2007г. Л.1
2009г.

Глава 9 Функции многих переменных.

Физ. пример: $u = T(x,y,z,t)$ – температура в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t.

§1. Понятие m-мерного координатного пространства.

Определение. Совокупность m чисел наз-ся упорядоченной, если указано, какое из чисел считается первым, какое вторым и т. д. Произвольную упорядоченную совокупность m чисел будем обозначать так: $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е. числа записаны в порядке их номеров.

Определение. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей m чисел наз-ся m-мерным коорд-м пр-вом. Каждая из совокупностей m чисел наз-ся точкой m-мерного пр-ва. Обозначение: $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ наз-ся координатами т. M. Точка $O(0,0,\dots,0)$ наз-ся началом координат.

Введём расстояние между точками $M_1(x_1, \dots, x_m)$ и $M_2(y_1, \dots, y_m)$ по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}. \quad (1)$$

Определение. Коорд. пр-во с введенным по ф-ле (1) расстоянием между точками наз-ся m-мерным евклидовым пр-вом. Обозначения: E^m, R^m.

R^1 – числовая прямая, R^2 – плоскость, R^3 – трёхмерное пр-во.

Пусть $A \in R^m$, $r > 0$ – число.

Мн-во $\{M : \rho(M, A) \le r\}$ наз-ся m-мерным шаром радиуса r с центром в т. A.

$\{M : \rho(M, A) < r\}$ – открытый m-мерный шар;

открытый шар $\{M : \rho(M, A) < \varepsilon\}$ наз-ся ε-окр. т. A.

$\{M : \rho(M, A) = r\}$ – m-мерная сфера.

Пусть $A(a_1, \dots, a_m)$, $d_1, \dots, d_m$ — положит. числа.

Мн-во $\{ M(x_1, \dots, x_m) : |x_1 - a_1| \le d_1, \dots, |x_m - a_m| \le d_m \}$ наз-ся
<u>m-мерным параллелепипедом</u>.

Пусть $\{M\}$ — какое-то мн-во точек из R^m.

Точка A наз-ся <u>внутренней</u> точкой $\{M\}$, если $\exists$ ε-окр. т. A, целиком $\in \{M\}$.

Точка A наз-ся <u>граничной</u> точкой $\{M\}$, если в любой ε-окр. т. A содержатся как точки из $\{M\}$, так и точки $\notin \{M\}$.

Гр. точка может $\in \{M\}$ и может $\notin \{M\}$.

Мн-во $\{M\}$ наз-ся <u>открытым</u>, если все его точки — внутренние.

Мн-во $\{M\}$ наз-ся <u>замкнутым</u>, если оно содержит все свои граничные точки. Мн-во всех граничных точек наз-ся <u>границей</u> мн-ва $\{M\}$.

Объединение мн-ва $\{M\}$ и его границы (т.е. добавление ко мн-ву $\{M\}$ всех его граничных точек) наз-ся <u>замыканием</u> мн-ва $\{M\}$. Замкнутое мн-во совпадает со своим замыканием.

Точка A наз-ся <u>предельной</u> точкой мн-ва $\{M\}$, если в любой ε-окр. т. A содержатся точки из $\{M\}$, отличные от A. (Предельная точка может $\in \{M\}$ и может $\notin \{M\}$).

Точка A наз-ся <u>изолированной</u> точкой $\{M\}$, если $A \in \{M\}$ и $\exists$ ε-окр. т. A, в которой нет других точек из $\{M\}$, кроме A.

<u>Задача 1.</u> Док-ть, что любая внутр. точка мн-ва яв-ся его предельной точкой, а граничная точка мн-ва может быть его предельной точкой и может быть изолир. точкой.

<u>Задача 2.</u> Доказать, что сфера — замкнутое мн-во.

<u>Пример.</u> Рассмотрим пр-во R^2 (плоскость). Оно яв-ся одновременно и открытым мн-вом и замкнутым, все точки этого мн-ва — внутренние.
Рассмотрим теперь пр-во R^3 и произвольную плоскость в R^3. Она яв-ся замкнутым мн-вом, все её точки — граничные точки этой плоскости, как мн-ва в R^3.

Мн-во $\{M\}$ наз-ся <u>ограниченным</u>, если все его точки содержатся в некотором шаре.

т.е. мн-во всех точек $M(x_1, x_2, x_3)$, коорд. которых удовл. ур-ю $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$, Мн-во точек $L = \{M(x_1,\dots,x_m) : x_1=\varphi_1(t), \dots, x_m=\varphi_m(t), \alpha\le t\le\beta;$ $\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)$ — непр. ф-ции на $[\alpha,\beta]\}$ наз-ся <u>непрерывной кривой</u> в пр-ве R^m. Если точки $A(\varphi_1(\alpha),\dots,\varphi_m(\alpha))$ и $B(\varphi_1(\beta),\dots,\varphi_m(\beta))$ не совпадают, то они наз-ся <u>концами кривой</u> L. Говорят также, что кривая L соединяет точки A и B.

Мн-во точек $\{M(x_1,\dots,x_m) : x_1=x_1^0+\alpha_1 t, \dots, x_m=x_m^0+\alpha_m t, -\infty<t<\infty\}$, где $x_1^0,\dots,x_m^0, \alpha_1,\dots,\alpha_m$ — нек. числа, наз-ся <u>прямой</u> в пр-ве R^m. Эта прямая проходит через т. $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0)$.

Мн-во $\{M\}$ наз-ся <u>связным</u>, если любые две точки этого мн-ва можно соединить непрерывной кривой, целиком $\in \{M\}$.

Любое открытое связное мн-во, содержащее точку A, наз-ся <u>окрестностью</u> точки A.

<u>Задача 3</u>. Док-ть, что в любой окр-ти т. A содержится некоторая ε-окр. этой точки.

§2. Последовательности точек в R^m.

Если каждому натуральному n поставлена в соответствие точка $M_n \in R^m$, то говорят, что задана посл-ть точек $\{M_n\}$ в пр-ве R^m.

<u>Опр.</u> Точка A наз-ся пределом посл-ти $\{M_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(M_n,A)=0$

<u>Обозначение</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$ или $M_n \to A$ при $n\to\infty$.

<u>Лемма 1</u>. $\{M_n(x_1^{(n)},\dots,x_m^{(n)})\} \to A(a_1,\dots,a_m)$

$$\Updownarrow$$

$$\{x_1^{(n)}\}\to a_1,\ \{x_2^{(n)}\}\to a_2,\ \dots,\ \{x_m^{(n)}\}\to a_m.$$

Утверждение Л.1 следует из р-ва $\rho(M_n,A)=\sqrt{(x_1^{(n)}-a_1)^2+\dots+(x_m^{(n)}-a_m)^2}$.

<u>Опр.</u> Пос-ть $\{M_n\}$ наз-ся <u>фундаментальной</u>, если $\forall \varepsilon>0\ \exists N$, такое, что $\forall n>N$ и $\forall m>N$: $\rho(M_n, M_m)<\varepsilon$.

<u>Лемма 2</u>

$\{M_n(x_1^{(n)},\dots,x_m^{(n)})\}$ – фунд. $\Leftrightarrow$ $\{x_1^{(n)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ – фунд. числовые пос-ти.

<u>Док-ть самостоятельно.</u>

<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы пос-ть $\{M_n\}$ сходилась, необх. и дост., чтобы она была фундаментальной.

<u>Док-во.</u> Пусть $\{M_n(x_1^{(n)},\dots,x_m^{(n)})\}$ – фунд. Тогда по Лемме 2 числ. пос-ти $\{x_1^{(n)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ – фунд. Сл-но, они сх-ся. Отсюда по Лемме 1 следует, что $\{M_n\}$ сх-ся.

<u>Обратное</u> док-се аналогично.

<u>Опр.</u> Пос-ть $\{M_n\}$ наз-ся <u>ограниченной</u>, если все её члены лежат в нек. <u>шаре</u>.

<u>Экв. опр.</u> Пос-ть $\{M_n\}$ наз-ся огранич., если $\exists$ число $R>0$, такое, что $\forall n$: $\rho(M_n, O)\le R$ (т. O – начало коорд.)

<u>Теорема 2</u> (Больцано–Вейерштрасса). Из любой огранич. пос-ти $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпос-ть.

<u>Док-во.</u> Пусть $\{M_n(x_1^{(n)},\dots,x_m^{(n)})\}$ – огранич. пос-ть, т.е. $\exists R>0$: $\rho(O,M_n)\le R$ или $\sqrt{x_1^{(n)2}+\dots+x_m^{(n)2}}\le R$.

Отсюда: $|x_1^{(n)}|\le R,\ \dots,\ |x_m^{(n)}|\le R$, т.е. $\{x_1^{(n)}\},\dots,\{x_m^{(n)}\}$ – – огранич. числовые пос-ти.

По теореме Б-В для числовых пос-тей из $\{x_1^{(n)}\}$ можно выделить сх-ся подпос-ть: $\{x_1^{(k_n)}\}\to a_1$.

Из подпос-ти $\{x_2^{(k_n)}\}$ можно выделить подпос-ть $\{x_n^{(m_n)}\}\to a_2$.

При этом $\{x_1^{(m_n)}\}\to a_1$.

Из подпос-ти $\{x_3^{(m_n)}\}$ можно выделить подпос-ть $\{x_3^{(l_n)}\}\to a_3$

При этом $\{x_1^{(l_n)}\}\to a_1$, $\{x_2^{(l_n)}\}\to a_2$.

И т.д. На m-м шаге получим подпосл-ти
$\{x_1^{(p_n)}\} \to a_1,\ \{x_2^{(p_n)}\} \to a_2, \ldots, \{x_m^{(p_n)}\} \to a_m$.

В силу леммы 1 $\{M_{p_n}\} \to A(a_1, \ldots, a_m)$. Теорема док-на.

§ 3. Понятие ф-ии многих переменных. Предел ф-ии многих переменных.

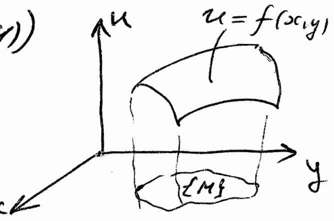
Пусть $\{M(x_1, \ldots, x_m)\}$ — мн-во точек из R^m и пусть каждой точке M из этого мн-ва поставлено в соответствие нек. число u. Тогда говорят, что на мн-ве $\{M\}$ определена ф-я m переменных.

Обозначение: $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ или $u = f(M)$.

$\{M\}$ — область определения ф-ии; $x_1, \ldots, x_m$ — независ. переменные или аргументы.
$u_0 = f(M_0)$ — частное значение ф-ии в т. M_0,
$\{u_0\}$ — мн-во значений ф-ии.

