

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**Боголюбов А.Н., Тихонов Н.А., Митина И.В., Шапкина Н.Е.**

**Москва, 2006**

### Решение задач 1 – 12.

1. Методом усреднения решить приближенно задачу

$$\ddot{x} + x - \mu(\dot{x} - \dot{x}^3) = 0; \quad x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = 0$$

Решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = \mu(z - z^3) - x; \quad x|_{t=0} = x_0; \quad z|_{t=0} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y \cos(t + \varphi) \\ z = -y \sin(t + \varphi) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dot{y} \cos(t + \varphi) - y \dot{\varphi} \sin(t + \varphi) = -y \sin(t + \varphi) \\ -\dot{y} \sin(t + \varphi) - y \dot{\varphi} \cos(t + \varphi) = \mu(-y \sin(t + \varphi) + y^3 \sin^3(t + \varphi)) - y \cos(t + \varphi). \end{cases}$$

умножая первое уравнение на  $\cos(t + \varphi)$ , второе – на  $-\sin(t + \varphi)$  и складывая, получим:

$$\dot{y} = \mu y \sin^2(t + \varphi) \cdot (1 - y^2 \sin^2(t + \varphi)); \quad y|_{t=0} = x_0; \quad \varphi|_{t=0} = 0$$

умножая первое уравнение на  $\sin(t + \varphi)$ , второе – на  $\cos(t + \varphi)$  и складывая, получим:

$$\begin{aligned} -y \dot{\varphi} &= -y - \mu y \sin(t + \varphi) \cdot \cos(t + \varphi) \cdot (1 - y^2 \sin^2(t + \varphi)), \text{ отсюда} \\ \dot{\varphi} &= 1 + \mu \sin(t + \varphi) \cdot \cos(t + \varphi) \cdot (1 - y^2 \sin^2(t + \varphi)). \end{aligned}$$

Усредненная система:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \mu \frac{\eta_1}{2} \left(1 - \frac{\eta_1^2}{4}\right); \\ \dot{\eta}_2 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \eta_1 = x_0 \\ \eta_2 = 0 \end{cases}.$$

Находим:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + (4 - x_0^2) \cdot e^{-\mu t}}} \\ \eta_2 = t \end{cases}.$$

Ответ:

$$x = \left\{ \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + (4 - x_0^2) \cdot e^{-\mu t}}} + r_1 \right\} \cdot \cos(t + r_2), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} r_1 &\rightarrow 0 \\ r_2 &\rightarrow 0 \end{aligned} \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

2. Построить с точностью  $O(\mu)$  (т.е. с остаточным членом  $O(\mu)$ ) асимптотику решения  $z(t, \mu)$  следующей начальной задачи на отрезке  $1 \leq t \leq 2$ .

$$\mu \frac{dz}{dt} = z^2 - t^2; \quad z(1, \mu) = 0$$

Решение:

Так как система не содержит переменного  $y$ , будем иметь плоскую картину на плоскости  $t, z$  (рис. 1).

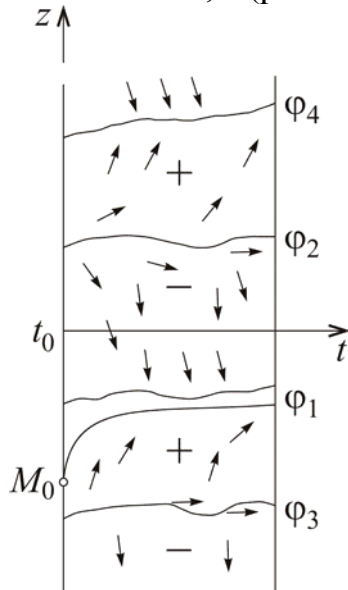


Рис. 1.

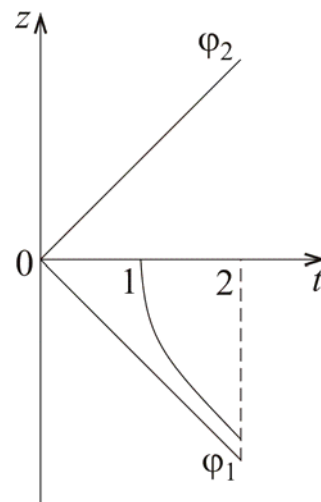


Рис. 2.

Из уравнения  $F = z^2 - t^2 = 0$  имеем  $\varphi_1 = -t$ ,  $\varphi_2 = t$  (рис. 2). При этом  $\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=-t} = 2z|_{z=-t} = -2t < 0$ , т.е. корень  $\varphi_1$  устойчив, а  $\varphi_2$  условию устойчивости не удовлетворяет. Таким образом,  $\bar{z}_0(t) = -t$ . Далее, имеем

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \tilde{z}^2 - 1, \quad \tau = (t-1)/\mu, \quad \tilde{z}(0) = 0.$$

Отсюда  $\tilde{z} = \frac{-1 + e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}}{1 + e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}} \rightarrow -1$  и, следовательно,

$$\Pi_0(\tau) = \tilde{z} + 1 = \frac{2e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}}{1 + e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}},$$

Итак,

$$z(t, \mu) = -t + \frac{2e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}}{1 + e^{-\frac{2}{\mu}(t-1)}} + O(\mu), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

График соответствующей интегральной кривой изображен на рис. 2.

3. Пусть по реке вместе с водой переносятся сброшенные в реку отходы химического производства. Пренебрегая шириной реки по сравнению с длиной, будем считать движение воды одномерным. Направим ось  $x$  вдоль реки. Пусть  $q(x)$  – поток воды, проходящий через сечение с координатой  $x$ . Река вбирает потоки, поэтому  $q(x)$ , вообще говоря, меняется с ростом  $x$ . Пусть в момент  $t = 0$  вода была чистая, а при  $t > 0$  в сечении  $x = x_0$  сливаются сбросы в количестве  $f(t)$ . Эти сбросы переносятся течением и частично оседают на дно. Пусть в единицу времени на единицу длины реки количество осаждающегося вещества равно  $\alpha u(x, t)$ , где  $\alpha$  – коэффициент, а  $u(x, t)$  – количество взвешенного загрязняющего вещества на единицу длины реки. Требуется рассчитать количество вещества  $u(x, t)$  в реке при  $t > 0$ ,  $x > x_0$ .

Решение:

Выведем уравнения переноса вещества, считая, что функция  $u$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Для этого рассмотрим баланс вещества в слое от  $x$  до  $x + \Delta x$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Он описывается, с точностью до малых высшего порядка, соотношением

$$\begin{aligned} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] \Delta x = \\ = [q(x)u(x, t) - q(x + \Delta x)u(x + \Delta x, t)] \Delta t - \alpha u(x, t) \Delta x \Delta t. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части учитывает потоки вещества:  $q(x)u(x, t)$  – входящий в слой и  $q(x + \Delta x)u(x + \Delta x, t)$  – выходящий из слоя. Последнее слагаемое в правой части – количество осаждающегося на дно вещества. Разделив соотношение баланса на  $\Delta x \Delta t$ , переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем:  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(qu) - \alpha u$ . Отсюда приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} = -bu,$$

где  $b(x) = \frac{\partial q}{\partial x}(x) + \alpha$ . При  $x = x_0$  в реку поступает сброс  $f(t)$ , а вниз по течению уходит поток  $q(x_0)u(x_0, t)$ . Отсюда имеем условие  $u(x_0, t) = \frac{f(t)}{q(x_0)}$ . Итак, процесс описывается задачей

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} = -bu & (x > x_0, t > 0), \\ u(x_0, t) = \frac{f(t)}{q(x_0)}, \quad u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим задачу (1). Для этого составляем уравнение характеристик  $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{q(x)}$ . Находим первый интеграл этого уравнения

$$t - \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)} = C. \quad (2)$$

Вводим переменную  $\tau$ , пользуясь условием:  $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{q(x)} = d\tau$ . Полагая  $\tau = 0$

при  $x = x_0$ , находим

$$\tau = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}, \quad (3)$$

$\tau$  по своему физическому смыслу – это время запаздывания прихода загрязнения в точку  $x$  из точки  $x_0$ . Соотношение (3) определяет  $x$  как некоторую функцию  $\tau$ :  $x = \theta(\tau)$ . Согласно изложенной выше теории, получаем уравнение для функции  $v(C, \tau) = u(x, t)$ :

$$\frac{dv}{d\tau}(C, \tau) = -\beta(\tau)v(C, \tau), \quad (4)$$

где  $\beta(\tau) = b(x) = b(\theta(\tau))$ .

Из (2), (3) следует, что область изменения  $x \geq x_0, t \geq 0$  соответствует области  $\tau \geq 0, C \geq -\tau$ . Дополнительные условия в (1) заданы при  $x = x_0$  и  $t = 0$ . Согласно (2), (3) при  $x = x_0$  значение  $\tau = 0, C = t > 0$ , а при  $t = 0, x > 0$  имеем  $C = -\tau < 0$ . Получаем дополнительные условия для функции  $v$  в виде

$$v(C, 0) = \frac{f(C)}{q(x_0)} \text{ при } C > 0, \quad v(C, -C) = 0 \text{ при } C < 0. \quad (5)$$

Таким образом, задача Коши для функции  $v$  получилась в форме (4), (5).

