

# Глава 4. Методы исследования математических моделей

## 1. Вариационные методы решения краевых задач и определения собственных значений

### 1. Принцип Дирихле

Рассмотрим функционал:

$$D(u(x, y)) = \int_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy. \quad (1)$$

Уравнение Эйлера:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0, \quad p = u_x, q = u_y. \quad (2)$$

**Уравнение Лапласа**  $\Delta u(x, y) = 0$  есть **уравнение Эйлера**

задачи на минимум **интеграла Дирихле**

$$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy. \quad (3)$$

Непрерывные в  $\bar{D}$  функции, кусочно-непрерывно дифференцируемые в  $\bar{D}$ , которые принимают на кривой  $\Gamma$  внутри  $D$

заданные непрерывные значения  $\phi(x, y)$  и интеграл Дирихле

от которых конечен, называются **допустимыми функциями**.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D, \\ u(p) = \phi(p), & p \in \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

**Первая вариационная задача:** среди допустимых функций найти такую, которая **доставляет минимум интегралу Дирихле**.

## Теорема.

Если заданная на кривой  $\Gamma$  функция  $\phi(p)$  такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле (4), (5) и первая вариационная задача эквивалентны.

### Доказательство:

1) Пусть  $u(x, y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$  - **решение первой вариационной задачи**. Класс допустимых функций ищем в

виде:

$$u(x, y) + \varepsilon h(x, y), \quad (6)$$

где  $h(x, y) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ , интеграл (3) от  $h$  конечен и

$h(p) = 0, p \in \Gamma, \varepsilon$  - произвольная постоянная.

$$D(u + \varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geq 0, \quad (7)$$

где

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy. \quad (8)$$

**Функция  $u$  доставляет минимум интегралу (3), следовательно**

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} D(u + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = 2D(u, h) = 0 \Rightarrow D(u, h) = 0.$$

Запишем **первую формулу Грина** для функций  $u$  и  $h$ :

$$\int_D h \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D \text{grad } u \text{ grad } h dx dy. \quad (9)$$

Из (9) и  $h(p) = 0, p \in \Gamma \Rightarrow \int_D h \Delta u dx dy = -D(u, h) = 0,$  (10)

$u(M) \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D), h(x, y)$  - **произвольная функция**  $\Rightarrow$

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (11)$$

2) Пусть теперь  $u(x, y)$  - **решение задачи (4),(5),**

**а**  $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$  - **класс допустимых функций, причем для**  
 $u(x, y)$  и  $h(x, y)$  **имеет место формула**

$$D(u, h) = \int_{\Gamma} h \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_D h \Delta u dx dy. \quad (12)$$

**Из (12) и того, что  $h(p) = 0, p \in \Gamma$  и  $u(M)$  гармоническая функция** следует, что  $D(u, h) = 0$ . Поэтому из (7) =>

$$D(u) \leq D(u + \varepsilon h), \quad (13)$$

**то есть функция  $u$  минимизирует интеграл Дирихле и является решением первой вариационной задачи.**

## **Замечание**

**Существуют и другие краевые задачи для уравнения Лапласа, которые имеют эквивалентные им вариационные задачи для интеграла Дирихле, например задача Неймана.**

**Метод сведения краевых задач для уравнения Лапласа к эквивалентным им вариационным задачам носит название принципа Дирихле.**

## 2. Задача о собственных значениях

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, M \in D, & (14) \\ u(P) = 0, p \in \Gamma, & (15) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}). & (16) \end{cases}$$

**Вторая вариационная задача:** среди допустимых функций, удовлетворяющих условию (15), найти ту, для которой функционал

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \quad (17)$$

где

$$H(u) = \int_D u^2(x, y) dx dy, \quad (18)$$

**принимает наименьшее значение.**

## **Теорема 1.**

Если  $u(x,y)$  - решение второй вариационной задачи, то  $u(x,y)$  является решением задачи (14) - (16).