В сл. ф-ии 2-х переменных будем использовать обозначение
$$u = f(x,y) \quad \text{или} \quad z = f(x,y).$$

График ф-ии 2-х переменных — поверхность, точки которой имеют координаты $(x, y, f(x,y))$



Пусть ф-я $u = f(M)$ определена на $\{M\}$ и т. A — предельная точка $\{M\}$.

Опр. 1 (по Коши). Число b наз-ся пределом ф-ии $u = f(M)$ в т. A (при $M \to A$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $\forall M \in \{M\}$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, вып-ся нер-во
$$|f(M) - b| < \varepsilon.$$
(Мн-во точек $\{M : 0 < \rho(M,A) < \delta\}$ наз-ся проколотой δ-окр. т. A)

Опр. 2 (по Гейне). Число b наз-ся пределом ф-ии $u = f(M)$ в т. A, если $\forall \{M_n\} \to A$ ($M_n \in \{M\}$, $M_n \neq A$) соотв. числовая посл-ть $\{f(M_n)\} \to b$.

Обозначение: $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \ldots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \ldots, x_m) = b$, где $A(a_1, \ldots, a_m)$.

Теорема 3. Определения 1 и 2 эквивалентны.
(Док-ть самостоятельно).

Теорема 4. Если $f(M)$ и $g(M)$ определены на $\{M\}$ и $\exists \lim\limits_{M \to A} f(M) = b$, $\lim\limits_{M \to A} g(M) = c$, то

1) $\lim\limits_{M \to A} [f(M) \pm g(M)] = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{M \to A} f(M) \cdot g(M) = bc$,

3) если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{M \to A} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{b}{c}$.

(Док-ть самостоятельно).

На стр. 7

Примеры. 1) $u(x,y) = (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$.

Эта ф-я не определена на осях координат, но точка $(0,0)$ — предельная точка её области определения.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,y) = 0$. Для док-ва достаточно $\forall \varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2) $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,y)$ не сущ-т.

В самом деле, устремим точку (x,y) к началу координат по прямой $y = kx$. Тогда $\lim\limits_{\substack{y = kx \\ x \to 0}} u(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \dfrac{k}{1+k^2}$.
По разным прямым получаются разные пределы, поэтому данный предел не сущ-т. (см. н.о.)

Опр. Если $\lim\limits_{M\to A} f(M)=0$, то ф-я $f(M)$ наз-ся беск. малой в т. A (при $M\to A$).

Пусть $\alpha(M)$ и $\beta(M)$ – беск. малые в т. A.

Если $\exists \lim\limits_{M\to A} \dfrac{\alpha(M)}{\beta(M)} = \begin{cases} C\neq 0, \\ 1\ , \\ 0\ ; \end{cases}$ то $\begin{cases} \alpha \text{ и } \beta \text{ наз-ся б. м. одного порядка в т. } A \\ \alpha \text{ и } \beta \text{ наз-ся эквивал. б. м. в т. } A \\ \text{говорят, что } \alpha(M) \text{ – б. м. более высокого порядка, чем } \beta(M), \text{ в т. } A \end{cases}$

Запись: $\alpha = o(\beta)$ при $M\to A$

Пример. $\alpha(x,y)=x^3+y^3$, $\beta(x,y)=x^2+y^2$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2} = 0 \Rightarrow \alpha = o(\beta)$ в т. $O(0,0)$

2003г. 1.2 **Теорема 4** (с след. стр.)

~~Теорема 5~~ **Опр.** Говорят, что ф-я $u=f(M)$ удовл. в т. A условию Коши, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, такое, что $\forall M_1$ и $M_2 \in$ проколотой δ-окр-ти т. A (M_1 и M_2 из обл. опр. ф-ии) вып-ся нер-во: $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$.

Теорема 5 (критерий Коши). Для того чтобы ф-я $u=f(M)$ имела предел в т. A необх. и дост., чтобы она удовлетворяла в т. A условию Коши.

(Док-ть самостоятельно).

Предел ф-ии при $M\to\infty$.

Пусть ф-я $u=f(M)$ опр. на $\{M\}$, которое содержит точки, сколь угодно удаленные от начала коорд. – точки O.

Опр. Число b наз-ся пределом ф-ии $u=f(M)$ при $M\to\infty$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists$ число $R>0$, такое, что $\forall M\in\{M\}$, удовл. нер-ву $\rho(O,M)>R$, вып-ся нер-во: $|f(M)-b|<\varepsilon$.

Обозначения: $\lim\limits_{M\to\infty} f(M)=b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \dots\\ x_m\to\infty}} f(x_1,\dots,x_m)=b$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to\infty} \frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho^2} = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to\infty} \frac{\cancel{\rho^2}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\cancel{\rho^2}}$ не сущ-т.

Повторные пределы — это будет на семинарах.

§ 4. Непрерывность ф-ии многих переменных.

Пусть ф-я $u=f(M)$ определена на $\{M\}\subset E^m$; т. $A\in\{M\}$ и A – предельная точка $\{M\}$.

Опр. Ф-я $u=f(M)$ наз-ся непр. в т. A, если

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A).$$

Точка разрыва ф-ии $u=f(M)$ – это предельная точка мн-ва $\{M\}$, в которой $f(M)$ не яв-ся непрерывной.

Ф-я $u=f(M)$ наз-ся непр. на $\{M\}$, если она непр. в каждой точке $\{M\}$.

Опр. Приращением (полным приращением) ф-ии $u=f(M)$ в т. A наз-ся ф-я $\Delta u = f(M)-f(A)$.

Условие непр-сти ф-ии в т. A можно записать в виде

$$\lim_{M\to A}\Delta u = \lim_{M\to A}[f(M)-f(A)] = 0$$ – разностная форма условия непр-сти ф-ии в т. A.

Пусть $M(x_1,\dots,x_m)$, $A(a_1,\dots,a_m)$. Положим

$\Delta x_1 = x_1-a_1,\ \dots,\ \Delta x_m = x_m - a_m \Rightarrow x_1 = a_1+\Delta x_1,\ \dots,\ x_m = a_m+\Delta x_m$

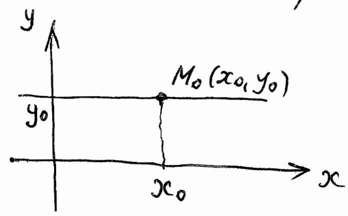
$\Delta u = f(M)-f(A) = f(a_1+\Delta x_1,\dots,a_m+\Delta x_m) - f(a_1,\dots,a_m)$

Разностная форма условия непр-сти ф-ии принимает вид

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \dots\\ \Delta x_m\to 0}} \Delta u = 0.$$

Непр-сть ф-ии по отдельным переменным

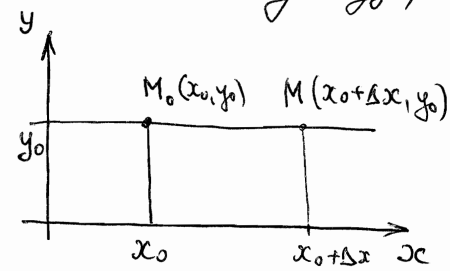
Рассмотрим ф-ю двух переменных $u = f(x,y)$.



Зафиксируем значение аргумента y, положив $y = y_0$. Получим ф-ю одной переменной $f(x,y_0)$. Если эта ф-я непр. в т. x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0)$, то будем говорить, что ф-я $u = f(x,y)$ непр. в т. $M_0(x_0,y_0)$ по переменной x.

Аналогично опр-ся непр-сть в т. M_0 по переменной y.

Эквивалентное определение: зафиксируем y, положив $y = y_0$, и дадим приращение Δx аргументу x.



Ф-я $u = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$$

(это ф-я одной переменной Δx).

Оно наз-ся частным приращением ф-ии, соотв-м приращению аргумента x.

Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta_x u = 0$, то ф-я $u = f(x,y)$ наз-ся непр-й в т. $M_0(x_0,y_0)$ по переменной x.

Аналогично определяется непр-сть ф-ии $u = f(x_1,\dots,x_m)$ по отдельным переменным.

"Обычную" непр-сть ф-ии называют также непрерывностью по совокупности переменных.

Теорема 6. Если ф-я $u = f(x,y)$ определена в окр. т. $M_0(x_0,y_0)$ и непр. в т. M_0, то она непрерывна в этой точке по отдельным переменным.

Док-во. По условию $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0)$, а это и означает, что $f(x,y)$ непр. в т. M_0 по переменной x. Аналогично док-ся непр-сть по переменной y.

Замечания. 1. Обратное к Т. 6 утверждение не верно.

Пример. $u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

Ф-я $u(x,y)$ непр-на в т. $O(0,0)$ по отдельным переменным.

В самом деле, $u(x,0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} u(x,0) = 0 = u(0,0)$, т.е. $u(x,y)$ непр-на в т. $O(0,0)$ по переменной x. Аналогично док-се непр-сть в т. $O(0,0)$ по y.

Но $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не сущ-т, поэтому $u(x,y)$ разрывна в т. $O(0,0)$ по совокупности переменных.

2. Функция $u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

непр-на в т. $O(0,0)$ вдоль каждой прямой, проходящей через т. O, т. к. вдоль каждой такой прямой

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0 = u(0,0)$ (это было показано выше),

но, вместе с тем, эта ф-я не явл-ся непр-й в т. O по совокупности переменных, т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не сущ-т.

3. $u(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & x\neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$

Т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0 = u(0,0)$, то эта ф-я непр. в т. $O(0,0)$ по совокупности переменных.

Вместе с тем, она не определена на осях координат (кроме т. $O(0,0)$), и поэтому не явл-ся непр-й по отдельным переменным в т. $O(0,0)$.

Вопрос: как этот пример соотносится с утверждением теоремы 6?

Основные теоремы о непрерывных функциях

Т.7 (Арифметические операции над непр. ф-ми).

Если $f(M)$ и $g(M)$ определены на $\{M\}$ и непр. в т. A, то $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ (при усл. $g(A) \neq 0$) непр. в т. A.

Утверждение Т.7 следует из Т.4 и определения непр-сти.

Пусть аргументы ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$ являются не независимыми переменными, а функциями переменных $t_1, \dots, t_k$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k), \qquad (1)$$

причём ф-ии (1) определены на мн-ве $\{K(t_1, \dots, t_k)\} \subset R^k$.

В этом случае будем говорить, что на мн-ве $\{K\}$ определена сложная ф-я $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$

Т.8 Пусть ф-ии (1) непр. в т. $A(a_1, \dots, a_k)$, а ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ непр. в т. $B(b_1, \dots, b_m)$, где $b_1 = \varphi_1(a_1, \dots, a_k), \dots, b_m = \varphi_m(b_1, \dots, b_m)$.