Решая линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (4) с дополнительными условиями (5) при различных значениях параметра  $C$ , находим

$$v(C, \tau) = \begin{cases} \frac{f(C)}{q(x_0)} e^{-\int_0^\tau \beta(\tau) d\tau}, & C > 0, \\ 0, & C < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Используем равенство

$$\int_0^{\tau} \beta(\tau) d\tau = \int_0^{\tau} b(\theta(\tau)) d\tau = \int_{x_0}^x b(x) \frac{d\tau}{dx} dx = \int_{x_0}^x \frac{b(x)}{q(x)} dx.$$

Подставляя явное выражение  $b(x) = q'(x) + \alpha$  и переходя к старым переменным  $x, t$  в (6), находим решение поставленной задачи (1):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f\left(t - \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}\right)}{q(x_0)} \cdot e^{-\int_{x_0}^x \frac{q'(\xi) + \alpha}{q(\xi)} d\xi}, & t > \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}, \\ 0, & t < \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{q(\xi)}. \end{cases}$$

В частном случае при  $q = \text{const}$  имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{q} f\left(t - \frac{x - x_0}{q}\right) \cdot e^{-\frac{x - x_0}{q} \alpha}, & t > \frac{x - x_0}{q}, \\ 0, & t < \frac{x - x_0}{q}. \end{cases}$$

Решение в точке  $x$  «повторяет» функцию  $f(t)$  с запаздыванием на  $T = \frac{x - x_0}{q}$  – время хода от  $x_0$  до  $x$ , и с ослаблением в  $e^{-\alpha T}$  раз, вызванным осаждением загрязнения на дно реки.

4. Пусть через слой  $0 \leq x \leq l$  пористого сорбента в направлении оси  $x$  проходит поток воздуха со скоростью  $q$ , переносящий газообразное химическое вещество. Пусть  $C(x, t)$  – концентрация вещества в порах,  $a(x, t)$  – на поверхности сорбента. Эти концентрации связаны соотношением  $a = f(C)$ . Функция  $f$  называется изотермой сорбции. Ее вид зависит от свойств сорбента. Рассмотрим такую задачу. Пусть при  $t = 0$  сорбент чистый, а при  $t > 0$  на вход подается концентрация  $C(0, t) = \alpha t$ . Пусть  $f(C) = k \ln(1 + C)$ . Требуется определить  $C(l, t)$  – концентрацию вещества на выходе из слоя сорбента. Задачу будем рассматривать в предположении, что  $l \leq \frac{q}{k\alpha}$ .

Решение:

С точностью до малых высшего порядка баланс вещества в слое  $(x, x + \Delta x)$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  записывается в виде

$$[C(x, t + \Delta t) + a(x, t + \Delta t) - C(x, t) - a(x, t)] \Delta x = q[C(x, t) - C(x + \Delta x, t)] \Delta t.$$

Отсюда следует, что процесс сорбции описывается уравнением  $\frac{\partial}{\partial t}(C+a) + q \frac{\partial C}{\partial x} = 0$ . Используя явный вид зависимости  $a$  от  $C$ , начальные и граничные условия, получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} + q \frac{\partial C}{\partial x} = 0, & a = k \ln(1+C), \\ C(x, 0) = 0, & C(0, t) = \alpha t. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение принимает более простой вид, если перейти к локальному времени  $\tau = t - \frac{x}{q}$ . Итак введем новые переменные  $\tau = t - \frac{x}{q}$ ,  $\xi = x$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

В новых переменных для функции  $C(\xi, \tau)$  получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial \tau} + q \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0, & a = k \ln(1+C), & 0 \leq \xi \leq l \\ C\left(\xi, -\frac{\xi}{q}\right) = 0, & C(0, \tau) = \alpha \tau, & \tau \geq -\frac{\xi}{q}. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя  $a$  в первое уравнение, имеем

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \frac{k}{1+C} + q \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0.$$

Это квазилинейное уравнение. Для его решения составляем уравнение характеристик:

$$\frac{d\tau}{k/(1+C)} = \frac{d\xi}{q} = \frac{dC}{0}.$$

Первые интегралы уравнения характеристик будут

$$q\tau - \frac{\xi k}{1+C} = \text{const}, \quad C = \text{const}.$$

Множество  $S$ , на котором заданы дополнительные условия, состоит из двух лучей ( $\tau > 0$ ,  $\xi = 0$ ) и ( $\tau < 0$ ,  $\xi = -q\tau$ ). Обозначим  $\tau^*$ ,  $\xi^*$  координаты пересечения проекции характеристики, проходящей через точку  $(\tau, \xi, C(\tau, \xi))$ , с множеством  $S$ . Учитывая граничные условия, получаем

$$q\tau - \frac{\xi k}{1+C(\tau, \xi)} = q\tau^* - \frac{\xi^* k}{1+\Phi(\tau^*, \xi^*)}, \quad C(\tau, \xi) = \Phi(\tau^*, \xi^*). \quad (3)$$

Либо  $\tau^* \geq 0$ ,  $\xi^* = 0$ , либо  $\tau^* \leq 0$ ,  $\xi^* = -q\tau^*$ ,

$$\Phi(\xi^*, \tau^*) = \begin{cases} \alpha \tau^*, & \text{если } \tau^* \geq 0, \xi^* = 0, \\ 0, & \text{если } \tau^* \leq 0, \xi^* = -q\tau^*. \end{cases}$$

Рассмотрим первый случай, когда  $\tau^* \geq 0$ . Тогда из (3) имеем

$$\begin{cases} q\tau - \frac{\xi k}{1 + \alpha\tau^*} = q\tau^*, \\ C(\xi, \tau) = \alpha\tau^*. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) проекция характеристики на плоскость  $\xi, \tau$  определяется соотношением  $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{q}{k}(1 + \alpha\tau^*)$  и представляет собой прямую линию. Эти линии при различных значениях  $\tau^*$  изображены на рис. 1. Для определения значения  $\tau^*$ , соответствующего точке  $(\xi, \tau)$ , имеем квадратное уравнение (4). Решая его, находим

$$\tau^* = \frac{1}{2} \left[ \tau - \frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\tau - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{4}{\alpha} \left(\tau - \frac{k\xi}{q}\right)} \right]. \quad (5)$$

Из (5) видно, что при  $\tau \geq \xi \frac{k}{q}$  существует единственный положительный корень  $\tau^* \geq 0$ . Если  $\tau < \xi \frac{k}{q} \leq l \frac{k}{q} \leq \frac{1}{\alpha}$ , то оба корня (5) отрицательны.

Рассмотрим второй случай в (3), когда  $\tau^* < 0$ . Тогда из (3) имеем

$$\begin{cases} q\tau - \xi k = q\tau^* - \xi^* k, \\ C(\xi, \tau) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из (6) наклон проекции характеристик  $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{q}{k}$ . Они представляют собой параллельные линии, расположенные ниже линии  $\xi = \frac{q}{k}\tau$  на рис. 1.

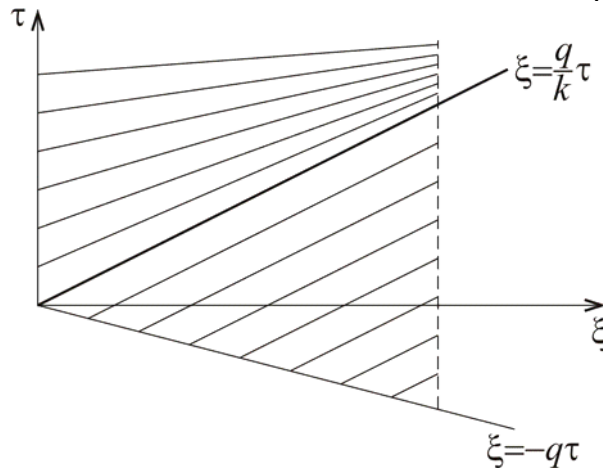


Рис. 1.

Таким образом, найдено решение при всех значениях  $\tau^*$ .



Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$C(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \alpha \left( t - \frac{x}{q} \right) - 1 + \sqrt{\left( \alpha \left( t - \frac{x}{q} \right) + 1 \right)^2 - \frac{4kx\alpha}{q}} \right] & \text{при } t \geq \frac{1+k}{q}x, \\ 0 & \text{при } t \leq \frac{1+k}{q}x. \end{cases}$$

5. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + ku \frac{\partial u}{\partial x} = 0; (t > 0, x > 0) \\ u(0, t) = \begin{cases} \alpha \cdot t; (0 \leq t \leq t_1 = \frac{u_1}{\alpha}) \\ u; (t \geq t_1) \end{cases} \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Составляем уравнения характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{ku} = \frac{du}{0}.$$

Отсюда находим первые интегралы:

$$\begin{aligned} ktu - x &= C_1, \\ u &= C_2. \end{aligned}$$

Множество  $S$ , на котором заданы дополнительные условия, состоит из двух полупрямых ( $x=0, t>0$ ) и ( $x>0, t=0$ ). В соответствии с этим получаем

$$\begin{cases} ktu - x = kt^* \Phi(t^*) - x^*, \\ u = \Phi(t^*), \\ x^* = 0, \quad t^* > 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} ktu - x = kt^* \Phi(0) - x^*, \\ u = 0, \\ x^* > 0, \quad t^* = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x^*, t^*$  - значение координат в точке пересечения характеристики с поверхностью  $S$ .

Рассмотрим соотношения (1) при  $0 < t^* \leq t_1$ . Используя исходную задачу, из (1) получаем

$$\begin{cases} kt\alpha t^* - x = kt^* \alpha t^* - x^*, \\ u = \alpha t^*, \\ x^* = 0, \quad t^* > 0. \end{cases}$$

Отсюда при  $0 < t^* < t_1$  выполнено  $t^{*2} - tt^* + \frac{x}{k\alpha} = 0$ . Решая это квадратное уравнение, получаем  $t^* = \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{x}{k\alpha}}$  (знак перед корнем выбран так, чтобы  $t^* \rightarrow t$  при  $x \rightarrow 0$ ). Корень  $t^*$  будет действительным, если  $t > 2\sqrt{\frac{x}{k\alpha}}$ . Условие  $t^* < t_1$  дает:  $t < t_1 + \frac{x}{ku_1}$ . Следовательно,  $u = \alpha t^* = \alpha \left( \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{x}{k\alpha}} \right)$  при  $2\sqrt{\frac{x}{k\alpha}} < t < t_1 + \frac{x}{k\alpha}$  (в области 2 на рис. 1).