### **Доказательство:**

Пусть  $u$  - решение второй вариационной задачи, причем наименьшее значение  $J(u)$  удовлетворяет условию:

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0. \quad (19)$$

Для класса допустимых функций  $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$ , где  $\varepsilon$  - произвольная постоянная,  $h(x,y)$  - произвольная допустимая функция,  $h(p) = 0$ ,  $p \in \Gamma$ , имеем



$$F(\varepsilon) = \frac{D(u + \varepsilon h)}{H(u + \varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u, h) + \varepsilon^2 H(h)} \geq \lambda, \quad (20)$$

где

$$H(u, h) = \int_D u h \, dx dy. \quad (21)$$

Так как  $F(\varepsilon)$  при  $\varepsilon=0$  имеет минимум, то

$$F'(0) = 2 \frac{H(u)D(u, h) - D(u)H(u, h)}{H^2(u)} = 0. \quad (22)$$

$$(19) \Rightarrow D(u) = \lambda H(u). \quad (23)$$

Подставляем (23) в (22):

$$H(u)D(u, h) - D(u)H(u, h) = H(u) \{D(u, h) - \lambda H(u, h)\} = 0. \quad (24)$$

Так как  $H(u) \neq 0$ , то из (24)  $\Rightarrow$

$$D(u, h) - \lambda H(u, h) = 0. \quad (25)$$

Если  $u, h \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$  и контур  $\Gamma$  достаточно гладкий,

то

$$D(u, h) = \int_D (u_x h_x + u_y h_y) dx dy = - \int_D \Delta u h dx dy \quad (26)$$

и из (26) получаем:

$$\begin{aligned} D(u, h) - \lambda H(u, h) &= - \int_D (\Delta u + \lambda u) h dx dy = \\ &= -H(\Delta u + \lambda u, h) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку  $u \in C^{(2)}(D) \Rightarrow \Delta u \in C(D)$  и  $h$  -

произвольная функция, то из (27) следует, что

$$\Delta u + \lambda u = 0. \quad (28)$$

## Теорема 2.

Среди собственных значений задачи (14) – (16) найденное собственное значение является минимальным.

### Доказательство:

Пусть  $\tilde{\lambda} \neq \lambda$  некоторое собственное значение и  $\tilde{u}(x, y)$  – соответствующая собственная функция. Тогда:

$$\begin{aligned} H(\Delta\tilde{u} + \tilde{\lambda}\tilde{u}, \tilde{u}) &= \int_D \Delta\tilde{u}\tilde{u} dx dy + \tilde{\lambda} \int_D \tilde{u}^2 dx dy = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} \tilde{u} d\sigma - \int_D (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) dx dy + \tilde{\lambda} H(\tilde{u}) = \\ &= -D(\tilde{u}) + \tilde{\lambda} H(\tilde{u}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

**и из (29) получаем, что**

$$\tilde{\lambda} = J(\tilde{u}) = \frac{D(\tilde{u})}{H(\tilde{u})}, \quad (30)$$

**а так как**

$$\lambda = \min_{u \in P} J(u), \quad (31)$$

**где  $P$  – класс допустимых функций, то**

$$\lambda < \tilde{\lambda}. \quad (32)$$

## 2. Некоторые алгоритмы проекционного метода

### 1. Общая схема алгоритмов

Рассмотрим уравнение:

$$Lu = Au + Bu = f, \quad f \in H, \quad (1)$$

где  $A, B$  – линейные операторы в гильбертовом пространстве  $H$ ;  $D(A), D(B)$  – области их определения.  $D(A)$ , - плотно в  $H$ .

Введем оператор  $K: D(K) \supset D(A)$ .

**Введём систему базисных (координатных) функций:**

$$\left\{ \phi_i^{(N)} \right\}, \quad \phi_i^{(N)} \in D(A), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad N = 1, 2, \dots,$$

$H_N$  – линейная оболочка  $\phi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N, \left\{ \phi_i^{(N)} \right\}$  - базис в  $H_N$ .

Предположим, что:

1) при любом  $N$  функции  $\phi_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N$  **линейно независимы;**

2) последовательность подпространств  $\{H_N\}$  **предельно полна в  $H$ :**

для  $\forall u \in H \quad \exists \tilde{u}_N \in H_N, N = 1, 2, \dots,$  что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_{\omega} \|u - \omega\| \leq \varepsilon(u, N), \quad \omega \in H_N, \quad (2)$$

$\varepsilon(u, N) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \varepsilon(u, N)$  - **оценка погрешности аппроксимации.**

**Введем также базисные функции:**  $\{\psi_i\}, \psi_i \in D(K)$

**Ищем приближенное решение (1) в виде**

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \quad (3)$$

**где  $a_i, i = 1, 2, \dots, N$  определяется из системы уравнений:**

$$(Au_N + Bu_N - f, K\psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

**где  $(u, v)$  - скалярное произведение в  $H$  и  $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ .**

**Разрешимость системы (4) и сходимость  $u_N$  к  $u$  при  $N \rightarrow \infty$  зависят от свойств операторов  $A, B$  и выбора оператора  $K$  и систем функций  $\{\phi_i\}, \{\psi_j\}$ .**

## 2. Метод Рунца

Пусть дано уравнение:  $Au = f$ ,  $f \in H$ , (5)

где  $(Au, v) = (u, Av)$ ,  $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $u, v \in D(A)$ .