Тогда сложная ф-я $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ непр. в т. A.

Т.9 (Об устойчивости знака непр. ф-ии)

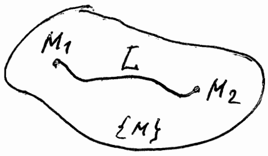
Если ф-я $u = f(M)$ непр. в т. A и $f(A) > 0$ (< 0), то $\exists$ δ-окр. т. A, в которой $f(M) > 0$ (< 0).

Т.10 (О прохождении непр. ф-ии через любое промежуточное значение).

Пусть $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ непр. на связном мн-ве $\{M\}$, пусть M_1 и M_2 — две любые точки из $\{M\}$, $f(M_1) = u_1$, $f(M_2) = u_2$, и пусть u_0 — любое число из сегмента $[u_1, u_2]$.

Тогда на любой непр. кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком $\in \{M\}$, найдётся т. M_0, такая, что $f(M_0) = u_0$.

Док-во. Пусть $L = \{M(x_1, \ldots, x_m):\ x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t),$
$\alpha \le t \le \beta\}$ –



– непрерывная кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 и целиком $\in \{M\}$.

В частности, $M_1(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha))$, $M_2(\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_m(\beta))$.

На кривой L: $u = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) \equiv F(t)$,

причём по Т. 8 ф-я $F(t)$ непр. на $[\alpha, \beta]$, $F(\alpha) =$
$= f(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_m(\alpha)) = f(M_1) = u_1$, $F(\beta) = f(M_2) = u_2$.

В силу известной теоремы для ф-ии одной переменной $\forall u_0 \in [u_1, u_2]$ $\exists$ $t_0 \in [\alpha, \beta]$, такое, что $F(t_0) = u_0$.

Но $F(t_0) = f(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)) = f(M_0)$, где т. $M_0(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)) \in L$.

Итак, $\exists$ т. $M_0 \in L$: $f(M_0) = u_0$, ч. т. д.

Для док-ва следующих трёх теорем (1-й и 2-й теорем Вейерштрасса и теоремы Кантора) нам понадобится

Лемма 3. Пусть $\{M\}$ – замкнутое мн-во и пусть $\{M_n\} \to A$, причём все $M_n \in \{M\}$. Тогда $A \in \{M\}$.

Док-во. Т. к. $\{M_n\} \to A$, то в любой ε-окр. т. A содержатся члены посл-ти $\{M_n\}$. Тем самым, в любой ε-окр. т. A содержатся точки из мн-ва $\{M\}$. Поэтому т. A – либо внутренняя точка мн-ва $\{M\}$, и тогда она $\in \{M\}$ как и всякая внутр. точка, либо A – граничная точка мн-ва $\{M\}$, и тогда она $\in \{M\}$, т. к. мн-во $\{M\}$ – замкнутое (т. е. содержит все свои граничные точки). Таким обр., в любом случае $A \in \{M\}$. Лемма доказана.

(Это утв. аналогично след. утв. для одномерного случая: если все $x_n \in [a, b]$ и $\{x_n\} \to c$, то $c \in [a, b]$)

Опр. Ф-я $u = f(M)$ наз-ся огранич. на $\{M\}$, если $\exists$ числа C_1 и C_2, такие, что $\forall M \in \{M\} : C_1 \le f(M) \le C_2$.

T.11 (1-я теорема Вейерштрасса).

Если ф-я $u = f(M)$ непр. на замкнутом ограниченном мн-ве $\{M\}$, то она ограничена на этом мн-ве.

Док-во. Допустим, что $u = f(M)$ не ограничена на $\{M\}$. Тогда $\forall$ натур. n $\exists M_n \in \{M\} : |f(M_n)| > n$. Тем самым, $\{f(M_n)\}$ — беск. большая. Из огранич. посл-ти $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть. Пусть $\{M_{k_n}\} \to A$. В силу Л.3 т. $A \in \{M\}$ и поэтому ф-я $f(M)$ непр. в т. A. Сл-но, $\{f(M_{k_n})\} \to f(A)$, а это противоречит тому, что $\{f(M_{k_n})\}$ — беск. большая. Теорема доказана.

Опр. Число U наз-ся точной верхней гранью ф-ии $u = f(M)$ на мн-ве $\{M\}$, если

1) $\forall M \in \{M\} : f(M) \le U$;

2) $\forall$ числа $\tilde{U} < U$ $\exists \tilde{M} \in \{M\} : f(\tilde{M}) > \tilde{U}$.

Обозначение: $U = \sup\limits_{\{M\}} f(M)$.

Аналогично опр-ся точная нижняя грань ф-ии: $\inf\limits_{\{M\}} f(M)$.

Замечание. Если мн-во $\{M\}$ не явл-ся ограниченным или не является замкнутым, то непрерывная на таком мн-ве ф-я $u = f(M)$ может быть неограниченной на этом мн-ве.

Задание: придумать соотв. примеры.

Теорема 12 (2-я теорема Вейерштрасса).

Непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве ф-я достигает на этом мн-ве своих точных нижней и верхней граней.

2009г. л.3

Опр. Функция $u = f(M)$ наз-ся равномерно непрерывной на мн-ве $\{M\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ (зависящее только от ε), такое, что $\forall \ M_1$ и M_2 из $\{M\}$, удовл-х нер-ву $\rho(M_1, M_2) < \delta$, вып-ся нер-во

$$| f(M_1) - f(M_2) | < \varepsilon .$$

Задание. Придумать пример ф-ии двух переменных $u = f(x,y)$, которая яв-ся: а) равномерно непрерывной (на нек. мн-ве); б) непрерывной, но не равномерно непр. на некотором мн-ве.

Т.13 (Кантора).

Непрерывная на замкнутом ограниченном мн-ве ф-я равномерно непрерывна на этом мн-ве.

Замечание. Аналогом сегмента (одномерное мн-во) яв-ся в многомерном случае замкнутое огранич. мн-во.

Задание. Придумать примеры, когда двумерное мн-во не яв-ся ограниченным или не яв-ся замкнутым и непрерывная на таком мн-ве ф-я $f(x,y)$:

а) не достигает своих точных граней;

б) не яв-ся равномерно непрерывной.

§5. Частные производные и дифференцируемость.

Пусть т. $M(x_1,\dots,x_m)$ – внутренняя точка области определения ф-ии $u=f(M)=f(x_1,\dots,x_m)$. Рассмотрим частное приращение ф-ии в этой точке, соответствующее приращению аргумента x_k:

$$\Delta_{x_k}u = f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\dots,x_m)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_m)$$

$\Delta_{x_k}u$ зависит только от Δx_k (при фиксированной точке $M(x_1,\dots,x_m)$)

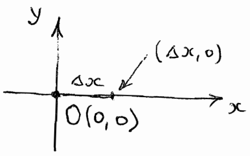
Определение. Если $\exists \lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}$, то он наз-ся частной производной ф-ии $u=f(x_1,\dots,x_m)$ в т. M по переменной x_k.

Обозначения: $u'_{x_k}(M)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M)$, $u_{x_k}(M)$ и т.д.

Вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных ф-й одной переменной ($y=f(x)$).

Примеры. 1) $u=x^y$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$.

2) $u(x,y)=\begin{cases}1 & \text{на осях координат,}\\ 0 & \text{в остальных точках}\end{cases}$ (проволока с линейной плотностью 1, лежащая на осях коорд.)



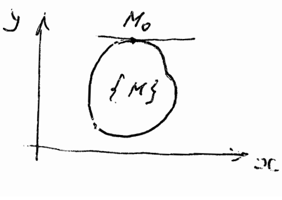
$\Delta_x u = u(\Delta x,0)-u(0,0)=1-1=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}=0$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$. Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$

Отметим, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ не сущ-т, т.е. $u(x,y)$ не явл-ся непр. в т. $(0,0)$

Физ. смысл ч. пр. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M)$ характеризует скорость изменения ф-ии в т. M в направлении оси Ox.

Замечание. Если M – граничная точка обл. опр. ф-ии, то для неё введённое опр. ч. пр. может быть неприменимо. Напр., для т. M_0 на рис. не сущ-т частное приращение $\Delta_x u$. В этом случае, если $\exists \dfrac{\partial u}{\partial x}(M)$ во внутр. точках M области опр. ф-ии, то полагают $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)=\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\partial u}{\partial x}(M)$ (если этот предел сущ-т).



Рассмотрим теперь полное приращение ф-ии во внутр. т. $M(x_1, \dots, x_m)$ из обл. опр. ф-ии:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

<u>Определение.</u> <u>Ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ наз-ся дифференцируемой в т. $M(x_1, \dots, x_m)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде</u>

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (1)$$

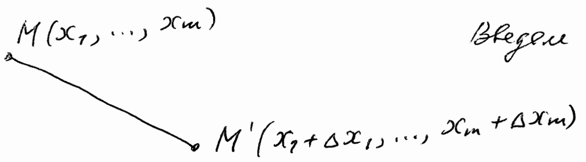
<u>где $A_1, \dots, A_m$ – числа (т.е. они не зависят от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$), $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ – беск. малые ф-ии при $\{\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0\}$, равные нулю при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$ (т.е. $\alpha_i(0, \dots, 0) = 0$).</u>

Р-во (1) назовём <u>условием диф-сти ф-ии в т. $M(x_1, \dots, x_m)$.</u>

<u>Физ. смысл диф-сти</u> (забегая вперёд): можно ли скорость изменения ф-ии $u(x,y)$ по любому направлению в т. M выразить через скорости $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(M)$? <u>Ответ</u>: не всегда. Если $u(x,y)$ дифференцируема в т. M, то можно.

Для ф-ии $y = f(x)$ условие диф-сти имело вид: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

Каков аналог $o(\Delta x)$ в случае ф-ии m переменных? Можно подумать, что аналогом будет сумма $[o(\Delta x_1) + \dots + o(\Delta x_m)]$. Но <u>это не верно!</u>



Введём обозначение: $\rho = \rho(M, M') = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$

<u>Лемма 4</u> <u>Условие диф-сти ф-ии можно записать в виде</u>

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m + \alpha, \quad (2)$$

<u>где $\alpha = o(\rho)$ при $\rho \to 0$ и $\alpha = 0$ при $\rho = 0$, причём усл. (1) и (2) экв-ны.</u>

<u>Док-во.</u> Отметим прежде всего, что если $\rho = 0$, то $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$, и обратно; (и также) если $\rho \to 0$, то $\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0 \end{Bmatrix}$, и обратно. Отметим также, что $\left|\frac{\Delta x_i}{\rho}\right| \le 1$.