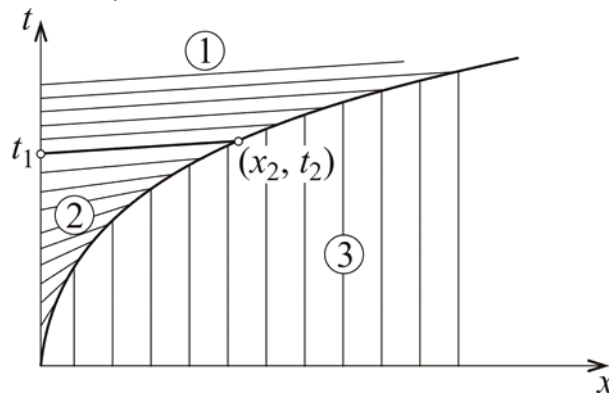


Рис. 1.

При  $t^* > t_1$  из условия задачи и (1) имеем

$$\begin{cases} ktu - x = kt^* u_1, \\ u = u_1, \\ x^* = 0, \quad t^* > t_1. \end{cases}$$

Отсюда получаем:  $u = u_1$  при  $t > t_1 + \frac{x}{k\alpha}$  (в области 1 на рис.1). Наконец, из (2) следует, что  $u = 0$  на характеристиках, определяемых соотношением  $x = x^* > 0$  (в области 3 на рис. 1).

Как видно из рисунка, линия разрыва начинается сразу от границы из точки  $(0,0)$ . Кроме того,  $u = 0$  в области 3. Получаем, что линия разрыва определяется условием

$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2}u$ , где в качестве  $u$  нужно

выбирать значение этой функции на характеристиках, подходящих к

разрыву из областей 1 и 2. Отсюда линия разрыва, разделяющая области 2 и 3, определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2} \alpha \left( \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{x}{k\alpha}} \right).$$

Нетрудно видеть, что решением этого уравнения, удовлетворяющим условию  $x(0)=0$ , является  $x = \frac{k\alpha t^2 \sqrt{3}}{8}$ . Точка  $(x_2, t_2)$  – точка

пересечения кривой разрыва  $x = \frac{k\alpha t^2 \sqrt{3}}{8}$  с линией  $t = t_1 + \frac{x}{ku_1}$ . Отсюда

$$t_2 = \frac{4u_1}{\sqrt{3}\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha}{u_1}} \right), \quad x_2 = ku_1(t_2 - t_1).$$

При  $t > t_2$  линия разрыва разделяет области 1 и 3 и определяется уравнением  $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2} u_1$ . Следовательно,  $x = x_2 + \frac{k}{2} u_1(t - t_2)$ .

Ответ:

$$u = 0 \text{ при } \begin{cases} 0 \leq t < \sqrt{\frac{8x}{\sqrt{3}k\alpha}}, & 0 \leq x \leq x_2, \\ 0 \leq t < t_2 + \frac{x - x_2}{ku_1} \cdot 2, & x > x_2, \end{cases}$$

$$u = u_1 \text{ при } \begin{cases} t \geq t_1 + \frac{x}{ku_1}, & 0 \leq x \leq x_2, \\ t > t_2 + 2 \frac{x - x_2}{ku_1}, & x > x_2. \end{cases}$$

$$u = \alpha \left( \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - \frac{x}{k\alpha}} \right) \text{ при } \sqrt{\frac{8x}{\sqrt{3}k\alpha}} < t \leq t_1 + \frac{x}{ku_1}, \quad 0 < x < x_2,$$

$$\text{где } t_2 = \frac{4u_1}{\sqrt{3}\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\alpha}{u_1}} \right), \quad x_2 = ku_1(t_2 - t_1).$$

6. Поток воздуха имеет скорость  $v$ . С потоком переносится вещество, при этом происходит диффузия вещества в воздухе.

$$\text{Концентрация вещества при } t = 0 \text{ равна } \begin{cases} 0; & x < 0 \\ e^{-\alpha x}; & x > 0 \end{cases}$$

Кроме этого: в случае а) с воздухом переносится источник, выделяющий постоянное количество вещества в единицу времени. При  $t = 0$  положение источника  $x = 0$ .

в случае б) происходит осаждение вещества на стенки пропорционально концентрации вещества в сечении.

Требуется найти концентрацию вещества в обоих случаях, считая задачу одномерной по координате.

Решение:

Пусть  $u(x, t)$  – концентрация вещества.

В случае а) процесс описывается уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\delta(x - vt), \quad A = \text{const}.$$

В случае б):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u.$$

Требуется найти решения этих уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\alpha x}, & x > 0. \end{cases}$$

Введем новые координаты  $\xi = x - tv$ ,  $\tau = t$  и функцию  $U(\xi, \tau) = u(x, t)$ .

$$\text{Тогда } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \tau} - v \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

После перехода к новым переменным получаем задачу а):

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + f(\xi), & \text{где } f(\xi) = A\delta(\xi), \\ U(\xi, 0) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ e^{-\alpha \xi}, & \xi > 0. \end{cases} \end{cases}$$

В задаче б) введем новую функцию  $w(\xi, \tau) = U(\xi, \tau) \cdot e^{\beta \tau}$ .

Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \\ w(\xi, 0) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ e^{-\alpha \xi}, & \xi > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решение а):

$$U(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(z, 0)G(\xi, z, \tau)dz + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)G(\xi, z, \tau - \theta)dz \cdot d\theta.$$

Решение б):

$$U(\xi, \tau) = e^{-\beta \tau} \int_0^{\infty} U(z, 0)G(\xi, z, \tau)dz,$$

где

$$G(\xi, z, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} \cdot e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2\tau}}$$

– функция источника для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Вычислим интегралы:

$$I_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \cdot e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2\tau}} \cdot dz$$

и

$$I_2(\xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\tau e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(\tau-\theta)}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\tau-\theta}}.$$

Обозначая  $s^2 = 4a^2\tau$ , посчитаем сначала интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha z - \frac{z^2}{s^2} + \frac{2z\xi}{s^2} - \frac{\xi^2}{s^2}} \cdot dz &= \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{s^2} + z\left(\frac{2\xi}{s^2} - \alpha\right) - \frac{\xi^2}{s^2}} \cdot dz = \\ &= \int_0^\infty e^{-\left[\frac{z}{s} - \left(\frac{2\xi}{s^2} - \alpha\right)\frac{s}{2}\right]^2 - \left[\frac{\xi^2}{s^2} - \frac{s^2}{4}\left(\frac{2\xi}{s^2} - \alpha\right)^2\right]} \cdot dz = \left\{ \frac{s}{2} \left( \frac{2\xi}{s^2} - \alpha \right) = b \right\} = \\ &= e^{-\left(\frac{\xi^2}{s^2} - b^2\right)} \cdot s \cdot \int_0^\infty e^{-(z-b)^2} \cdot dz = s \cdot e^{-\left(\frac{\xi^2}{s^2} - b^2\right)} \cdot \int_{-b}^\infty e^{-z^2} \cdot dz = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \cdot s}{2} \cdot e^{-\left(\frac{\xi^2}{s^2} - b^2\right)} \cdot \{1 + \Phi(b)\}. \end{aligned}$$

И интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-\frac{b}{\theta}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} &= \left\{ \sqrt{\frac{b}{\theta}} = m; \frac{\sqrt{b} \cdot d\theta}{-2\theta^{3/2}} = dm \right\} = \int_\infty^{\sqrt{\frac{b}{\tau}}} e^{-m^2} \cdot \left( -\frac{2}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{m^2} \right) dm = \\ &= 2\sqrt{b} \cdot \frac{e^{-m^2}}{m} \Big|_\infty^{\sqrt{\frac{b}{\tau}}} + \int_\infty^{\sqrt{\frac{b}{\tau}}} 4\sqrt{b} \cdot e^{-m^2} \cdot dm = 2\tau \cdot e^{-\frac{b}{\tau}} - 2\sqrt{\pi b} \left( 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{\tau}}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$I_1(\xi, \tau) = \frac{1 + \Phi\left(a\sqrt{\tau} \cdot \left(\frac{\xi}{2a^2\tau} - \alpha\right)\right)}{2} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a^2\tau} + a^2\tau \cdot \left(\frac{\xi}{2a^2\tau} - \alpha\right)^2};$$

$$I_2(\xi, \tau) = \frac{\tau}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a^2\tau}} - \frac{\xi}{2a^2} \cdot \left( 1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2a\sqrt{\tau}}\right) \right).$$

Ответ: а)  $u(x, t) = I_1(x - vt, t) + I_2(x - vt, t)$ ;

б)  $u(x, t) = e^{-\beta t} \cdot I_1(x - vt, t)$ .

### 7. Задача о температурных волнах.

Найти распределение температуры земли с глубиной, считая поверхность Земли плоской, землю однородной средой, температуру на поверхности  $T = T_0 \sin \omega t$ .

#### Решение:

Пусть  $x$  – расстояние вглубь Земли, отсчитанное от поверхности,  $u(x, t)$  – температура.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, t) = T_0 \sin \omega t.$$

Требуется найти ограниченное установившееся периодическое по  $t$  решение (задача без начальных условий).

Естественно искать решение в виде волны, в то же время удобно, если оно будет представлять собой произведение функций, зависящих только от  $x$  и только от  $t$ . Эти требования можно совместить, если представить решение в комплексном виде.

Ищем  $u(x, t) = \text{Im } z(x, t)$ , где  $z(x, t) = T_0 \cdot e^{i\omega t + tkx}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial t} = \tilde{a}^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

Из двух последних условий находим  $i\omega = -\tilde{a}^2 k^2$ , отсюда  $k = \pm(1+i) \frac{\sqrt{\omega}}{2a}$ .

$$u(x, t) = A \cdot e^{-\frac{\sqrt{\omega}}{2a}x} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega}}{2a}x\right) + B \cdot e^{\frac{\sqrt{\omega}}{2a}x} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\sqrt{\omega}}{2a}x\right).$$

Решение является ограниченным, если  $B = 0$ . Из условий при  $x = 0$  следует  $A = T_0$ .

