{P}^2(\mathbf{x})$. По определению,

$$\mathbf{z} \in P, \quad \mathbf{y} - \mathbf{z} \perp P.$$

Так как $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$, то $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in P$ и поэтому $\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Таким образом,

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{P}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x},$$

т.е. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. □

Таким образом, **ЕП** $\mathbb{E}$ (**УП** $\mathbb{U}$) разлагается в прямую сумму ядра и образа оператора $\mathbf{P}$:

$$\mathbb{E} = \operatorname{im} \mathbf{P} \oplus \ker \mathbf{P}.$$

Ядро оператора $\mathbf{P}$ называется ортогональным дополнением **(ОД)** **ЛПП** $P = \operatorname{im} \mathbf{P}$ и обозначается $P^\perp$. Таким образом, для любого **ЛПП** $P \Subset \mathbb{E}$ имеем

$$\mathbb{E} = P \oplus P^\perp.$$

Теорема. *Ортогональное дополнение $P^\perp$ представляет собой множество всех векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$, каждый из которых ортогонален подпространству P:*

$$P^\perp = \Big\{ \mathbf{y} \in \mathbb{E} : \mathbf{y} \perp P \Big\}.$$

*$P^\perp$ также является **ЛПП** в $\mathbb{E}$, причем*

$$\dim P^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim P.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\mathbf{P}$ — оператора оптогонального проектирования на **ЛПП** P; тогда

$$\mathbf{y} \in P^\perp \iff \mathbf{y} \in \ker \mathbf{P} \iff \mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$
$$\iff \mathbf{z} \in P, \ \mathbf{y} - \mathbf{z} \perp P \iff \mathbf{y} \perp P.$$

Завершите доказательство самостоятельно. □

Если $P \Subset \mathbb{E}$, то $P^\perp \Subset \mathbb{E}$, $\mathbb{E} = P \oplus P^\perp$, и для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ имеется единственное разложение

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{y}}_{\in P} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\in P^\perp} = \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in P} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in P^\perp}.$$

Эта формула доказывает существование ортогональной проекции $\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$ любого вектора $\mathbf{x}$ на любое **ЛПП** P.

7. Ортонормированные базисы

Базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в **ЕП (УП)** называется ортонормированным **(ОНБ)**, если векторы этого базиса попарно ортогональны:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}.$$

Очевидно, $\|\mathbf{e}_j\| = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Матрица Грама ортонормированного базиса является единичной матрицей. Выражение **СП** через координаты векторов относительно **ОНБ** имеет вид

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j$$

в **ЕП** и

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x^j \bar{y}^j$$

в **УП**.

Существование **ОНБ** в **ЕП** не вызывает сомнений: каждая симметричная положительно определенная билинейная форма обладает каноническим базисом, который и является **ОНБ**. В **УП** существование **ОНБ** нуждается в доказательстве.

Пусть $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$ (в **УП** $\mathbb{U}$). Построим **ОНБ** в $\mathbb{E}$ ($\mathbb{U}$), используя следующий алгоритм (процесс ортогонализации Грама—Шмидта).

Положим

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|}; \quad \|\mathbf{e}_1\| = 1.$$

Построим вектор

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 - \operatorname{pr}_{L(\mathbf{e}_1)} \mathbf{f}_2,$$

где символом pr_P обозначен ортогональный проектор на подпространство P. Положим

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|};$$

Очевидно,

$$\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{e}_1, \quad \|\mathbf{g}_2\| = 1.$$

Считая, что векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}$ уже найдены, продолжим процесс. Построим вектор

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{f}_k - \operatorname{pr}_{L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})} \mathbf{f}_k,$$

который, очевидно, ортогонален подпространству $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1})$, и положим

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\|\mathbf{g}_k\|}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_2, \ \dots, \ \mathbf{e}_k \perp \mathbf{e}_{k-1}, \ \|\mathbf{e}_k\| = 1.$$

Получим формулу для вычисления $\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in\mathbb{E}$ при условии, что векторы $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ попарно ортогональны. Согласно определению,

$$\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}\in L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k),$$
$$\mathbf{x}-\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}\perp L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k).$$

Таким образом,

$$\mathrm{pr}_{L(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)}\mathbf{x}=\alpha^1\mathbf{e}_1+\dots+\alpha^k\mathbf{e}_k;$$