Если $\rho = 0$, то р-ва (1) и (2) принимают вид $0=0$ и, сл-но, совпадают.

Пусть $\rho \neq 0$. 1) Пусть вып-но р-во (1). Докажем, что $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$.

Имеем: $$\frac{\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m}{\rho} = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho} \to 0 \text{ при } \rho \to 0,$$

т.к. $\frac{\Delta x_i}{\rho}$ – огранич. ф-ции, $\alpha_i \to 0$ при $\rho \to 0$.

Сл-но, $\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$, т.е. из (1) следует (2).

2) Докажем теперь, что если вып-но р-во (2), где $\alpha = o(\rho)$, то α ~~можно~~ представить в виде

$$\alpha = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad \text{где} \quad \alpha_i \to 0 \text{ при } \left\{\begin{matrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0 \end{matrix}\right\}, \ i = 1, \dots, m.$$

Действ-но, $$\alpha = \frac{\alpha}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho} \, \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}{\rho} = \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho}\right]}_{\alpha_1} \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho}\right]}_{\alpha_m} \Delta x_m =$$

$$= \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \text{ причём } \alpha_i = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_i}{\rho} \to 0 \text{ при } \left\{\begin{matrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0 \end{matrix}\right\}.$$

Таким образом, из (2) следует (1). Лемма 4 доказана.

Замечание. Если ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в т. M, то она и непр. в т. M.

В самом деле, $\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \to 0$ при $\left\{\begin{matrix} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ x_m \to 0 \end{matrix}\right\}$, а это и означает, что $u = f(M)$ непр. в т. M.

Связь диф-сти с существованием частных производных.

Для ф-ции одной переменной $y = f(x)$ сущ-е производной в т. x_0 является необх. и дост. условием диф-сти ф-ции в т. x_0.

Для ф-й многих переменных ситуация более сложная.

Т. 14 (Необходимое условие диф-сти ф-ции). Если ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ диф-ма в т. $M(x_1, \dots, x_m)$, то она имеет в т. M ч. пр-е по всем переменным.

Док-во. По условию диф-сти в виде (1) имеем:

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.$$

Положим все $\Delta x_i = 0$, кроме Δx_k, а $\Delta x_k \neq 0$.

Тогда $\Delta u = \Delta_{x_k} u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$, где A_k – число, $\alpha_k \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$.

Отсюда $$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \to A_k \text{ при } \Delta x_k \to 0, \text{ т.е. } \exists \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = A_k.$$

Т. обр. $\exists \ \frac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$. Теорема док-на.

<u>Следствие.</u> Условие диф-сти (1) можно записать теперь в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (3).$$

Обратное к Т.14 утверждение не верно.

<u>Контрпример:</u> $u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{на осях координат}, \\ 0 & \text{в остальных точках}. \end{cases}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, но ф-я не является непр. в т. $(0,0)$,

а потому не диф-ма в т. $(0,0)$.

Таким об., <u>сущ-е ч. пр-х – только необх., но не дост. усл. диф-сти ф-ии.</u>

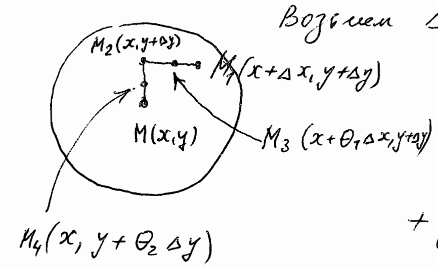
2007г. л. 4.

<u>Т.15 (Дост. усл. диф-сти ф-ии).</u> <u>Если ф-я $u = f(x_1,\dots,x_m)$ имеет ч. пр-е по всем переменным в нек. ε-окр. т. $M(x_1,\dots,x_m)$, причём в самой т. M эти частные пр-е непр-ны, то ф-я диф-ма в т. M.</u>

<u>Док-во</u> приведём для ф-ии двух переменных $u = f(x,y)$ (для сокращ. записи).

Пусть частные пр-е f'_x и f'_y сущ-т в ε-окр. т. $M(x,y)$ и непр. в самой т. M.

Возьмем Δx и Δy столь малыми, чтобы т. $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ лежала в этой ε-окр. т. M.



$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] +$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

применяем ф-лу Лагранжа для ф-й одной пер-й

где $0<\theta_i<1$, $i=1,2$.

Т.к. f'_x и f'_y непр. в т. $M(x,y)$, то $f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha_1$,

$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y) + \alpha_2$, где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $\begin{Bmatrix}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{Bmatrix}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ при $\Delta x = \Delta y = 0$.

Сл-но, $\Delta u = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$, т.е. вып-но усл-е диф-сти в виде (3).

<u>Т.15 доказана.</u>

<u>Примеры</u> 1) $u(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

~~в 2007г.~~ В 2008г. рассмотрел подробно оба примера

См. н.О.

Док-ть, что $u(x,y)$ имеет ч. пр. u'_x и u'_y во всех точках пл-ти, эти ч. пр. не явл-ся непр. в т. $O(0,0)$, но ф-я $u(x,y)$ диф. в т. $O(0,0)$.

Этот пример показывает, что усл. Т.15 явл-ся только дост-м, но не необх-м

Дифференцируемость сложной ф-ии.

Рассмотрим сложную ф-ю $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$, т.е. $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$.

<u>Теорема 16.</u> Пусть ① ф-ии $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ диф-мы в т. (u_0,v_0);

② ф-я $z=f(x,y)$ диф-ма в т. (x_0,y_0), где $x_0=\varphi(u_0,v_0)$, $y_0=\psi(u_0,v_0)$.

Тогда сложная ф-я $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ диф-ма в т. (u_0,v_0).

<u>Док-во.</u> Дадим произвольные приращения Δu и Δv аргументам u и v в т. (u_0,v_0). Ф-ии $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ получат приращения Δx и Δy, которые в силу условия ① можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\alpha_1\Delta u+\alpha_2\Delta v,\\ \Delta y &= \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\beta_1\Delta u+\beta_2\Delta v,\end{aligned}\qquad(4)$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\to 0$ при $\{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0\}$ и $\alpha_i=\beta_i=0$ при $\Delta u=\Delta v=0$.

Этим приращениям Δx и Δy соответствует некоторое приращение Δz ф-ии $z=f(x,y)$ в т. (x_0,y_0), которое в силу условия ② можно записать в виде

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\mu_1\Delta x+\mu_2\Delta y,\qquad(5)$$

где $\mu_1,\mu_2\to 0$ при $(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$, $\mu_1=\mu_2=0$ при $\Delta x=\Delta y=0$,

и, сл-но, $\mu_1,\mu_2\to 0$ при $\{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0\}$, $\mu_1=\mu_2=0$ при $\Delta u=\Delta v=0$.

Подставляя (4) в (5), получаем

$$\Delta z=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)}_{A}\Delta u+\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}_{B}\Delta v+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\beta_1+\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\mu_1\alpha_1+\mu_2\frac{\partial\psi}{\partial u}+\mu_2\beta_1\right)}_{\alpha}\Delta u+\underbrace{(\ldots)}_{\beta}\Delta v=$$

$= A\Delta u + B\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v,$ (6)

где A и B – числа; $\alpha, \beta \to 0$ при $\{\Delta u \to 0, \Delta v \to 0\}$, $\alpha = \beta = 0$ при $\Delta u = \Delta v = 0$.

Р-во (6) показывает, что сложная ф-я $z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ диф-ма в т. (u_0, v_0). Теорема доказана.

Из р-ва (6) следуют формулы для производных сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Эти же ф-лы запишем в более кратком виде:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

При такой записи более наглядно видна зависимость z от u и v через каждый из аргументов x и y.

Примеры. 1) Рассм. ур-е $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (это так называемое ур-е в частных производных; требуется найти ф-ю $z(x,y)$, удовлетворяющую этому ур-ю).

Пусть $f(t)$ – произвольная диф-мая ф-я аргумента t. Проверим, что ф-я $z = f(x^2+y^2)$ удовл-т данному ур-ю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2+y^2)\cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2+y^2)\cdot 2y.$$

Подставляем в ур-е: $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (2xy - 2xy)f'(x^2+y^2) = 0.$

2) Решить ур-е: $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Ответ: $z = f(xy)$

3) $z = f(\underbrace{x-y^2}_{1}, \underbrace{x^2+y^3}_{2})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2'\cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_1'(-2y) + f_2'\cdot 3y^2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай сложной ф-ии:

$$u = f(x_1, \dots, x_m),$$

где $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$.

Для её ч. пр-х имеет место формула:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \quad (i = 1, \dots, k)}\ (7).$$

<u>Дифференциал ф-ии многих переменных.</u>

Пусть ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-ма в т. M. Тогда её приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta u = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m\right)}_{1\text{-я сумма}} + \underbrace{(\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m)}_{2\text{-я сумма}}$$

Обе суммы явл-ся бесконечно малыми при $\{\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0\}$.

1-я сумма — линейная относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ часть приращения ф-ии,

2-я сумма — беск. малая более высокого порядка, чем линейная часть.

<u>Определение.</u> <u>Дифференциалом</u> (первым дифференциалом) ф-ии $u = f(M)$ в т. M наз-ся главная, линейная относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ часть приращения ф-ии в т. M

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m$$

Дифференциалом независимой переменной x_i будем называть приращение этой переменной:

$$dx_i = \Delta x_i.$$

Выражение для дифференциала ф-ии запишется теперь так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)dx_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}(M)dx_j. \quad (8)$$

Лемма 5 (Об инвариантности формы первого дифференциала).

Формула (8) остаётся в силе, если $x_1, \dots, x_m$ явл-ся диф-ми функциями независимых переменных $t_1, \dots, t_k$.

Док-во. Если $u = f(x_1, \dots, x_m)$, где $x_j = \varphi_j(t_1, \dots, t_k)$, $j = 1, \dots, m$, то

$$du = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial t_i} \cdot dt_i \underset{\text{применяем ф-лу (7)}}{=} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i \underset{\text{изменяем порядок суммирования}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{\partial x_j}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial x_j}{\partial t_k} dt_k \right)}_{dx_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j,$$

т.е. имеет место ф-ла (8).

Примеры. $u = x^y$ $\quad du = y \cdot x^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy$ – дифф-л в т. (x, y)

в т. $(1,1)$: $du = dx$; в т. $(1,0)$: $du = 0$ ← это ф-я, а не число

Правила дифференцирования.

Пусть u и v – дифференцируемые ф-ции каких-нибудь аргументов $x_1, \dots, x_m$.