Ответ:  $u(x, t) = T_0 \cdot e^{-\frac{\sqrt{\omega}}{2a}x} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega}}{2a}x\right)$ .

### 8. Плоский источник малых возмущений движется равномерно с дозвуковой скоростью вдоль цилиндрической неограниченной трубки с газом. Считая, что возмущение давления в том месте, где находится источник в момент $t > 0$ , является известной функцией времени $f(t)$ , найти колебания газа слева и справа от источника, если начальный

момент времени газ был в невозмущенном состоянии, а источник находился в точке  $x = 0$ . Рассмотрим частный случай  $\Delta p = \sin \omega t$ .

Решение:

Обозначим  $u(x, t)$  – смещение частиц воздуха от положения равновесия;  $p(x, t)$  – давление;  $p_0$  – давление при равновесии;  $\tilde{p} = p - p_0$ ;  $\rho(x, t)$  – плотность газа;  $\rho_0$  – плотность при равновесии;  $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ .

Напишем закон сохранения вещества для элемента газа, занимавшего в положении равновесия участок  $(x, x + \Delta x)$

$$\rho_0 \Delta x = \rho(\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)).$$

Разделив на  $\Delta x$  и переходя к пределу, получаем

$$\rho_0 = \rho(1 + u_x). \quad (1)$$

Второй закон Ньютона имеет вид:

$$\rho u_{tt} = -p_x. \quad (2)$$

Изотерма уравнения состояния газа:

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (3)$$

По условию задачи колебания малые. Удерживая члены первого порядка малости, из (1) – (3), получаем:

$$\tilde{\rho} = -\rho_0 u_x; \quad \rho_0 u_{tt} = -\tilde{p}_x; \quad \frac{\tilde{p}}{p_0} = \gamma \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}.$$

Отсюда  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ;  $a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ ;  $u_x = -\tilde{p} \frac{1}{\gamma p_0}$  (первое уравнение

выполнено всюду, кроме точки  $x = ut$ , где находится источник возмущения).

В области  $x > ut$  получаем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \\ u_x|_{x=ut} = -\tilde{p}(t) \frac{1}{\gamma p_0}. \end{cases}$$

Как известно, общее решение уравнения колебаний имеет вид:

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае можем искать решение в виде волны, уходящей от границы:

$$u = f(x - at).$$

Подставляя такой вид решения в начальные и граничные условия, находим:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) = 0 & \text{при } x > 0, \\ u_x|_{x=vt} = f'(vt - at) = -\tilde{p}(t) \frac{1}{\gamma p_0} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 & \text{при } \alpha > 0, \\ f'(\alpha) = -\tilde{p}\left(-\frac{\alpha}{a-v}\right) \frac{1}{\gamma p_0} & \text{при } \alpha < 0, \end{cases}$$

интегрируя последнее уравнение, получаем

$$f(\alpha) = \frac{a-v}{\gamma p_0} \int_0^{\frac{\alpha}{a-v}} \tilde{p}(\xi) d\xi \quad \text{при } \alpha < 0.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > at, \\ \frac{a-v}{\gamma p_0} \int_0^{\frac{at-x}{a-v}} \tilde{p}(\xi) d\xi, & vt < x < at. \end{cases}$$

Аналогичным образом решаем задачу в области  $x < vt$ . Здесь решение ищем в виде:

$$u = f(x + at).$$

Получаем ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -at, \\ -\frac{a+v}{\gamma p_0} \int_0^{\frac{x+at}{a+v}} \tilde{p}(\xi) d\xi, & vt > x > -at. \end{cases}$$

В частности, при  $\tilde{p}(t) = A \sin \omega t$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -at \text{ и } x > at, \\ -A \frac{a+v}{\gamma p_0 \omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{a+v}(x+at)\right), & \text{при } -at < x < vt, \\ A \frac{a-v}{\gamma p_0 \omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{a-v}(x-at)\right), & \text{при } vt < x < at. \end{cases}$$

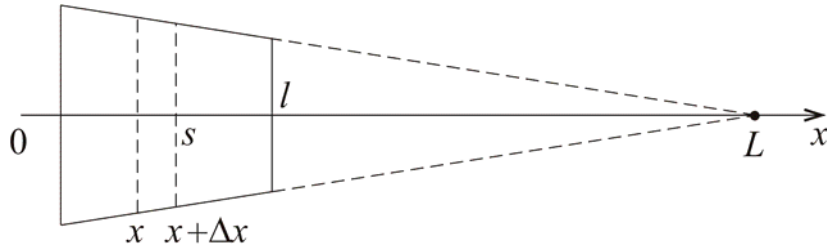
Имеет место эффект Доплера: по направлению движения источника частота волны  $\frac{a\omega}{a-v} > \omega$ ; в обратном направлении:  $\frac{a\omega}{a+v} < \omega$ .

9. Найти температуру стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, имеющего форму усеченного конуса, пренебрегая



искривлением изотермических поверхностей, если температура концов стержня поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня произвольна.

Решение:



Если пренебречь искривлением изотермических поверхностей, считать температуру  $u = u(x, t)$ , плотность потока тепла  $q = q(x, t)$ , то баланс тепла в слое  $(x, x + \Delta x)$  дает

$$\begin{aligned} \rho \Delta x S(x) \frac{\partial u}{\partial t} &= S(x)q(x, t) - S(x + \Delta x)q(x + \Delta x, t) = \\ &= -DS(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + DS(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}, \end{aligned}$$

где  $S(x) = \pi(x - L)^2$  – площадь сечения.

Отсюда

$$(L - x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( (L - x)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (a^2 = \frac{D}{\rho c}). \quad (1)$$

Граничные и начальные условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Из (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} (L - x) u_t &= \frac{1}{L - x} \left( (L - x)^2 u_{xx} - 2(L - x) u_x \right) = \\ &= (L - x) u_{xx} - 2u_x = ((L - x)u)_{xx}. \end{aligned}$$

Вводим функцию  $v = (L - x)u$ . Для нее получаем

$$v_t = a^2 v_{xx}; \quad v(0, t) = v(l, t) = 0; \quad v(x, 0) = (L - x)\varphi(x).$$

Решая задачу для  $v$  и возвращаясь к  $u$ , находим

$$u(x, t) = \frac{1}{L - x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (L - x)\varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

10. Свести к вариационной задаче следующую дифференциальную:

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = f(x); \quad u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad (p, q > 0).$$

Построить алгоритм решения вариационной задачи с помощью метода Ритца путем разложения по системе функций  $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$ . Доказать, что  $\bar{u}_k \Rightarrow u$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $\bar{u}_k$  функция, на которой достигается экстремум функционала в классе функций  $u_k(x) = \sum_{n=1}^k C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ .

Решение:

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = f(x) \quad (q, p > 0) \quad (0 < x < l), \right. \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Рассмотрим функционал

$$I[u] = \int_0^l (pu'^2 + qu^2 + 2fu) dx, \quad (3)$$

где  $u$  удовлетворяет условиям (2).

Экстремали этого функционала определяются уравнением Эйлера, которое совпадает с (1). Условие Лежандра  $F_{u'u'} = p > 0$  говорит о том, что на экстремали достигается сильный минимум. Следовательно, задача (1) сводится к нахождению функции, дающей сильный минимум функционалу (3) при условии (2).

Решаем полученную вариационную задачу методом Ритца. Обозначим: решение задачи (1), (2) как  $\bar{u}$ ;  $I[\bar{u}] = \mu$ ; множество функций

вида  $u_k(x) = \sum_{n=1}^k C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ , где  $C_n$  – произвольные коэффициенты, как

$U_k$ ; функцию, на которой достигается минимум  $I[u]$  как  $\bar{u}_k$ ;  $I[\bar{u}_k] = \mu_k$ .

1) Докажем, что последовательность  $\bar{u}_k$  будет минимизирующей для функционала  $I$  (т.е.  $\mu_k \rightarrow \mu$  при  $k \rightarrow \infty$ ).

По теореме Вейерштрасса для любой непрерывной функции  $\bar{u}'$  и любого  $\delta > 0$  найдется номер  $k$  и функция  $y'_k = b_0 + \sum_{n=1}^k b_n \cos \frac{\pi n}{l} x$

такие, что  $|\bar{u}' - y'_k| < \delta$ , для всех  $x \in [0, l]$ . При этом  $b_0 = \frac{1}{l} \int_0^l y'_k dx$ , так

как  $\int_0^l \cos \frac{\pi n}{l} x dx = 0$ .

Отсюда

$$|b_0| \leq \left| \frac{1}{l} \int_0^l |\bar{u}' - y'_k| dx \right| + \left| \frac{1}{l} \int_0^l \bar{u}' dx \right| < \delta, \text{ так как } \bar{u}(0) = \bar{u}(l) = 0.$$

Получаем

$$\left| \bar{u} - \sum_{n=1}^k \frac{b_n l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| = \left| \int_0^x \left( \bar{u}' - \sum_{n=1}^k b_n \cos \frac{\pi n}{l} x \right) dx \right| \leq \int_0^x (|\bar{u}' - y'_k| + |b_0|) dx \leq 2l\delta,$$

$$\left| \bar{u}' - \left( \sum_{n=1}^k \frac{b_n l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} x \right)' \right| = |\bar{u}' - y'_k + b_0| < 2\delta.$$

$\forall \delta_1 > 0$  найдется номер  $k$  и функция  $\tilde{u}_k \in U_k$ , такие что  $|\bar{u} - \tilde{u}_k| < \delta_1$  и  $|\bar{u}' - \tilde{u}'_k| < \delta_1$ .

$\forall \varepsilon > 0$  в силу непрерывности подинтегральной функции выражение для  $I$  при достаточно малом  $\delta_1$  будет выполнено:  $I(\tilde{u}_k) - I(\bar{u}) < \varepsilon$ . Поскольку на функции  $\bar{u}_k$  достигается минимум функционала  $I$  в классе функций  $U_k$ , то  $0 \leq \mu_k - \mu = I(\bar{u}_k) - I(\bar{u}) \leq I(\tilde{u}_k) - I(\bar{u}) < \varepsilon$ . Отсюда  $\mu_k \rightarrow \mu$  при  $k \rightarrow \infty$ .