найдем коэффициенты этой линейной комбинации. Для любого вектора $\mathbf{e}_j$, $1\le j\le k$, имеем

$$\Big(\mathbf{x}-(\alpha^1\mathbf{e}_1+\dots+\alpha^k\mathbf{e}_k),\ \mathbf{e}_j\Big)=0,$$

откуда

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)-\sum_{s=1}^{k}\alpha^s(\mathbf{e}_s,\mathbf{e}_j)=0.$$

В силу попарной ортогональности векторов $\mathbf{e}_j$ в сумме остается лишь одно ненулевое слагаемое, в котором $s=j$, т.е.

$$\alpha^j=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_j)}{(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_j)}.$$

Если векторы $\mathbf{e}_j$ нормированы (т.е. $\|\mathbf{e}_j\|=1$), то знаменатель в этой формуле обращается в 1, и мы получаем

$$\alpha^j=(\mathbf{x},\mathbf{e}_j).$$

Замечание. Обратите внимание на положение индексов!

Задача. Для каждого из примеров **ЕП** (и аналогичных примеров **УП**) выясните, является ли стандартный базис ортонормированным.

Задача. Какой базис является ортонормированным в пространстве $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(\mathbf{x},\mathbf{y})=X^TGY$, где G — симметричная положительно определенная матрица?

8. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств

Два **ЕП** $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ называются изоморфными, $\mathbb{E}_1\cong\mathbb{E}_2$, если существует отображение $f:\mathbb{E}_1\to\mathbb{E}_2$, являющееся изоморфизмом **ЛП** и удовлетворяющее условие

$$(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=(\mathbf{x},\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}_1.$$

Отображение f называется изоморфизмом **ЕП**.

Аналогично вводится понятие изоморфизма **УП**.

Теорема. *Любые два **ЕП** одинаковой размерности изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ — **ОНБ** в $\mathbb{E}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\tilde{\mathbf{e}}_n$ — **ОНБ** в $\mathbb{E}_2$. Определим линейное отображение $f:\mathbb{E}_1\to\mathbb{E}_2$ правилом $f(\mathbf{e}_j)=\tilde{\mathbf{e}}_j$, $j=1,\dots,n$. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}_1$ имеем:

$$\mathbf{x}=x^j\mathbf{e}_j,\quad\mathbf{y}=y^k\mathbf{e}_k,\quad(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n}x^jy^j.$$

Так как

$$f(\mathbf{x})=f(x^j\mathbf{e}_j)=x^jf(\mathbf{e}_j)=x^j\tilde{\mathbf{e}}_j,\quad f(\mathbf{y})=y^k\tilde{\mathbf{e}}_k,$$

получаем

$$(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))=\sum_{j=1}^{n}x^jy^j,$$

т.е. f — изоморфизм. □

Задача. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для **УП**.

9. Автоморфизмы ЕП и УП. Изометрические операторы

Автоморфизм **ЕП (УП)** — это изоморфизм **ЕП (УП)** на себя, т.е. линейный оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{E}\ (\in\mathbb{U}).$$

Иначе автоморфизмы **ЕП** называются изометрическими операторами. Изометрический оператор в **ЕП** называется ортогональным оператором, а в **УП** — унитарным оператором.

Теорема. *Изометрический оператор в **ЕП (УП)** невырожден и следовательно обратим.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ — изометрический оператор и $\mathbf{x}\in\ker\mathbf{A}$, $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$. Тогда

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})\ne0,\quad(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})=(\mathbf{0},\mathbf{0})=0,$$

противоречие. Таким образом, $\ker\mathbf{A}=\mathbf{0}$, т.е. $\mathrm{rk}\,\mathbf{A}=\dim\mathrm{im}\,\mathbf{A}=n\Rightarrow\det\mathbf{A}\ne0$. □

Теорема. *Все автоморфизмы данного **ЕП** $\mathbb{E}$ (**УП** $\mathbb{U}$) образуют группу $\mathrm{Aut}\,\mathbb{E}$ ($\mathrm{Aut}\,\mathbb{U}$) относительно операции композиции автоморфизмлв (умножения линейных операторов).*

Задача. Докажите самостоятельно.

Изучим структуру изометрических операторов.