Тогда:

1) $d(cu) = c\,du$ $\quad (c = \text{const})$,

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$,

3) $d(uv) = v\,du + u\,dv$,

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $\quad (v \neq 0)$.

Докажем, например, ф-лу 4. Введём ф-ю

$w = \frac{u}{v}$ – сложная ф-я аргументов $x_1, \dots, x_m$.

В силу леммы 5 $\quad dw = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv =$

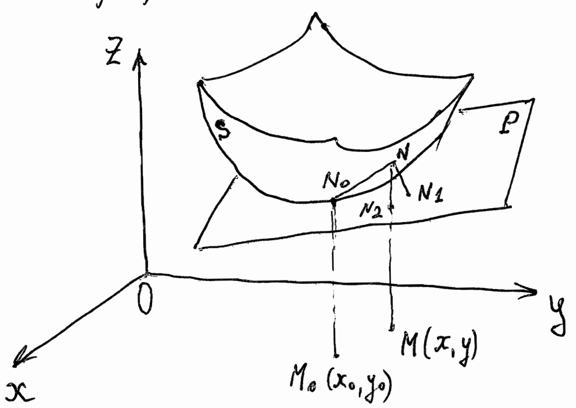
$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, ч.т.д.

§6. Геометрический смысл диф-сти ф-ии.

① Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Для ф-ии одной переменной $y = f(x)$ из диф-сти в т. x_0 следует сущ-е касательной к графику ф-ии в точке $(x_0, f(x_0))$.

Рассмотрим ф-ю двух переменных $z = f(x,y)$. Её графиком яв-ся некоторая пов-сть $S = \{N(x,y,f(x,y))\}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$.



Пусть $N_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Проведём через т. N_0 плоскость P. Пусть $N(x,y,z)$ – произвольная точка на пов-сти S, $z = f(x,y)$; $NN_1 \perp P$, $N_1 \in P$.

__Опр.__ Пл-ть P, проходящая через т. N_0 пов-сти S, называется __касательной плоскостью__ к пов-сти S в этой точке, если при $N \to N_0$ $(N \in S)$ $\rho(N, N_1)$ яв-ся бесконечно малой более высокого порядка, чем $\rho(N,N_0)$,

т.е. $\lim\limits_{\substack{N \to N_0 \\ (N\in S)}} \dfrac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)} = 0$.

Т.к. $\dfrac{\rho(N,N_1)}{\rho(N,N_0)} = \sin \angle NN_0N_1$, то это условие означает, что $\angle NN_0N_1 \to 0$ при $N \to N_0$.

__Теорема 17.__ Если ф-я $z = f(x,y)$ диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, то в т. $N_0(x_0,y_0,z_0)$, где $z_0 = f(x_0,y_0)$, сущ-т кас. пл-ть к графику этой ф-ии.

__Док-во.__ Пусть $N(x,y,z) \in S$, $z = f(x,y)$. Положим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta z$.

Т.к. ф-я $z = f(x,y)$ диф-ма в т. M_0, то её приращ. Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Введем обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = A$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = B$ и перепишем условие диф-сти в виде

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho).$$

Рассмотрим пл-ть P: $\underline{z - z_0 = A(x-x_0) + B(y-y_0)}$, и докажем, что она яв-ся кас. пл-ю к пов-сти S в т. $N_0(x_0,y_0,z_0)$.

Пл-ть P проходит через т. $N_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет вектор нормали $\vec{n} = \{A, B, -1\}$. Нам надо доказать, что

$$\frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} \to 0 \text{ при } N \to N_0 \ (N \in S), \text{ где } NN_1 \perp P, \ N_1 \in P.$$

Пусть N_2 – точка пересечения вертикальной прямой NM с пл. P. Точка N_2 имеет координаты $(x, y, Z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0))$, поэтому $\rho(N, N_2) = |z - Z| = o(\rho)$. Далее, $\rho(N, N_1) \leq \rho(N, N_2)$ (перпендикуляр меньше наклонной), а $\rho(N, N_0) \geq \rho(M, M_0) = \rho$.

Сл-но, $\dfrac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} \leq \dfrac{\rho(N, N_2)}{\rho(M, M_0)} = \dfrac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $N \to N_0$, ч.т.д.

Итак, пл-ть $\underline{Z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0)}$

явл-ся кас. пл-ю к пов-сти S (графику ф-ии $z = f(x, y)$) в т. $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

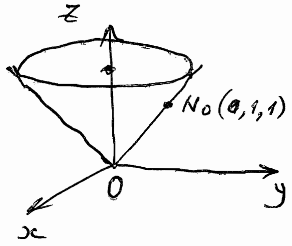
Вектор $\vec{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0), \frac{\partial z}{\partial y}(M_0), -1\right\}$ наз-ся <u>вектором нормали</u> к пов-сти S в т. $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

<u>Примеры.</u> 1) $S: z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения.

$N_0(1, 2, 5) \in S$; $M_0(1, 2)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 4$.

Кас. пл-ть в т. N_0: $\underline{Z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)}$.

2) $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – коническая пов-сть



В т. $(0,0)$ ф-я $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не диф-ма и в т. $O(0,0,0)$ кас. пл-ть не сущ-т.

Возьмем т. $N_0(0, 1, 1) \in S$; $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$;

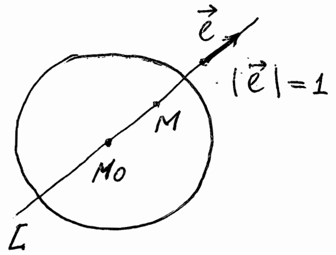
Кас. пл-ть в т. N_0: $Z - 1 = y - 1$ или $\underline{Z = y}$ – эта пл-ть содержит образующую конуса.

<u>2009г. Л.5</u>

② <u>Производная по направлению и градиент.</u>

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ характеризует скорость изменения функции по направлению оси Ox. Скорость изменения функции по производному направлению характеризуется <u>производной по этому направлению</u>.

Пусть функция $u = f(x,y,z) = f(M)$ определена в окрестности точки $M_0 \in R^3$. Проведём через т. M_0 какую-нибудь прямую L и



выберем на ней одно из двух возможных направлений, оно характеризуется <u>единичным</u> вектором $\vec{e}$. Пусть M — произвольная точка из указанной окрестности, лежащая на выбранной прямой L, M_0M — величина направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$, т.е.
$$M_0M = \begin{cases} |\overrightarrow{M_0M}|, & \text{если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{e}, \\ -|\overrightarrow{M_0M}|, & \text{если } \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$$

<u>Определение.</u> Если существует $\lim\limits_{\substack{M\to M_0 \\ (M\in L)}} \dfrac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$, то он называется производной ф-ии $u=f(M)$ в т. M_0 по направлению $\vec{e}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0)$ или $u'_{\vec{e}}(M_0)$.

Установим связь между производной по направлению и частными производными в данной точке.

Пусть $M(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $M_0M = t$.

Тогда $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$, $(-\infty < t < +\infty)$ — параметрические уравнения прямой L.

На прямой L:

$$u = f(M) = f(x,y,z) = f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma) \equiv \varphi(t) -$$

— сложная функция одной переменной t, в частности $f(M_0) = \varphi(0)$.

Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)-f(M_0)}{M_0M} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \dfrac{d\varphi}{dt}(0)$.

<u>Пусть ф-я $u = f(x,y,z)$ диф-ма в т. M_0</u>. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\frac{dz}{dt}(0).$$

Но $\dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dt} = \cos\gamma$, поэтому

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma} \qquad (1)$$

Формула (1) имеет простой физический смысл: она показывает, что скорость изменения функции $u=f(M)$ по направлению $\vec{l}$ является линейной комбинацией скоростей изменения этой функции по направлениям коорд. осей (т.е. линейной комбинацией частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$), причём коэффициенты этой линейной комбинации, т.е. множители $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, являются <u>весовыми</u> множителями, показывающими, какую долю вносит каждая частная производная в производную (скорость) по направлению $\vec{l}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. В частности, если $\vec{l}=\{1,0,0\}$, т.е. направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Ox, то из ф-лы (1), как и следует ожидать, получаем $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$.

<u>Определение.</u> <u>Градиентом</u> дифференцируемой функции $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор

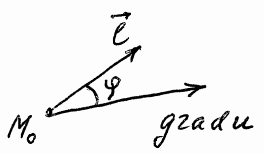
$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат.

Формулу (1) можно теперь записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = (\operatorname{grad} u \cdot \vec{l}), \qquad (2)$$

откуда следует, что



$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |\operatorname{grad} u|\cdot|\vec{l}|\cdot\cos\varphi = |\operatorname{grad} u|\cdot\cos\varphi = \\ = \text{Пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u. \qquad (3)$$

Из (3) получаем: $\left(\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)\right)_{max} = |\operatorname{grad} u|$ (при $\varphi=0$), т.е. вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 показывает направление наибольшего роста функции $u=f(M)$, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста ф-ции $u=f(M)$ в этом направлении.

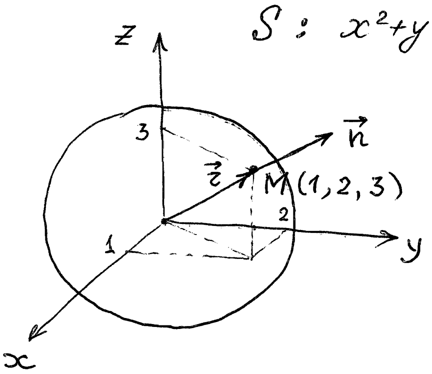
Отсюда следует, что вектор $\operatorname{grad} u$ однозначно определяется самой функцией $u = f(M)$ и не зависит от выбора системы координат.

Геометрический смысл градиента.

Поверхность S, определяемая уравнением $f(x, y, z) = c = \text{const}$ наз-ся *поверхностью уровня* функции $u = f(x, y, z)$. Можно показать, что вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M_0 поверхности уровня S коллинеарен вектору нормали к поверхности S в этой точке.

Пример. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = c > 0$ — поверхность уровня — сфера радиуса $\sqrt{c}$.



Пусть $c = 14$. Тогда $M(1, 2, 3) \in S$.

В точке M $\operatorname{grad} u = \{2, 4, 6\}$.

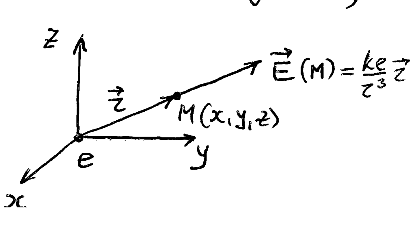
Убедимся в том, что $\operatorname{grad} u \parallel \vec{n}$, где $\vec{n}$ — вектор нормали к S в т. M.