2) Сводим вариационную задачу к алгебраической. Обозначим

$$\varphi_n = \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

$$I[u_k] = \int_0^l \left\{ p \left( \sum_{n=1}^k C_n \varphi'_n \right)^2 + q \left( \sum_{n=1}^k C_n \varphi_n \right)^2 + 2f \sum_{n=1}^k C_n \varphi_n \right\} dx =$$

$$= \sum_{n,m=1}^k \alpha_{n,m} C_n C_m + 2 \sum_{n=1}^k \beta_n C_n = \Phi(C_1, \dots, C_k),$$

$$\text{где } \alpha_{n,m} = \int_0^l (p \varphi'_n \varphi'_m + q \varphi_n \varphi_m) dx, \quad \beta_n = \int_0^l f \varphi_n dx.$$

Условие минимума  $\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) дает

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = \sum_{n=1}^k \alpha_{ni} C_n + \beta_i = 0. \quad (4)$$

Однородная система (4) имеет лишь тривиальное решение, и, тем самым, решение неоднородной системы единственно.

Из (4) находим  $C_i$  и тем самым  $\bar{u}_k$ .

3) Докажем, что  $\bar{u}_k \Rightarrow \bar{u}$  при  $k \rightarrow \infty$  на отрезке  $[0, l]$ .

$$|\bar{u} - \bar{u}_k| = \left| \int_0^l (\bar{u}' - \bar{u}'_k) dx \right| \leq \left[ \int_0^l (\bar{u}' - \bar{u}'_k)^2 dx \cdot \int_0^l 1^2 dx \right]^{1/2} = \sqrt{l} \left\{ \int_0^l (\bar{u}' - \bar{u}'_k)^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Обозначим  $\bar{u} - \bar{u}_k = \Delta_k$

$$\begin{aligned}
I[\bar{u}] - I[\bar{u}_k] &= \int_0^l \left\{ p(\bar{u}'^2 - \bar{u}_k'^2) + q(\bar{u}^2 - \bar{u}_k^2) + 2f(\bar{u} - \bar{u}_k) \right\} dx = \\
&= \int_0^l \left\{ p(2\Delta_k' \bar{u}' + \Delta_k'^2) + q(2\Delta_k \bar{u} + \Delta_k^2) + 2f\Delta_k \right\} dx = \\
&= \int_0^l [p\Delta_k'^2 + q\Delta_k^2] dx + 2 \int_0^l \Delta_k \left[ -(p\bar{u}')' + q\bar{u} + f \right] dx = \int_0^l [p\Delta_k'^2 + q\Delta_k^2] dx.
\end{aligned}$$

Из пункта 2) следует, что  $\bar{u}_k$  – минимизирующая последовательность. Отсюда

$$\mu_k - \mu = I[\bar{u}_k] - I[\bar{u}] = \int_0^l \left\{ p(\bar{u}' - \bar{u}_k')^2 + q(\bar{u} - \bar{u}_k)^2 \right\} dx \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^l (\bar{u}' - \bar{u}_k')^2 dx \leq \frac{1}{\min p} \int_0^l p(\bar{u}' - \bar{u}_k')^2 dx < \varepsilon$$

при достаточно большом  $k$ .

При этом из (5) получаем  $|\bar{u} - \bar{u}_k| \leq \sqrt{l\varepsilon}$ , что и требовалось доказать.

Итак, последовательность функций

$$\bar{u}_k(x) = \sum_{n=1}^k C_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где  $C_n$  определяются при каждом  $k$  из (4), равномерно сходятся к решению задачи (1).

11. Решить в области  $x > 0, y > 0$ , используя функцию Римана:

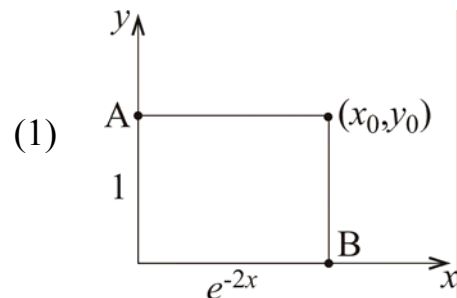
$$\begin{cases} u_{xy} + 2u_x + 2u = 0 \\ u|_{x=0} = e^{-2y} \\ u|_{y=0} = e^{-2x} \end{cases}$$

Решение:

Вводим  $\omega = ue^{-2y}$ . Для  $\omega$  имеем

$$\begin{cases} \omega_{xy} + 2\omega = 0, \\ \omega|_{x=0} = 1, \quad \omega|_{y=0} = e^{-2x}. \end{cases}$$

Решение (1) определяется выражением



$$\omega(x_0, y_0) = \frac{\omega(A) + \omega(B)}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B (\nu \omega_y - \omega \nu_y) dy + (\omega \nu_x - \nu \omega_x) dx, \quad (2)$$

где  $v$  – функция Римана, а интеграл от  $A$  до  $B$  проходится по участкам границ  $x=0$  и  $y=0$ . Явный вид функции Римана для уравнения задачи (1) будет

$$v(x_0, y_0, x, y) = J_0(2\sqrt{2(x_0 - x)(y_0 - y)}).$$

Подставляем в (2) граничные условия задачи (1), получаем

$$\begin{aligned} \omega(x_0, y_0) &= \frac{1 + e^{-2x_0}}{2} + \frac{1}{2} \int_{y_0}^0 v_y|_{x=0} dy - \frac{1}{2} \int_0^{x_0} (e^{-2x} v_x - 2e^{-2x} v)|_{y=0} dx = \\ &= \frac{1 + e^{-2x_0}}{2} + v|_{x=0}|_{y=y_0} - \frac{1}{2} e^{-2x} v|_{y=0}|_{x=0}^{x=x_0} - 2 \int_0^{x_0} e^{-2x} v|_{y=0} dx = \\ &= \frac{1 + e^{-2x_0}}{2} + \frac{1}{2} [J_0(2\sqrt{2x_0 y_0}) - 1] - \frac{1}{2} \left[ e^{-2x_0} - \frac{1}{2} J_0(2\sqrt{2x_0 y_0}) \right] - \\ &\quad - 2 \int_0^{x_0} e^{-2x} J_0(2\sqrt{2(x_0 - x)y}) = J_0(2\sqrt{2x_0 y_0}) - 2e^{-2x_0} \int_0^{x_0} e^{2x} J_0(2\sqrt{2xy_0}) dx. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что найденное решение удовлетворяет граничным условиям задачи (1).

$$\omega(0, y_0) = J_0(0) = 1, \quad \omega(x_0, 0) = 1 - 2e^{-2x_0} \int_0^{x_0} e^{2x} dx = e^{-2x_0}.$$

Ответ:

$$u(x, y) = e^{2y} \left\{ J_0(2\sqrt{2xy}) - 2e^{-2x} \int_0^x e^{2\xi} J_0(2\sqrt{2\xi y}) d\xi \right\}.$$

12. Решить краевую задачу:

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; & -\infty < x < \infty; \quad 1 < y < \infty \\ u|_{y=1} = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

Решение:

Характеристическое уравнение для (1) имеет вид

$$x^2 z_x^2 - y^2 z_y^2 = 0.$$

Отсюда либо

$$xz_x - yz_y = 0, \quad (2)$$

либо

$$xz_x + yz_y = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим случай (2). Для этого уравнения в частных производных первого порядка уравнением характеристик будет

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

Отсюда первый интеграл уравнения (2):

$$xy = C_1.$$

Аналогично первый интеграл (3):

$$\frac{x}{y} = C_2.$$

Согласно общему методу приведения уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду следует взять новые переменные

$\xi = xy$  и  $\eta = \frac{x}{y}$ . В этих переменных задача (1) принимает вид:

$$\begin{cases} 2\xi u_{\xi\eta} = u_{\eta}; & (\xi > \eta), \\ u|_{\xi=\eta} = \varphi(\xi); & (u_{\xi} - u_{\eta})\xi|_{\xi=\eta} = \psi(\xi). \end{cases} \quad (4)$$

(5)

Представляем (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(2\xi u_{\xi} - u) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$u = f(\xi) + \sqrt{\xi}g(\eta).$$

Подставляя в таком виде  $u$  в условия (5), получаем систему двух уравнений для определения функций  $f$  и  $g$ :

$$f(\xi) + \sqrt{\xi}g(\xi) = \varphi(\xi); \quad f'(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\xi}}g(\xi) - \sqrt{\xi}g'(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\xi}.$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(z) - \sqrt{z} \left\{ \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{z}} + \int_a^z \frac{\varphi(\alpha)}{4\alpha^{3/2}} d\alpha - \int_a^z \frac{\psi(\alpha)}{2\alpha^{3/2}} d\alpha + C \right\}; \\ g(z) &= \frac{\varphi(z)}{z} + \int_a^z \frac{\varphi(\alpha)}{4\alpha^{3/2}} d\alpha - \int_a^z \frac{\psi(\alpha)}{2\alpha^{3/2}} d\alpha + C. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(x, y) = f(xy) + \sqrt{xy}g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\varphi(xy) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)}{2} + \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} (\varphi(\alpha) - 2\psi(\alpha)) \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}}.$$

**Спектральный критерий (условие Неймана) устойчивости  
разностных схем.**

1. Проверить выполнение необходимого спектрального условия Неймана для следующих разностных уравнений:

$$1) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_n^s}{h} = 0;$$

$$2) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_n^s - y_{n-1}^s}{h} = 0;$$

$$3) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_{n-1}^s}{2h} - \frac{\tau}{2h^2} (y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s) = 0;$$

$$4) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_{n-1}^s}{2h} = 0;$$

$$5) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s}{h^2} = 0;$$

$$6) \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^{s+1} - 2y_n^{s+1} + y_{n-1}^{s+1}}{h^2} = 0;$$

$$7) \frac{u_{n,m}^{s+1} - u_{n,m}^s}{\tau} - \frac{u_{n+1,m}^s - 2u_{n,m}^s + u_{n-1,m}^s}{h^2} - \frac{u_{n,m+1}^s - 2u_{n,m}^s + u_{n,m-1}^s}{h^2} = 0;$$

$$8) \frac{y_n^{s+1} - 2y_n^s + y_n^{s-1}}{\tau^2} - \frac{y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s}{h^2} = 0.$$

1) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_n^s}{h} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Введем разностную равномерную норму на слое:

$$\|y^s\| = \max_n |y_n^s|. \quad (3)$$

Условие устойчивости по начальным данным имеет вид:

$$\|y^s\| \leq c \|y^0\| \quad (4)$$

или

$$\max_n |y_n^s| \leq c \max_n |y_n^0|. \quad (5)$$

Для устойчивости задачи Коши (1), (2) по начальным данным необходимо, чтобы условие (5) выполнялось, в частности, если начальная функция является какой-либо гармоникой

$$\psi_n = e^{ian}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – вещественный параметр. Решение задачи (1), (2) при начальном условии (6) имеет вид

$$y_n^s = \lambda^s e^{ian}. \quad (7)$$

Для определения  $\lambda = \lambda(\alpha)$  подставим выражение (7) в уравнение (1). В результате получим

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + r \cdot e^{ia}, \quad \text{где } r = \frac{\tau}{h} = \text{const}. \quad (8)$$

Из соотношения (7) получим равенство

$$\max_n |y_n^s| = |\lambda(\alpha)|^s \max_n |y_n^0|. \quad (9)$$

Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы при всех вещественных  $\alpha$  выполнялось неравенство

$$|\lambda(\alpha)|^s \leq c, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

или

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1 + c_1 \tau, \quad (11)$$

где  $c_1$  не зависящая от  $\alpha$  и  $\tau$  постоянная.

Условие (11) называется необходимым спектральным условием Неймана.

Гармоника  $\{e^{ian}\}$  является собственной функцией оператора перехода со слоя  $s$  на слой  $s + 1$

$$y_n^{s+1} = (1 - r)y_n^s + r y_{n+1}^s, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (12)$$

Число  $\lambda(\alpha) = 1 - r + r \cdot e^{ia}$  является соответствующим этой гармонике собственным значением оператора перехода. Линия, которую пробегает точка  $\lambda(\alpha)$  на комплексной плоскости, когда  $\alpha$  пробегает вещественную ось, вся состоит из собственных значений и является спектром оператора перехода.

Согласно необходимому условию устойчивости (11) спектр оператора перехода, соответствующего разностному уравнению задачи (1), (2), должен лежать в круге радиуса  $1 + c_1 \tau$  на комплексной плоскости. Если, как в случае задачи (1), (2), спектр (8) не зависит от  $\tau$ , то условие (11) равносильно требованию, чтобы спектр  $\lambda(\alpha)$  лежал в единичном круге

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1. \quad (13)$$

Спектр задачи (1), (2) представляет собой окружность на комплексной плоскости с радиусом  $r$  и центром в точке  $1 - r$ . При  $r < 1$  спектральная окружность лежит в единичном круге, касаясь его в точке  $\lambda = 1$ , при  $r = 1$  совпадает с единичной окружностью,  $r > 1$  лежит вне



единичного круга. Необходимое условие устойчивости выполнено при  $r \leq 1$  и не выполнено при  $r > 1$  (см. рис. 1).

Замечание 1.

Можно показать, что при  $r \leq 1$  схема (1), (2) является устойчивой, а при  $r > 1$  – неустойчивой, т.е. в данном случае необходимое условие устойчивости оказывается достаточно чувствительным, чтобы отделить случай устойчивости от случая неустойчивости.

Замечание 2.

Если необходимое условие Неймана не выполнено, то ни при каком разумном выборе норм нельзя ожидать устойчивости, а в случае его выполнения можно надеяться, что при некотором разумном выборе норм устойчивости имеет место.

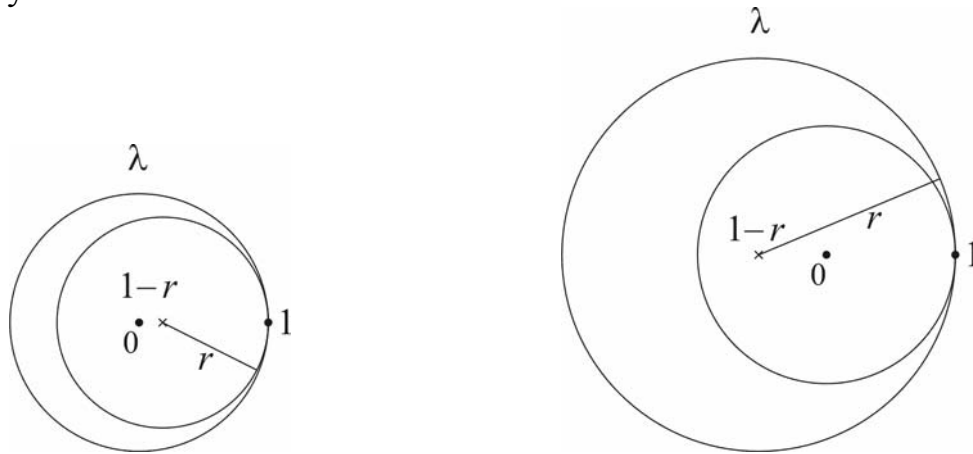


Рис. 1.

Точкой отмечен центр 0 единичного круга, крестиком – центр  $1 - r$  спектральной окружности.

2) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_n^s - y_{n-1}^s}{h} = 0, & s = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y_n^0 = \psi_n, & n = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad (15)$$

Подставляя (7) в (14), получим

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - r \cdot e^{-i\alpha}. \quad (16)$$

Спектр представляет собой окружность с центром в точке  $1 + r$  и радиусом  $r$ . Ни при каком  $r$  спектр не лежит в единичном круге. Условие устойчивости (13) всегда не выполнено (см. рис. 2).

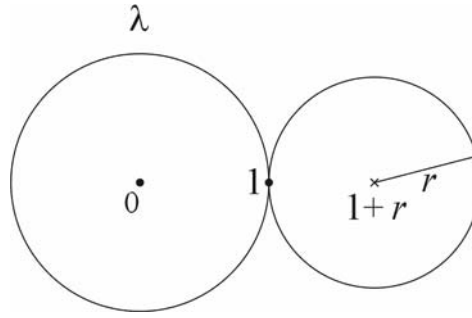


Рис. 2.

3) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_{n-1}^s}{2h} - \frac{\tau}{2h} (y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s) = 0, & s = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (17)$$

$$y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (18)$$

Из (7) и (17) получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h} - \frac{\tau}{2h} (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 0. \quad (19)$$

Поскольку

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin \alpha,$$

$$\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{4} = - \left( \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2i} \right)^2 = -\sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (20)$$

то из формулы (19) получается выражение

$$\lambda = 1 + ir \sin \alpha - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (21)$$

$$|\lambda(\alpha)|^2 = \left( 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$1 - |\lambda(\alpha)|^2 = 4r^2(1 - r^2) \sin^4 \frac{\alpha}{2}. \quad (22)$$

Условие Неймана выполнено, если правая часть неотрицательна, т.е. при  $r \leq 1$ , и не выполнено при  $r > 1$ .

4) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - \frac{y_{n+1}^s - y_{n-1}^s}{2h} = 0, & s = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (23)$$

$$y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (24)$$

Подставляя (7) в (23), получим

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h} = 0$$

или

$$\lambda(\alpha) = 1 + i \frac{\tau}{h} \sin \alpha. \quad (25)$$

Спектр  $\lambda = \lambda(\alpha)$  заполняет вертикальный отрезок длины  $\frac{2\tau}{h}$ , проходящий через точку  $\lambda = 1$  (см. рис. 3).

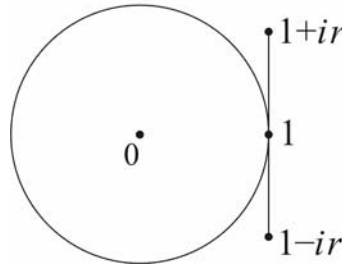


Рис. 3.

Если  $\frac{\tau}{h} = r = const$ , т.е. при  $h \rightarrow 0$   $\tau$  меняется, как  $O(h)$ , то спектр не лежит в единичном круге и условие (13) не выполняется.

Если же при  $h \rightarrow 0$   $\tau$  меняется как  $O(h^2)$ , так что  $\tau \approx rh^2$ , то самая далекая от точки  $\lambda = 0$  точка  $\lambda(\alpha)$  имеет модуль

$$|\lambda(\alpha)|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{h}\right)^2} = \sqrt{1 + \tau r} \leq 1 + \frac{r}{2}\tau \quad (25)$$

и условие (11) будет выполнено при  $c_1 = \frac{r}{2}$ .

#### Замечание.

Рассмотренные в пунктах 1) – 4) разностные схемы аппроксимируют задачу Коши для однородного уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (27)$$

При этом разностные задачи Коши (1), (2) и (14), (15) аппроксимируют задачу (26), (27) с порядком  $O(\tau + h)$ , т.е. первым порядком по  $\tau$  и первым порядком по  $h$ , а задачи (17), (18) и (23), (24) с порядком  $O(\tau + h^2)$ , т.е. первым порядком по  $\tau$  и вторым порядком по  $h$ .

5) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s}{h^2} = 0, & s = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (28)$$

$$y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad a = \text{const} \quad (29)$$

Подставляя выражение (7) в разностное уравнение (28), будем иметь

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h^2} = 0. \quad (30)$$

Используя (20), получим

$$\lambda(\alpha) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \text{где } r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (31)$$

При изменении  $\alpha$  число  $\lambda(\alpha)$  пробегает отрезок  $1 - 4ra^2 \leq \lambda \leq 1$  вещественной оси (см. рис. 4).