Теорема. *1) Матрица A ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в произвольном базисе удовлетворяет соотношению*

$$A^TGA=G,$$

где G — матрица Грама этого базиса.
*2) Матрица A ортогонального оператора $\mathbf{A}$ в **ОНБ** удовлетворяет соотношению*

$$A^TA=I,$$

где I — единичная матрица.
3) Матрица A унитарного оператора $\mathbf{A}$ в произвольном базисе удовлетворяет соотношению

$$A^TG\bar{A}=G,$$

где G — матрица Грама этого базиса.
*4) Матрица A унитарного оператора $\mathbf{A}$ в **ОНБ** удовлетворяет соотношению*

$$A^T\bar{A}=I,$$

где I — единичная матрица.
5) Определитель матрицы изометрического оператора удовлетворяет соотношению $|\det\mathbf{A}|=1$.
6) Все собственные значения изометрического оператора по модулю равны 1.

Доказательство. 1) В произвольном базисе имеем

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=X^TGY,\quad(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y})=(AX)^TG(AY),$$

так что

$$X^TGY=X^TA^TGAY\quad\Rightarrow\quad G=A^TGA.$$

6) Пусть $\mathbf{x}$ — **СВ** изометрического оператора $\mathbf{A}$, принадлежащий **СЗ** λ. Имеем:

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})=(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x})=|\lambda|^2(\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

откуда $|\lambda|^2=1\Rightarrow|\lambda|=1$.

Остальные утверждения докажите самостоятельно. □

10. Ортогональная группа

Если в **ЕП** зафиксирован некоторый **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то каждому ортогональному оператору $\mathbf{A}$ ставится в соответствие его матрица A в этом базисе. Как известно, матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^T A = I.$$

Матрицы, удовлетворяющие данному условию, называются ортогональными матрицами.

Таким образом, матрица ортогонального оператора в **ОНБ** является ортогональной матрицей. Матрица ортогонального оператора в произвольном базисе, вообще говоря, ортогональной не является.

Теорема. *Ортогональные матрицы обладают следующими свойствами:*
1) $AA^T = I$*;*
2) $\det A = \pm 1$*;*
3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} a_{jp} = \delta_{kp}$*;*
4) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} a_{pj} = \delta_{kp}$*.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Все ортогональные матрицы порядка n образуют группу $O(n)$, являющуюся подгруппой в $GL(n, \mathbb{R})$. Группа автоморфизмов n-мерного **ЕП** $\mathbb{E}_n$ изоморфна группе $O(n)$:*

$$\operatorname{Aut} \mathbb{E}_n \cong O(n).$$

Задача. Докажите самостоятельно.

В группе $O(n)$ имеется подгруппа, состоящая из ортогональных матриц с определителем, равным 1; эта подгруппа обозначается $SO(n)$. Группы $SO(2)$, $SO(3)$ — группы вращений двумерного и трехмерного пространств.

Задача. Найдите общий вид матрицы $A \in O(2)$. Найдите общий вид матрицы $A \in SO(2)$.

11. Унитарная группа

Если в **УП** зафиксирован некоторый **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то каждому унитарному оператору $\mathbf{A}$ ставится в соответствие его матрица A в этом базисе. Как известно, матрица A удовлетворяет соотношению

$$A^T \bar{A} = I.$$

Матрицы, удовлетворяющие данному условию, называются унитарными матрицами.

Таким образом, матрица унитарного оператора в **ОНБ** является унитарной матрицей. Матрица унитарного оператора в произвольном базисе, вообще говоря, унитарной не является.

Теорема. *Унитарные матрицы обладают следующими свойствами:*
1) $A\bar{A}^T = I$*;*
2) $|\det A| = 1$*;*
3) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \bar{a}_{jp} = \delta_{kp}$*;*
4) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \bar{a}_{pj} = \delta_{kp}$*.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Все унитарные матрицы порядка n образуют группу $U(n)$, являющуюся подгруппой в $GL(n, \mathbb{C})$. Группа автоморфизмов n-мерного **УП** $\mathbb{U}_n$ изоморфна группе $U(n)$:*

$$\operatorname{Aut} \mathbb{U}_n \cong U(n).$$

Задача. Докажите самостоятельно.

В группе $U(n)$ имеется подгруппа, состоящая из ортогональных матриц в определителем, равным 1; эта подгруппа обозначается $SU(n)$.

Задача. Найдите общий вид матрицы $A \in U(2)$. Найдите общий вид матрицы $A \in SU(2)$.