В самом деле, $\vec{n} \parallel \vec{r} = \{1, 2, 3\}$, а $\vec{r} \parallel \operatorname{grad} u$, т.к. $\operatorname{grad} u = 2\vec{r}$, поэтому $\operatorname{grad} u \parallel \vec{n}$.

Физические примеры.

1) *Электростатическое поле*, т.е. электрическое поле неподвижных зарядов, можно описать с помощью скалярной функции $u(M)$ — *потенциала электрического поля*. Поверхности уровня $u(M) = C$ — *эквипотенциальные* пов-сти. Напряженность эл. поля выражается формулой $\vec{E}(M) = -\operatorname{grad} u(M)$.

В частности, потенциал эл. поля точечного заряда e, помещенного в начало координат, равен $u(M) = k\frac{e}{r}$, где $M(x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, постоянная k зависит от выбора системы единиц.



$$\vec{E} = -\operatorname{grad} u = \frac{ke}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{ke}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = \frac{ke}{r^3}\cdot\vec{r}. \qquad (\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

2) Поле тяготения точечной массы m, находящейся в начале координат, описывается ньютоновым потенциалом $u(M) = \gamma \frac{m}{r}$ (γ – гравитационная постоянная). Сила $\vec{F}(M)$, с которой масса m притягивает единичную массу, помещенную в точку $M(x,y,z)$, выражается формулой

$$\vec{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = -\frac{\gamma m}{r^3}\cdot\vec{r},$$

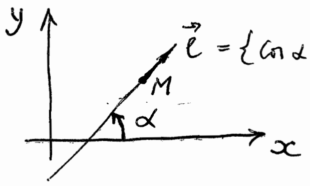
где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Замечание. Если в каждой точке M области G задан вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле $\vec{a}(M)$. Векторное поле вида $\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ называется потенциальным, а функция $u(M)$ называется потенциалом этого векторного поля.

Электрическое и гравитационное поля $\vec{E}(M)$ и $\vec{F}(M)$ – потенциальные.

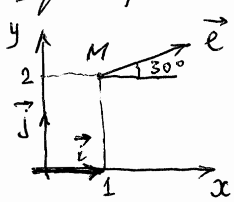
Понятия производной по направлению и градиента можно ввести для функций любого числа переменных $m \geq 2$.

При $m=2$: $u = u(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$;



$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$$

Пример. $u = x^2 + y^3$. Найти $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$, если $M(1,2)$, а $\vec{l}$ составляет угол в 30° с осью Ox.



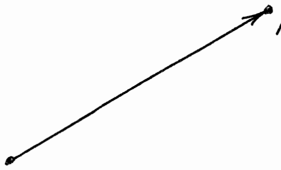
$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 12$, $\operatorname{grad} u(M) = 2\vec{i} + 12\vec{j}$,

$\vec{l} = \{\cos 30^\circ, \sin 30^\circ\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}$,

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 12 = \sqrt{3} + 6.$$

В общем m-мерном случае:

$$u = f(x_1, \dots, x_m)$$



$M_2(y_1, \dots, y_m)$

$M_1(x_1, \dots, x_m)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{y_1 - x_1, \dots, y_m - x_m\}$ – m-мерный вектор

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $\vec{b} = \{b_1, \dots, b_m\}$: $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$

По определению: $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

$\vec{e} = \{\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_m\}$

M_0

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\right\}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0) \cdot \vec{e}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}(M_0) \cdot \cos\alpha_j}$$

Ф-ла (3) также остается в силе.

§ 7. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет ч. пр. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ в нек. окр. т. M.
Тогда $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ явл-ся ф-ей от $x_1, \dots, x_m$, определенной в этой окр. т. M.

<u>Опр.</u> Если ф-я $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет в т. M ч. пр. по x_k, т.е. $\exists\, \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ в т. M, то она наз-ся второй ч. пр. (или ч. пр. 2-го порядка) ф-ии u по аргументам x_i, x_k в т. M и обозначается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \quad \text{или} \quad u^{(2)}_{x_i x_k} \quad \text{или} \quad u''_{x_i x_k} \quad \text{или} \quad f''_{x_i x_k} \quad \text{или} \quad f_{x_i x_k} \quad \text{и т.}$$

Если $k \neq i$, то ч. пр. 2-го порядка наз-ся <u>смешанной</u> ч. пр. 2-го поряд.

Если $k = i$, то она обозначается так: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ или $u''_{x_i^2}$ или $f''_{x_i x_i}$ и т.

<u>Далее по индукции</u>: n-я ч. пр (или ч. пр. n-го порядка) ф-ии $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ в т. M опр-ся равенством

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right).$$

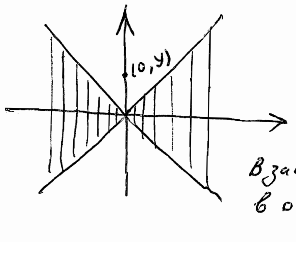
Если не все номера $i_1, \dots, i_n$ равны друг другу, то ч. пр. наз-ся смешанной ч. пр. n-го порядка.

<u>Примеры.</u> 1) $u = x^y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Итак, в этом примере $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. <u>Всегда ли будет так?</u>

2) $u(x,y) = \begin{cases} xy, & |y| \le |x|, \\ -xy, & |y| > |x|. \end{cases}$ Найдем $u_{xy}(0,0)$ и $u_{yx}(0,0)$.



В заштрих. обл. $u = xy$, в остальной $u = -xy$.

$\forall y$: $u_x(0,y) = -y \Rightarrow u_{xy}(0,y) = -1 \Rightarrow u_{xy}(0,0) = -1$

$\forall x$: $u_y(x,0) = x \Rightarrow u_{yx}(x,0) = 1 \Rightarrow u_{yx}(0,0) = 1$

Итак, $u_{xy}(0,0) \neq u_{yx}(0,0)$

3) $u(x,y) = f(x) + g(y)$,

где $f(x)$ – диф. ф-я, $g(y)$ – не диф. ф-я, например, ф-я Дирихле

$u_x(x,y) = f'(x) \Rightarrow \underline{u_{xy}(x,y) = 0}$

$u_y(x,y)$ не сущ-т $\Rightarrow \underline{u_{yx}(x,y)}$ не сущ-т

Р-во $u_{xy} = u_{yx}$ не вып-но, т.к. пр. часть не определена.

4) $u_t = u_{xx}$ – ур-е теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла в одномерном стержне,

$u(x,t)$ – температура в т. x в момент времени t.

$$\boxed{u(x,t) = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}} \quad (c = 1/2\sqrt{\pi})$$

– фундаментальное решение ур-я теплопроводности, оно описывает процесс распространения тепла при условии, что в начальный момент времени $t=0$ в точке $x=0$ стержню сообщено к-во тепла, равное 1, так что, $u(x,0) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

Вычислить самост-но u_t и u_{xx} и проверить, что $u_t = u_{xx}$

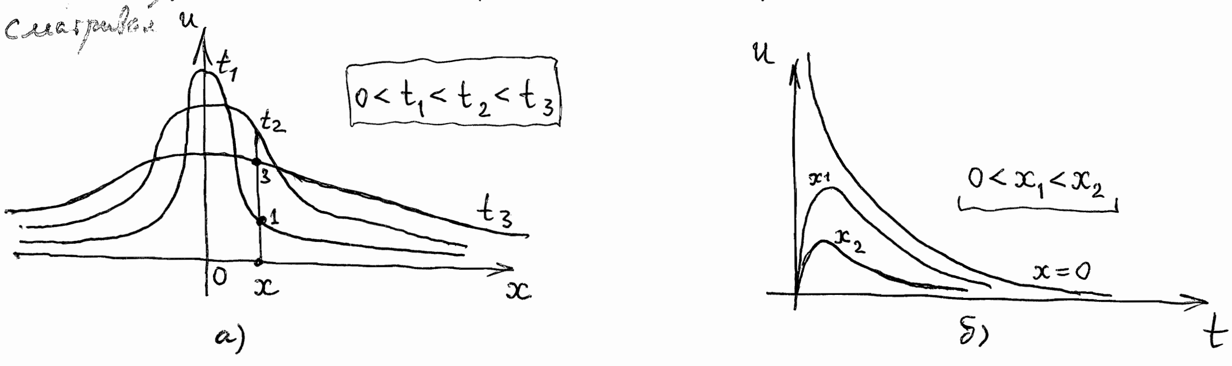
$$u_t = -\frac{c}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2}$$

$$u_x = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{2x}{4t}\right) = -\frac{cx}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$u_{xx} = -\frac{c}{2} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{cx}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x}{2t} \Rightarrow \boxed{u_t = u_{xx}}$$

В 2009 г. не рассматривали

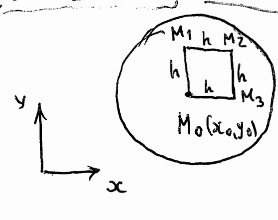
Графики температуры $u(x,t)$: а) при фикс. t; б) при фикс. x.



Т. 18 (Ор-ве смешанных производных). Если в нек. окр. т. $M_0(x_0,y_0)$ ф-я $u = f(x,y)$ имеет смешанные ч. пр-е f''_{xy} и f''_{yx} и если эти пр-е непр. в т. M_0, то

$$\underline{f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)}.$$

2009 г. л.6



Док-во. Рассмотрим квадрат $M_0M_1M_2M_3$ со стороной h столь малой, что квадрат целиком лежит в указ. окр. т. M_0. Введем функции

$$\mathcal{F}(h) = f(\underbrace{x_0+h, y_0+h}_{M_2}) - f(\underbrace{x_0+h, y_0}_{M_3}) - f(\underbrace{x_0, y_0+h}_{M_1}) + f(\underbrace{x_0, y_0}_{M_0})$$

и $\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$.

Тогда $\mathcal{F}(h) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(x_0+\theta_1 h)\cdot h =$

по ф-ле Лагранжа

Снова применяем ф-лу Лагранжа

$$= \left[f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)\right]\cdot h = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h)\cdot h^2 =$$

$0 < \theta_1 < 1$ $\qquad$ $0 < \theta_2 < 1$

$$= \left[f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)\right]\cdot h^2, \text{ где } \alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

в силу непр-сти f_{xy} в т. M_0

Введём теперь ф-ю $\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$.

Тогда $\mathcal{F}(h) = \psi(y_0+h) - \psi(y_0) = \ldots = \left[f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)\right]\cdot h^2$,

где $\beta(h) \to 0$ при $h \to 0$.