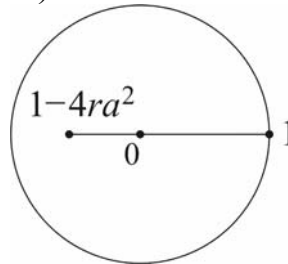


Рис. 4.

Для устойчивости необходимо, чтобы этот отрезок лежал в единичном круге, т.е. чтобы выполнялось неравенство  $1 - 4ra^2 \geq -1$  или

$$r \leq \frac{1}{2a^2}. \quad (32)$$

6) Рассмотрим теперь разностную задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{s+1} - y_n^s}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^{s+1} - 2y_n^{s+1} + y_{n-1}^{s+1}}{h^2} = 0, & s = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (33)$$

$$y_n^0 = \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad a = \text{const} \quad (34)$$

Выкладки, аналогичные проделанным в предыдущем пункте, приводят к выражению:

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (35)$$

Спектр задачи (33), (34) заполняет отрезок

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leq \lambda \leq 1 \quad (36)$$

вещественной оси и условие (13) выполнено при любом  $r$ .

Замечание.

Рассмотренные в пунктах 5) и 6) разностные схемы аппроксимируют с порядком  $O(\tau + h^2)$  задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (37)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (38)$$

Разностная схема (28), (29) является условно устойчивой явной схемой при выполнении условия (32), т.е.  $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ , а разностная схема (33), (34) – безусловно устойчивой.

7) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{n,m}^{s+1} - u_{n,m}^s}{\tau} - \frac{u_{n+1,m}^s - 2u_{n,m}^s + u_{n-1,m}^s}{h^2} - \\ - \frac{u_{n,m+1}^s - 2u_{n,m}^s + u_{n,m-1}^s}{h^2} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, \\ u_{n,m}^0 = \psi_{n,m}, \quad n, m = 0, \pm 1, \dots \end{array} \right. \quad (39)$$

Зададим начальную функцию  $\psi_{n,m}$  в виде двумерной гармоники  $\psi_{n,m} = e^{i(\alpha n + \beta m)}$ , зависящей от двух вещественных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Решение, соответствующее этой начальной функции, найдем в виде

$$u_{n,m}^s = \lambda^s(\alpha, \beta) \cdot e^{i(\alpha n + \beta m)}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39), получим

$$\lambda(\alpha, \beta) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (42)$$

При изменении  $\alpha$  и  $\beta$  точка  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$  пробегает отрезок  $1 - 8r \leq \lambda \leq 1$  вещественной оси. Условие устойчивости (13) выполняется, если  $1 - 8r \geq -1$  или  $r \leq \frac{1}{4}$ .

Замечание.

Разностная задача (39), (40) аппроксимирует с порядком  $O(\tau + h^2)$  задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & -\infty < x, y < \infty, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), & -\infty < x, y < \infty \end{cases} \quad (43)$$

$$(44)$$

8) Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{s+1} - 2y_n^s + y_n^{s-1}}{\tau^2} - \frac{y_{n+1}^s - 2y_n^s + y_{n-1}^s}{h^2} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, \\ y_n^0 = \varphi_n, \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n^0 = \varphi_n, \\ n = 0, \pm 1, \dots \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n, \\ n = 0, \pm 1, \dots \end{array} \right. \quad (47)$$

Из формул (7) и (45) получим следующее уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - 2 \left( 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \lambda + 1 = 0, \quad \text{где } r = \frac{\tau}{h}. \quad (48)$$

Так как произведение корней уравнения (48) равно единице, то если его дискриминант

$$D(\alpha) = 4r^2 \sin^2 \alpha \cdot \left( r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \quad (49)$$

отрицателен, то корни  $\lambda_1(\alpha)$  и  $\lambda_2(\alpha)$  комплексно-сопряженные и равные единице по модулю. Если  $r < 1$  дискриминант остается отрицательным при всех  $\alpha$  и спектр заполняет часть единичной окружности (см. рис. 5а). Если  $r = 1$ , то спектр заполняет всю окружность (см. рис. 5б). Если  $r > 1$ , то по мере увеличения  $\alpha$  от нуля до  $\pi$  корни  $\lambda_1(\alpha)$  и  $\lambda_2(\alpha)$  движутся из точки  $\lambda = 1$  по единичной окружности в противоположных направлениях пока не сольются в точке  $\lambda = -1$ , а затем один из корней пойдет из точки  $\lambda = -1$  по вещественной оси влево, а другой вправо, причем  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$  (см. рис. 5в). Условие устойчивости выполнено при  $r \leq 1$ .

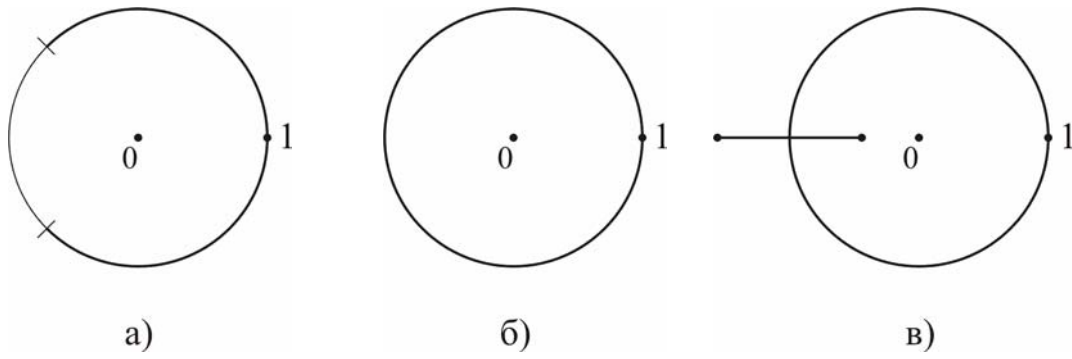


Рис. 5.

Замечание.

Разностная задача (45) – (47) аппроксимирует с порядком  $O(\tau^2 + h^2)$  задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty, t < 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (52)$$

### Акустический диполь.

Центр шара радиуса  $a$  колеблется вдоль полярной оси со скоростью  $v_0 e^{-i\omega t}$ . Если  $a \ll \lambda$  (или  $ka \ll 1$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны), то такой акустический излучатель в форме малого колеблющегося шара называется акустическим диполем. Найти поток энергии и полную мощность, излучаемую акустическим диполем.

Введем сферическую систему координат, начало которой находится в центре покоящегося шара. Учитывая гармоничность процесса во времени, определяемую множителем  $e^{-i\omega t}$ , для потенциала скоростей  $u(r, \theta)$  получим следующую краевую задачу в области  $D_e$ , внешней по отношению к шару радиуса  $a$ :

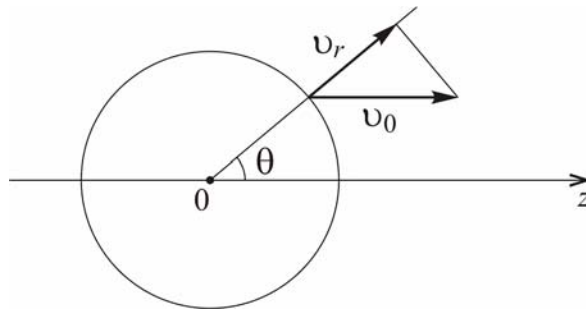
$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad r > a, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a) = -v_0 \cos \theta, \quad r = a, \quad (2)$$

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4)$$

При выводе граничного условия (2) мы учли, что  $v_r = v_0 \cdot \cos \theta$  (см. рис.).



С помощью метода разделения переменных решение задачи (1) – (4) можно построить в виде

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (5)$$

сферическая функция Ханкеля  $\zeta_n^{(1)}(z)$  имеет вид

$$\zeta_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z), \quad (6)$$

причем, используя асимптотику функции Ханкеля, легко получить, что



$$\zeta_n^{(1)}(z) = \begin{cases} \frac{e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}}{z} + \dots, & z \gg 1, \\ -i \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \cdot z^n + \dots, & z \ll 1. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя (5) в (2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n k \zeta_n^{(1)'}(ka) P_n(\cos \theta) = -\nu_0 \cos \theta = -\nu_0 P_1(\cos \theta),$$

откуда следует, что  $A_n = 0$  при  $n = 2, 3, \dots$  и

$$A_1 = -\frac{\nu_0}{k \zeta_1^{(1)'}(ka)}, \quad (8)$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

Из формул (5) и (8) следует, что потенциал скоростей имеет вид

$$u(r, \theta) = -\frac{\nu_0}{k} \cdot \frac{\zeta_1^{(1)}(kr)}{\zeta_1^{(1)'}(ka)} \cdot P_1(\cos \theta). \quad (9)$$

Радиальная составляющая скорости  $\nu_r$  равна

$$\nu_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = \nu_0 \frac{\zeta_1^{(1)'}(kr)}{\zeta_1^{(1)'}(ka)} \cdot P_1(\cos \theta). \quad (10)$$

Преобразуем  $\zeta_1^{(1)'}(kr)$ :

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(1)'}(z) &= -\frac{1}{2z} \zeta_1^{(1)}(z) + \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{\frac{3}{2}}^{(1)'}(z) = \\ &= -\frac{1}{2z} \zeta_1^{(1)}(z) + \frac{1}{2} (\zeta_0^{(1)}(z) - \zeta_2^{(1)}(z)) = \frac{1}{3} (\zeta_0^{(1)}(z) - 2\zeta_2^{(1)}(z)) \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, для радиальной составляющей скорости получаем окончательное выражение:

$$\nu_r(r, \theta) = \frac{\nu_0}{3\zeta_1^{(1)'}(ka)} (\zeta_0^{(1)}(kr) - 2\zeta_2^{(1)}(kr)) \cdot P_1(\cos \theta). \quad (12)$$