1) Выбирается базис  $\{\phi_i\}$ ,  $\phi_i \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

2) Приближенное решение ищется в виде (3).

3) Коэффициенты  $a_i$  находятся из системы уравнений

$$(Au_N, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = \{A_{i,j}\}, \quad A_{i,j} = (A\phi_i, \phi_j),$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \phi_i), \quad (7)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N.$$



## Вариационная трактовка метода Ритца.

Рассмотрим квадратичный функционал энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \quad (8)$$

**Теорема.** Для того, чтобы некоторый элемент  $u_0 \in D(A)$  сообщал минимальное значение функционалу энергии  $F(u)$ , необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению (5). Такой элемент единственный.

**Вариационная задача:** найти функцию  $u_N$  такую, что

$$F(u_N) = \min_{\nu} F(\nu), \quad u_N, \nu \in H_N. \quad (9)$$

Так как  $\nu = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j$ , то  $F(u_N) = \min_{a_i} F(\nu)$ ,

где  $F(\nu) = F(a_1, \dots, a_N) = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j (A\phi_i, \phi_j) - 2 \sum_{j=1}^N a_j (f, \phi_j) \Rightarrow$

$$\frac{\partial F(\nu)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Из (10) следует (7) и (6)  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F(a_1, a_2, \dots, a_N)}{\partial a_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N \Rightarrow$$

$$2 \sum_{i=1}^N a_i (A\phi_i, \phi_j) - 2(f, \phi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\left( A \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \phi_j \right) - (f, \phi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$(Au_N, \phi_j) - (f, \phi_j) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

## Теорема.

Если для любой функции  $u \in D(A)$  можно построить такую последовательность элементов  $\tilde{u}_N = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \phi_i \in H_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , что  $\|A(u - \tilde{u}_N)\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то приближенные решения  $u_N$  сходятся к точному решению  $u_0$  уравнения (5) при  $N \rightarrow \infty$  и имеет место оценка

$$\|u_0 - u_N\| \leq C \min_{\tilde{a}_i} \|A(u_0 - \tilde{u}_N)\|,$$

где  $C > 0$  не зависит от  $u_0$  и  $\tilde{u}_N$ .

## Доказательство:

Пусть  $v \in D(A)$  - произвольная функция.

$$\begin{aligned}(A(u_0 - v), u_0 - v) &= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(Au_0, v) = \\ &= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(f, v) = F(v) + (Au_0, u_0) - \\ &- F(u_0) + F(u_0) = F(v) - F(u_0) + 2(Au_0, u_0) - 2(u_0, f) = \\ &= F(v) - F(u_0) \Rightarrow (A(u_0 - v), u_0 - v) = F(v) - F(u_0)\end{aligned}$$

Поскольку  $u_0$  минимизирует функционал  $F(v)$  на  $D(A)$ , а  $u_N$  минимизирует  $F(v)$  на  $H_N$ , то

$$\begin{aligned}(A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) &= F(u_N) - F(u_0) \leq \\ &\leq F(v_N) - F(u_0) = (A(u_0 - v_N), u_0 - v_N)\end{aligned}$$

при произвольной функции  $v_N = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i$  из  $H_N \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \|u_0 - u_N\|^2 &\leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq \\ &\leq (A(u_0 - v_N), AA^{-1}(u_0 - v_N)) \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A(u_0 - v_N)\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\gamma^2} \|A(u_0 - v_N)\|^2$$

**В силу произвольности выбора коэффициентов  $C_i, i=1,2,\dots,N$  в разложении  $v_N$ , положив  $v_N = \tilde{u}_N$  получаем утверждение теоремы.**

**Замечание.** При рассмотрении классической формулировки метода Ритца решение вариационной задачи может не существовать.

Введем в  $D(A)$  **энергетическое скалярное произведение и**

**норму**  $[u, v] = (Au, v), [u] = [u, u]^{1/2}$  (11)

и пополним  $D(A)$  по энергетической норме.

Получим энергетическое пространство  $H_A$ , порождаемое оператором  $A$ . В  $H_A$  могут появиться предельные элементы не принадлежащие  $D(A)$ .

Расширим функционал энергии на  $H_A$ :

$$F(u) = [u, u] - 2(f, u) \quad (12)$$

и будем искать его минимум на  $H_A$ :

Пусть минимум достигается на  $u_0 \in H_A$ . Если  $u_0 \notin D(A)$ , то  $u_0$  - **обобщенное решение (5)**, если  $u_0 \in D(A)$ , то  $u_0$  - **классическое решение (5)**.