применяем дважды ф-лу Лагранжа и используем непр-сть f''_{yx} в т. M_0

Приравниваем два выражения для $\mathcal{F}(h)$:

$$\left[f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)\right]h^2 = \left[f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)\right]h^2,$$

сокращаем на h^2 и устремляем h к нулю. В пределе получаем: $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, ч. т. д. Теор. 18 доказана

В 2009 г. не рассматривал

Замечание 1. Непр-сть смешанных производных – только достаточное, но не необходимое условие их равенства. Пример:

$$u = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Можно док-ть, что $u''_{xy}(0,0) = u''_{yx}(0,0) = 0$, но при этом $u''_{xy}(x,y)$ и $u''_{yx}(x,y)$ не яв-ся непр-ми в т. $O(0,0)$.

Эта функция интересна тем, что она имеет в т. $O(0,0)$ ч. пр-е любого порядка, причём эти ч. пр-е не зависят от порядка дифференцирования (они все равны нулю в т. $(0,0)$), но вместе с тем сама ф-я $u(x,y)$ и любая её ч. пр-я не яв-ся непрерывными в т. $O(0,0)$.

Замечание 2. Имеет место более сильная теорема, нежели Теор. а именно: если $u=f(x,y)$ имеет в нек. окр. т. M_0 ч. пр. f'_x, f'_y и f''_{xy}, причём f''_{xy} непр. в т. M_0, то в т. M_0 сущ-т f''_{yx} и справедливо р-во

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

В 2003г. Замечание 2 не рассматривал.

2003г. л. 7 2005г. л. 6

Определение. Функция $u=f(x_1,\dots,x_m)$ наз-ся дважды дифференцируемой в т. $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0)$, если она дифференцируема в нек. окр. т. M_0, и все её ч. пр-е 1-го порядка диф-мы в самой т.

Далее по индукции. Пусть уже введено понятие $(n-1)$-кратной диф-сти ф-ии $u=f(x_1,\dots,x_m)$. Будем говорить, что эта ф-я n раз диф-ма в т. M_0, если она $(n-1)$ раз диф-ма в нек. окр. т. M_0 и все её ч. пр-е $(n-1)$-го порядка диф-мы в самой т. M_0.

Отметим, что при этом сама ф-я и все её ч. пр-е до $(n-2)$-го порядка включительно дифференцируемы в нек. окр. т. M_0.

Теорема 18[а]. Если ф-я $u=f(x,y)$ дважды диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Док-во проводится примерно так же, как и док-во т. 18. (см. Ильин, Позняк).

Теорема 18[б]. Если ф-я $u=f(x_1,\dots,x_m)$ n раз диф-ма в т. M_0, то все её смешанные частные производные (в т. M_0) до n-го порядка включительно не зависят от порядка дифференцирования.

Дифференциалы высших порядков.

Начнем с функции двух переменных. Пусть ф-я $u=f(x,y)$ (независимых пер. x и y) дважды диф-ма в т. $M_0(x_0,y_0)$, т.е. она диф-ма в нек. окр. т. M_0 и её частные пр-е $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ диф-мы в т. M_0. Рассмотрим дифференциал ф-ии в окр-ти т. M_0: $du = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy;$ (1).

du явл-ся ф-й четырех переменных: x, y, dx, dy.

Чтобы ввести дифференциал второго порядка ф-ии $u=f(x,y)$, будем рассматривать du как функцию только x и y, т.е. так, как если бы dx и dy были фиксированными числами (постоянными множителями).

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ диф-мы в т. M_0, то du явл-ся диф-мой

Опр. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) ф-ии $u = f(x,y)$ в т. M_0 наз-ся дифференциал от первого дифференциала du при условиях, что:

1) du рассматривается как ф-я только x и y,

2) при вычислении дифференциалов от $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ приращения Δx и Δy независ. переменных x и y берутся такими же, как в выражении (1) для du, т.е. равными dx и dy.

Итак, $\boxed{d^2u = d(du)}$ при указанных двух условиях.

Из (1) и правил дифференцирования следует, что

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\cdot dx + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2.$$

(Производные 2-го порядка берутся в т. M_0, а р-во $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ следует из Т. 18^а).

Пример. $u = x^y$; $M_0(1,0)$. Найти $d^2u|_{M_0}$.

$u_x = yx^{y-1}$, $u_y = x^y \ln x$,

$u_{xx} = y(y-1)x^{y-1}$, $u_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $u_{yy} = x^y(\ln x)^2$.

$$d^2u|_{M_0} = u_{xx}(M_0)\cdot dx^2 + 2u_{xy}(M_0)dxdy + u_{yy}(M_0)dy^2 =$$

$$= 0\cdot dx^2 + 2dxdy + 0\cdot dy^2 = 2dxdy.$$

Выражение для d^2u похоже на квадрат двучлена. Его действительно можно записать как квадрат двучлена, но не обычного, а символического (или операторного) двучлена.

Назовем оператором правило, посредством которого одной ф-ии ставится в соответствие другая ф-я (одна ф-я преобразуется в другую ф-ю). Так, операцию нахождения частной производной по аргументу x можно рассматривать как оператор (будем обозначать его $\frac{\partial}{\partial x}$), который функцию $u(x,y)$ преобразует в функцию $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$: $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично определяется оператор частной производной по y: $\frac{\partial}{\partial y}$.

Оператор $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ назовем оператором дифференциала.

При действии этого оператора на ф-ю $u(x,y)$ получается дифференциал ф-ии: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Произведение операторов определим след. образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}.$$

Определим n-ю степень оператора d как n-ю степень двучлена $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$. Тогда

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (dy)^2.$$

Поэтому второй дифференциал можно записать в виде

$$\boxed{d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u}$$

Дифференциал n-го порядка опр-ся по индукции.

Если ф-я $u(x,y)$ n раз диф-ма в т. M_0 (т.е. $(n-1)$ раз диф-ма в нек. окр. т. M_0 и все её ч. пр-е $(n-1)$-го порядка диф-мы в т. M_0), то дифференциалом $d^n u$ n-го порядка ф-ии $u(x,y)$ в т. M_0 наз-ся дифференциал в т. M_0 от дифференциала $(n-1)$-го порядка при таких же двух условиях, как и при определении диф-ла 2-го порядка

$$\boxed{d^n u = d\left(d^{n-1} u\right)} \quad (n = 2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

По индукции нетрудно док-ть операторную ф-лу

$$\boxed{d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u} \qquad (3)$$

В случае ф-ции m независимых переменных $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифф-л n-го порядка опр-ся индуктивно по ф-ле (2), оператор дифференциала имеет вид

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m$$

и справедлива формула

$$\boxed{d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u} \quad (4)$$

В частности, $d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ (5)

Если аргументы x и y ф-ции $u(x,y)$ не явл-ся независ. перем., а являются дифдер. ф-ции каких-то независ. перем. $t_1, \dots, t_k$, то ф-ла (3) изменится (то же самое относится к ф-ции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ и ф-ле (4)).

Действительно, в силу инвариантности формы 1-го дифференциала имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy,$$

где dx и dy явл-ся ф-ции $t_1, \dots, t_k, dt_1, \dots, dt_k$, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ – ф-ции $t_1, \dots, t_k$

При вычислении $d^2 u = d(du)$ рассматриваем du как ф-ю $t_1, \dots, t_k$, т.е. учитываем зависимость от $t_1, \dots, t_k$ всех входящих в du слагаемых и сомножителей:

$$d^2 u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \left[d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dy + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u + \underbrace{\left\{\frac{\partial u}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2 y\right\}}$$

Доп. слагаемые по сравнению со случаем, когда x и y – независ. перем.

Таким образом, форма второго дифф-ла не инвариантна. То же самое относится к дифф-лам более высокого порядка.

Замечание. Если x и y – линейные ф-ции $t_1, \dots, t_k$, т.е.

$$x = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_k t_k + \alpha_{k+1}, \quad y = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_k t_k + \beta_{k+1}, \quad \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ – числа},$$

то $dx = \alpha_1 dt_1 + \dots + \alpha_k dt_k$ не зависит от $t_1, \dots, t_k$ и поэтому $d^2 x = d(dx) = 0$

Аналогично, $d^2 y = 0$, поэтому $d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u$, т.е. ф-ла (3) при $n=2$ остаётся в силе. То же самое будет для $n > 2$.

И также, если $x_1, \dots, x_m$ – линейные ф-ции $t_1, \dots, t_k$, т.е.

$$x_i = \alpha_{i1} t_1 + \dots + \alpha_{ik} t_k + \alpha_{i,k+1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (6),$$

то формула (4) остаётся в силе, где dx_i – дифференциалы ф-й (6).

2007г. Л. 7

§8. Формула Тейлора.

Для ф-ии $u = F(t)$ одной переменной имеет место теорема: если $u = F(t)$ $(n+1)$ раз дифф-ма в окр. т. $t = t_0$, то $\forall t$ из этой окр-ти

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot$$
$$\cdot(t-t_0)^{n+1}, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Положим $t - t_0 = \Delta t = dt$. Т.к. $F^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k = F^{(k)}(t_0)(dt)^k = d^kF\big|_{t=t_0}$, то, обозначая $F(t)-F(t_0)$ через Δu, ф-лу Тейлора можно записать в виде

$$\Delta u = dF\Big|_{t=t_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^{n+1}F\Big|_{t=t_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F\Big|_{t=t_0+\theta\Delta t} \qquad (1)$$

Таким образом, ф-ла (1) – это обычная ф-ла Тейлора для ф-ии одной переменной, но записанная в след. виде – через дифф-лы ф-ии. Для функции многих переменных имеет место аналогичная формула.

Теорема 19. Если ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ $(n+1)$ раз дифф-ма в нек. ε-окр. т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то $\forall$ т. $M(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_m^0+\Delta x_m)$ из этой ε-окр. приращение ф-ии $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ можно представить в виде

$$\Delta u = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2!}d^2u\Big|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!}d^nu\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\Big|_N \qquad (2)$$

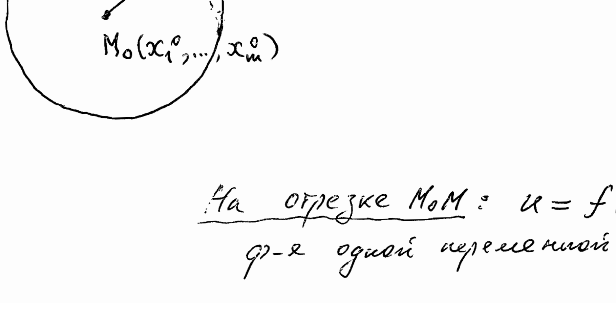
где N – нек. точка, лежащая на отрезке M_0M, а дифф-лы d^ku вычисляются по ф-ле:

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u.$$

Ф-ла (2) наз-ся ф-лой Тейлора для ф-ии $u = f(M)$ с центром разл. в т. M_0.