12. Взаимные базисы

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$, g_{jk} — метрический тензор. Рассмотрим векторы

$$\mathbf{e}^j = g^{jk} \mathbf{e}_k,$$

где g^{jk} — контравариантный метрический тензор. Векторы $\mathbf{e}^j$ образуют базис в $\mathbb{E}$ (почему?); этот базис называется взаимным по отношению к исходному базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Задача. Докажите, что взаимный базис совпадает с исходным тогда и только тогда, когда исходный базис ортонормирован.

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^n$ — базис, сопряженный к к исходному базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, т.е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_l) = \delta^j_l.$$

Рассмотрим **СП** векторов $\mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}_l$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_l) &= (g^{jk}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = g^{jk}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \\ &= g^{jk} g_{kl} = \delta^j_l = \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{e}_l).\end{aligned}$$

Таким образом, для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}^j, \mathbf{x}) = x^j.$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Евклидово пространство изоморфно своему сопряженному пространству, причем изоморфизм задается правилом*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j \leftrightarrow \mathbf{e}^j.$$

*Иными словами, для любого линейного функционала $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{E}^*$ в **ЕП** существует вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ такой, что*

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

13. Ковариантные и контравариантные координаты

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис в **ЕП** $\mathbb{E}$, $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ — взаимный базис. Координаты x^j произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ в базисе $\mathbf{e}_j$ называются его контравариантными координатами, а координаты x_k $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}^k$ называются его ковариантными координатами:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{x} = x_k \mathbf{e}^k.$$

Получим выражения для контравариантных и ковариантных координат вектора $\mathbf{x}$.

Умножая обе части первого из приведенных разложений скалярно на $\mathbf{e}^k$, находим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = (x^j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = x^j(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = x^j \delta^k_j = x^k.$$

Аналогично, умножая обе части второго из приведенных разложений скалярно на $\mathbf{e}_j$, находим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = (x_k \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j) = x_k(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j) = x_k \delta^k_j = x_j.$$

Полученные формулы называются формулами Гиббса.

Найдем связь между контравариантными и ковариантными координатами вектора $\mathbf{x}$. Имеем:

$$x^k = (\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = (\mathbf{x}, g^{kj}\mathbf{e}_j) = g^{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = g^{kj} x_j.$$

Аналогично получаем

$$x_j = g_{jk} x^k.$$

Если исходный базис ортонормированный, то $g_{jk} = \delta_{jk}$, и ковариантные координаты вектора совпадают с его контравариантными координатами.

Задача. Постройте для унитарных пространств теорию, аналогичную изложенной в данном параграфе.

14. Подъем и опускание индекса

Пусть $A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p}$ — тензор типа (p, q), заданный в **ЕП** $\mathbb{E}$, g_{lm} — метрический тензор. Операция свертки

$$B^{j_2 \ldots j_q}_{k k_1 \ldots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_p}$$

называется операцией опускания индекса у тензора A.

Тензоры A и B принято обозначать одной буквой, т.е.

$$A^{j_2 \ldots j_q}_{k k_1 \ldots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_p}.$$

Аналогично определяется операция подъема индекса:

$$A^{j j_1 \ldots j_q}_{k_2 \ldots k_p} = g^{j k_1} A^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_p}.$$

Тензорный индекс можно поднимать и опускать не обязательно на первое место, например, можно рассматривать тензор

$$A^{j_2 \ldots j_q}_{k_1\ k k_2 \ldots k_p} = g_{k j_1} A^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_p}.$$

Ковариантные координаты вектора получаются из контравариантных опусканием индекса; контравариантные координаты вектора получаются из ковариантных подъемом индекса.

Рассмотрим произвольный линейный оператор $\mathbf{A}$ в **ЕП** $\mathbb{E}$; ему отвечает тензор a^j_k типа $(1, 1)$ — матрица этого оператора в произвольно выбранном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Опустим индекс у этого тензора:

$$a_{lk} = g_{lj} a^j_k.$$

Полученному 2-ковариантному тензору a_{lk} отвечает некоторая билинейная форма $\mathbf{B}$ в $\mathbb{E}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{lk} x^l y^k = g_{lj} a^j_k x^l y^k = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пространство билинейных форм, заданных на* ***ЕП*** $\mathbb{E}$*, изоморфно пространству линейных операторов на этом* ***ЕП****, причем изоморфизм задается формулой*

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

Матрица билинейной формы получается из матрицы оператора опусканием индекса. Матрица оператора получается из матрицы билинейной формы подъемом индекса.

Задача. Какой линейный оператор получится, если поднять индекс у метрического тензора?