Краевые условия которым удовлетворяют элементы из  $D(A)$ , называются **естественными** для оператора  $A$ , а краевые условия, которым удовлетворяют как элементу из  $D(A)$ , так и элементы из  $H_A$ , называются **главными**. **Базисные функции** выбираются из  $H_A$ .



### 3. Метод Галёркина

**Основной недостаток метода Ритца: он применим только для самосопряженных положительно определенных операторов.**

#### Метод Бубнова - Галёркина

$$Lu = Au + Bu = f, f \in H, \quad (13)$$

- 1) **Выбирается базис  $\{\phi_i\}$ ,  $\phi_i \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;**
- 2) **Приближенное решение ищется в виде (3);**
- 3) **Коэффициенты  $a_i$  находятся из условия ортогональности невязки  $Lu_N - f$  к  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ :**

$$(Lu_N - f, \phi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

**Замечание.** Если коэффициенты  $a_i$  определяются из условия

$$(Lu_N - f, \psi_i) = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

где  $\{\psi_i\} \subset H$ , некоторый базис, то метод называется **методом Галёркина - Петрова.**

**Если**  $(Au, v) = (u, Av)$ ,  $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $u, v \in D(A)$ , **то можно ввести энергетическое пространство**  $H_A$ . Тогда (14)  $\Rightarrow$

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad v \in H_A. \quad (16)$$

**1) Выбираем базис**  $\{\phi_i\}$ ,  $\phi_i \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

**2) Приближенное решение ищется в виде (3);**

**3) Коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений:**

$$[u_N, \phi_i] + (Bu_N, \phi_i) = (f, \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\hat{L}a = b, \quad \hat{L} = (L_{i,j}), \quad L_{i,j} = [\phi_i, \phi_j] + (B\phi_i, \phi_j), \quad (18)$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T, \quad f_i = (f, \phi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

## 4. Обобщенный метод моментов

$$Au + Bu = f, \quad f \in H,$$

$$(Au, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (Au, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2; \quad \gamma, \beta > 0,$$

$u \in D(A) \subset D(K)$  - оператор  $A$  является  **$K$ -положительно определенным**.

- 1) Выбирается базис  $\{\phi_i\}$ ,  $\phi_i \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) Приближенное решение ищется в виде (3);
- 3) Коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений:

$$(Au_N + Bu_N - f, K\phi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

**Замечание.** Метод моментов широко используется для решения интегральных уравнений:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (20)$$

Ищем приближенное решение в виде разложения по полной системе функций  $\{\phi_i(x)\}$ :

$$u_N(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x). \quad (21)$$

Коэффициенты  $a_i$  определяются из ортогональности невязки ко всем функциям  $\{\phi_i(x)\}$ :

$$\int_a^b \left\{ u_N(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u_N(\xi) d\xi - f(x) \right\} \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

**что приводит к системе:**

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = (A_{i,j}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$
$$A_{i,j} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx - \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(\xi)\phi_j(x)dxd\xi, \quad (23)$$

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (b_1, \dots, b_N)^T,$$

$$b_i = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(x)f(\xi)dxd\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**Замечание.** Если система  $\{\phi_i(x)\}$  ортогональная, то метод моментов эквивалентен замене ядра на специальное вырожденное ядро:

$$\tilde{K}(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\hat{O}_i(\xi); \quad \hat{O}_i(\xi) = \int_a^b K(x, \xi)\phi_i(x)dx \quad (24)$$

## 5. Метод наименьших квадратов

Пусть оператор в (5) имеет ограниченный обратный  $A^{-1}$ .

- 1) Выбирается базис  $\{\phi_i\}$ ,  $\phi_i \in D(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) Приближенное решение ищется в виде (3);
- 3) Коэффициенты  $a_i$  определяются из системы уравнений:

$$(Au_N, A\phi_i) = (f, A\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

$$\hat{A}a = b, \quad \hat{A} = (A_{i,j}), \quad A_{i,j} = (A\phi_i, A\phi_j), \quad \hat{A} = \hat{A}^T,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N, \quad a = (a_1, \dots, a_N)^T, \quad b = (f_1, \dots, f_N)^T,$$

$$f_i = (f, A\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**Замечание.** Соотношения (25) можно получить из условия минимизации функционала невязки  $J(u) = \|Au - f\|^2$  на  $H_N$ .