Используя выражение для потенциала (9), получаем формулу для давления воздуха:

$$p(r, \theta) = -i\omega\rho_0 u(r, \theta) = A \cdot \zeta_1^{(1)}(kr) \cdot P_1(\cos \theta), \quad (13)$$

где коэффициент  $A$  имеет вид:

$$A = \frac{i c \rho_0 \nu_0}{\zeta_1^{(1)'}(ka)}. \quad (14)$$

Если  $ka \ll 1$ , то из формулы (7) получим:

$$\zeta_1^{(1)}(ka) = \frac{2i}{(ka)^3} + \dots \quad (15)$$

и

$$A = \frac{1}{2} c \rho_0 v_0 (ka)^3. \quad (16)$$

Полная сила  $F$ , действующая на шар в направлении его колебаний, равна

$$F = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a p(a, \theta) \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{4}{3} \pi a A \zeta_1^{(1)}(ka). \quad (17)$$

Если  $ka \ll 1$ , то

$$F \approx -i\omega \frac{2}{3} \pi \rho_0 a^3 v_0. \quad (18)$$

В волновой зоне при  $kr \gg 1$ , используя формулы (7), (10), (14), получим:

$$v_r = v_0 \frac{\zeta_1^{(1)'}(kr)}{\zeta_1^{(1)'}(ka)} \cdot \cos \theta = \frac{A}{i c \rho_0} \cdot \zeta_1^{(1)'}(kr) \cos \theta \approx \quad (19)$$

$$\approx \frac{A}{i c \rho_0} \cdot \left( \frac{e^{i(kr-\pi)}}{kr} \right)' \cos \theta \approx \frac{A}{c \rho_0} \cdot \frac{e^{i(kr-\pi)}}{kr} \cdot \cos \theta,$$

$$p = A \cdot \zeta_1^{(1)}(kr) \cos \theta \approx A \cdot \frac{e^{i(kr-\pi)}}{kr} \cdot \cos \theta. \quad (20)$$

Поток энергии, излучаемый акустическим диполем в единицу времени, равен (звездочка означает знак комплексного сопряжения):

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p v^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( A \frac{e^{i(kr-\pi)}}{kr} \cos \theta \frac{A^*}{c \rho_0} \frac{e^{-i(kr-\pi)}}{kr} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|A|^2 \cos^2 \theta}{c \rho_0 (kr)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{c \rho_0 (ka)^6 v_0^2}{(kr)^2} \cdot \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Полная мощность, излучаемая акустическим диполем, равна:

$$\Pi = \int_{\Sigma^1} \bar{Y} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y}(r, \theta) \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\pi}{6} c \rho_0 v_0^2 a^2 (ak)^4, \quad (22)$$

где  $\Sigma^1$  – единичная сфера.

Таким образом, получаем, что полная мощность пропорциональна четвертой степени волнового числа или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:  $\Pi \sim k^4$  или  $\Pi \sim \frac{1}{\lambda^4}$ .

### Рассеяние плоской звуковой волны на цилиндрическом препятствии.

Плоская звуковая волна распространяется в направлении, перпендикулярном к оси бесконечного жесткого цилиндра радиуса  $a$ . Найти рассеянную волну. Рассмотреть случаи больших и малых расстояний от цилиндра.

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой направим вдоль оси цилиндра. Пусть плоская волна  $\bar{p}(M, t)$ , где  $\bar{p}(M, t)$  – давление в точке  $M$  в момент времени  $t$ , распространяется вдоль оси  $x$ :

$$\bar{p}(M, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} = p_0 \cdot e^{-i\omega t}, \text{ где } p_0 = Ae^{ikx} = Ae^{ikr \cos \varphi}. \quad (1)$$

Обозначим через  $\bar{p}_s(M, t)$  давление в рассеянной волне. Тогда, учитывая гармоничность процесса во времени и записывая  $\bar{p}_s(M, t) = p_s(M) \cdot e^{-i\omega t}$ , получим для  $p_s(M)$  внешнюю краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_s + k^2 p_s = 0, \quad r > a \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p_s}{\partial r} = \frac{\partial p_0}{\partial r}, \quad r = a, \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} p_s = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{array} \right\} \quad (5)$$

где  $a$  – радиус цилиндра. При получении граничного условия (3) мы учли, что радиальная скорость в рассеянной волне  $v_{sr}$  связана с давлением  $p_s$  следующим соотношением:

$$v_{sr} = \frac{1}{ikc\rho_0} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial r}, \quad (6)$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность,  $k = \frac{\omega}{c}$  – волновое число,  $c$  – скорость звука.

Решая задачу (2) – (5) методом разделения переменных, получим для давления и радиальной скорости в рассеянной волне следующие выражения:

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cdot H_m^{(1)}(kr) \cdot \cos m\varphi, \quad (7)$$

$$v_{sr} = \frac{1}{ic\rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)'}(kr) \cdot \cos m\varphi. \quad (8)$$

Отметим, что штрих в формулах (7) и (8) означает производную по полному аргументу.

Коэффициенты разложения  $B_m$  определяются из граничного условия (3). Для их определения необходимо разложить в ряд плоскую волну (1).

Имеем ( $x = kr$ ):

$$e^{ix \cos \varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\varphi,$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi,$$

$$C_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Воспользуемся формулой

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ix \sin \xi + i\nu\xi} d\xi.$$

Положим  $\nu = m$  и  $\varphi = \xi - \frac{3}{2}\pi$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix \cos \varphi + im\varphi} d\varphi = \\ &= 2 \cdot \frac{e^{-m\frac{3}{2}\pi i}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ix \sin \xi + im\xi} d\xi = 2i^m J_m(x), \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Аналогично

$$C_0 = J_0(x).$$

В результате получаем формулу разложения плоской волны в ряд:

$$Ae^{ikr \cos \varphi} = A \left\{ J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(kr) \cos m\varphi \right\}. \quad (9)$$

Подставив формулы (8) и (9) в граничное условие (3), будем иметь

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)'}(ka) \cos m\varphi = A \left\{ J_0'(ka) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m'(ka) \cos m\varphi \right\}. \quad (10)$$

Из формулы (10) получаем

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} \cdot A, \\ B_m &= \frac{2i^m J_m'(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} \cdot A \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

В дальней (волновой) зоне при  $r \rightarrow \infty$  будем иметь

$$\begin{aligned}
 H_m^{(1)}(kr) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \approx \\
 &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}m} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot (-i)^m.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Из формул (7), (8) и (12) получим, что в дальней зоне (при  $kr \gg 1$ ) давление и радиальная скорость в рассеянной волне соответственно равны:

$$p_s \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-i)^m \cos m\varphi, \tag{13}$$

$$v_{sr} \approx \frac{1}{c\rho_0} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-i)^m \cos m\varphi. \tag{14}$$

### Пульсирующий цилиндр.

Пусть цилиндр радиуса  $a$  пульсирует, т.е. сжимается и расширяется равномерно по гармоническому закону. Его скорость на поверхности  $r = a$  равна  $v_0 e^{-i\omega t}$ .

Найти давление, радиальную скорость воздуха на больших расстояниях от оси цилиндра, а также поток энергии.

Введем цилиндрическую систему координат, ось которой направим вдоль оси цилиндра. Тогда, учитывая гармоническую зависимость процесса от времени, определяемую множителем  $e^{-i\omega t}$ , получим в области  $D_e$ , внешней по отношению к цилиндру, для потенциала скоростей  $u(M)$  краевую задачу. При этом, поскольку цилиндр является бесконечным, потенциал скоростей будет зависеть от двух переменных  $u = u(r, \varphi)$  и задача будет двумерной:

$$\begin{cases} \Delta_2 u + k^2 u = 0, & r > a \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -v_0, & r = a \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

Решая задачу (1) – (3) методом разделения переменных, будем иметь:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (4)$$

Коэффициент разложения находим из граничного условия (2):

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k H_n^{(1)'}(ka) \cdot (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -v_0, \quad (5)$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

Из формулы (5) вытекает, что  $B_n = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $A_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а коэффициент  $A_0$  определяется из условия

$$A_0 k H_0^{(1)'}(ka) = -v_0$$

и равняется

$$A_0 = -\frac{v_0}{k H_0^{(1)'}(ka)} = \frac{v_0}{k H_1^{(1)}(ka)}. \quad (6)$$

Таким образом, потенциал скоростей  $u(r)$  равен

$$u(r) = \frac{\nu_0}{k} \cdot \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)}, \quad (7)$$

а радиальная составляющая скорости имеет вид

$$\nu_r(r) = -\frac{\partial u(r)}{\partial r} = -\frac{\nu_0}{k} \cdot \frac{kH_0^{(1)'}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)} = \nu_0 \cdot \frac{H_1^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)}. \quad (8)$$

Давление воздуха  $p$  связано с потенциалом скоростей  $u(r)$  следующим образом:

$$p(r) = -i\rho_0\omega u. \quad (9)$$

Из формул (7) и (9) получаем:

$$p(r) = -i\rho_0 \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)}. \quad (10)$$

Безразмерный акустический импеданс  $\zeta$  будет равен

$$\zeta = \frac{p}{\rho_0 \nu_r c} = -i \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(kr)}. \quad (11)$$

На больших расстояниях при  $kr \gg 1$  следует воспользоваться асимптотической формулой

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right). \quad (12)$$

Из формулы (12) следует:

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (13)$$

$$H_1^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (14)$$

Применяя формулы (13) и (14), будем иметь при  $kr \gg 1$ :

$$\nu_r(r) \approx -i \frac{\nu_0}{H_1^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (15)$$

$$p(r) \approx -i \frac{c\rho_0\nu_0}{H_1^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (16)$$

$$\zeta \approx 1. \quad (17)$$

Используя формулы (15) и (16), получаем выражение для потока энергии:

$$\bar{Y} = 0,5 \cdot p \cdot \nu_r^* \approx \frac{c\rho_0\nu_0^2}{\pi kr |H_1^{(1)}(ka)|^2}. \quad (18)$$