Док-во.

Зафиксируем точку $M(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_m^0+\Delta x_m)$.



Уравнение отрезка M_0M можно записать в виде

$$x_1 = x_1^0 + t\cdot\Delta x_1, \dots, x_m = x_m^0 + t\Delta x_m \quad (3)$$
$$0 \le t \le 1$$

$$t = 0 \Leftrightarrow M_0, \quad t = 1 \Leftrightarrow M$$

На отрезке M_0M: $u = f(x_1^0+t\Delta x_1, \dots, x_m^0+t\Delta x_m) \equiv F(t)$ – сложная ф-я одной переменной t, причём $F(t)$ $(n+1)$ раз дифф-ма на отрезке $0 \le t \le 1$.

Заметим, что

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0) \qquad (4)$$

Применим к разности $F(1)-F(0)$ ф-лу (1). Для этого в ф-ле (1) нужно положить $t_0=0$, $t=1$, $dt=\Delta t=1-0=1$. Получим

$$F(1)-F(0) = dF\Big|_{t=0} + \dots + \frac{1}{n!} d^nF\Big|_{t=0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F\Big|_{t=\theta} \qquad (5)$$

Т.к. $x_1, \dots, x_m$ — линейные ф-ии t (см. (3)), то диф-лы d^kF можно вычислить по ф-ле (4) §7, т.е.

$$d^kF\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^k u\Big|_{M_0}, \text{ где}$$

$dx_1, \dots, dx_m$ — диф-лы ф-ий (3): $dx_1 = dt\cdot\Delta x_1 = \Delta x_1, \dots, dx_m = dt\cdot\Delta x_m = \Delta x_m$. Итак,

$$d^kF\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\Big|_{M_0} \qquad (6)$$

и аналогично

$$d^{n+1}F\Big|_{t=\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^{n+1}\Big|_{N(x_1^0+\theta\Delta x_1, \dots, x_m+\theta x_m)} \qquad (7)$$

Т.к. $0<\theta<1$, то $N \in$ отрезку M_0M.

Подставляя (6) и (7) в (5) и учитывая (4), получаем ф-лу (2).

Теорема доказана.

2005г. Л. 7 2009г. Л. 7

Следствия. 1) При $n=0$ из (2) получаем ф-лу Лагранжа конечных приращений для ф-ии многих переменных

$$\Delta u = f(x_1^0+\Delta x_1, \dots, x_m^0+\Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) = du\Big|_N =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(N)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(N)\Delta x_m.$$

2) Ф-лу Тейлора можно записать не через дифференциалы, а через производные. Для этого нужно раскрыть выражения для дифференциалов $d^ku\Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}\Delta x_m\right)^k u\Big|_{M_0}$ (см. п.0.) Кроме того, положим $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i=1, \dots, m)$. Тогда получим

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)(x_1-x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)(x_m-x_m^0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)(x_1-x_1^0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x_m^n}(M_0)(x_m-x_m^0)^n + R_{n+1} \equiv P_n(x_1, \dots, x_m) + R_{n+1},$$

где $P_n(x_1,\dots,x_m)$ — многочлен степени $\le n$ от $x_1,\dots,x_m$, обладающий тем свойством, что все его ч. пр-е до n-го порядка включительно (в т. M_0) равны соотв-м ч. пр-м ф-ии $f(x_1,\dots,x_m)$ в т. M_0 (наз-ся многочленом Тейлора ф-ии $f(M)$), а $R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1}u\big|_N$ — остаточный член.

Замечание. Положим (при условии Т.19) $\rho=\rho(M_0,M)=\sqrt{\Delta x_1^2+\dots+\Delta x_m^2}$. Нетрудно док-ть, что $R_{n+1}=o(\rho^n)$ — ост. член в форме Пеано. Но как и в случае ф-ии одной переменной ост. член в форме Пеано можно получить при более слабых требованиях, чем в Т.19. В частности, для $n=2$ справедлива

Т.19^a Если ф-я $u=f(M)$ дважды диф-ма в т. M_0, то приращение ф-ии $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ можно представить в виде

$$\Delta u = du\big|_{M_0}+\frac12 d^2u\big|_{M_0}+o(\rho^2),$$

где $\rho=\rho(M_0,M)$.

Док-во. Введём ф-ю $g(M)=f(M)-f(M_0)-du\big|_{M_0}-\frac12 d^2u\big|_{M_0}$. Тр. док. $g(M)=o(\rho^2)$ при $M\to M_0$.
(самостоятельно

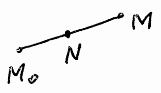
$$g(M)=g(x_1,\dots,x_m)=f(M)-f(M_0)-\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)(x_i-x_i^0)-\frac12\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)=f(M)-P_2(x_1,\dots,x_m)$$

Элементарно проверяется, что $g(M_0)=0$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)=0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)=0$ $(i,j=1,\dots,m)$.
Ф-я $g(M)$, как и $f(M)$, дважды диф-ма в т. M_0, т.е. $g(M)$ диф-ма в нек. ε-окр. т. M_0 и все $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ диф-мы в т. M_0. По опр. диф-сти

$$\Delta\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial g}{\partial x_i}(M)-\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)}_{=0}=d\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{M_0}+o(\rho)=\sum_{j=1}^m\underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_i}(M_0)}_{=0}(x_j-x_j^0)+o(\rho)=o(\rho).$$

Отсюда $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M)=o(\rho)$, где $\rho=\rho(M_0,M)$.

По ф-ле Лагранжа $g(M)-\underbrace{g(M_0)}_{=0}=\sum_{i=1}^m\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}(N)}_{o(\rho_{M_0N})}(x_i-x_i^0)$



$M_0N<M_0M$, поэтому $o(\rho_{M_0N})=o(\rho_{M_0M})=o(\rho)$.

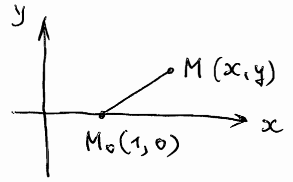
Сл-но, $g(M)=\sum_{i=1}^m o(\rho)(x_i-x_i^0)\Rightarrow\frac{g(M)}{\rho^2}=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{x_i-x_i^0}{\rho}\to0$, при $\rho\to0$,

т.е. $g(M)=o(\rho^2)$, ч.т.д.

Пример. $u = x^y$, $M_0(1,0)$.

$$u(M_0)=1,\ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=0 \Rightarrow du\Big|_{M_0}=0,$$

$$d^2u\Big|_{M_0} = 2dx\,dy \text{ (см. §7)}$$



$dx = \Delta x = x-1$, $dy = \Delta y = y - 0 = y$, $\rho(M_0; M) = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

По ф-ле Тейлора

$$\Delta u = u(M) - u(M_0) = du\Big|_{M_0} + \frac{1}{2} d^2u\Big|_{M_0} + o(\rho^2),$$

откуда

$$x^y = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2(x-1)y + o(\rho^2) = 1 - y + xy + o\left((x-1)^2+y^2\right)$$

$P_2(x,y) = 1 - y + xy$ – многочлен Тейлора.

В малой окр-ти т. $M_0(1,0)$: $x^y \approx 1 - y + xy$.

§ 9. Локальный экстремум.

Пусть ф-я $u = f(M)$ определена в нек. окр. т. $M_0 \in R^m$.

Определение. Говорят, что ф-я $u = f(M)$ имеет в т. M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая ε-окр. т. M_0, в которой $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$) при $M \neq M_0$.

Теорема 20. (необх. усл. экстремума).

Если в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ ф-я $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет локальный экстремум и если в т. M_0 существует частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, то $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

Док-во. Зафиксируем все аргументы, кроме x_k, положив $x_i = x_i^0$ ($i \neq k$), и рассмотрим функцию одной переменной $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) \equiv \varphi(x_k)$. Эта ф-я имеет локальный экстремум в т. $x_k = x_k^0$ и имеет производную в т. x_k^0: $\varphi'(x_k^0) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$.

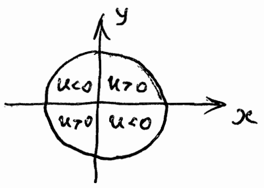
По теореме о необх. усл. экстремума для ф-ии одной переменной $\varphi'(x_k^0)=0$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)=0$. Теорема доказана.

Следствие. Если ф-я $u=f(M)$ имеет в т. M_0 локальный экстремум и дифф-ма в т. M_0, то

$$du\Big|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m=0\ (\forall dx_1,\dots,dx_m).$$

Замечание. Условие $du\big|_{M_0}=0$ является только необходимым, но не дост-м условием локального экстр. диф-мой ф-ии в т. M_0.

Пример. $u=xy$; $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$



Однако в т. $O(0,0)$ экстремума данной ф-ии нет, т.к. в любой окр-ти т. $O(0,0)$ функция принимает значения $u(x,y)>u(0,0)=0$ и также значения $u(x,y)<u(0,0)$.

Точку M_0, в которой $du=0$, будем называть точкой возможного экстремума ф-ии.

Некоторые сведения о квадратичных формах.

Функция $Q(x_1,\dots,x_m)=\sum\limits_{i,j=1}^{m}a_{ij}\,x_i x_j=a_{11}x_1^2+$
$+a_{12}x_1x_2+\dots+a_{1m}x_1x_m+a_{21}x_2x_1+\dots+a_{mm}x_m^2$,

где a_{ij} – числа, $a_{ij}=a_{ji}$, называется квадратичной формой от переменных $x_1,\dots,x_m$.

Квадр. форма наз-ся положительно определённой (отрицательно определенной), если $Q(x_1,\dots,x_m)\geq 0$ (≤ 0) $\forall(x_1,\dots,x_m)$, причём $Q=0$ лишь в начале координат, т.е. при $x_1=\dots=x_m=0$.

Пример: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ – положс. опр. кв. ф.

Положс. и отриц. опр. кв. формы наз-ся знакоопределёнными

Кв. форма наз-ся квазизнакоопределённой, если она принимает значения либо только неотрицательные, либо только неположительные, но обращается в нуль не только в начале координат.

Пример: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$,
$Q(2,1) = 0$.

Кв. форма наз-ся знакопеременной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример: $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2$; $Q(1,0) = 2 > 0$,
$Q(0,1) = -1 < 0$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ наз-ся матрицей кв. формы

$Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$. Отметим, что A – симметричная матрица, т.к. $a_{ij} = a_{ji}$.

Миноры $\delta_1 = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots,$
$\delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$ наз-ся угловыми минорами матр. A.

Критерий Сильвестра знакоопределенности кв. формы.

Для того чтобы кв. форма $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительные: $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\ldots$, $\delta_m > 0$.

Для того чтобы квадр. форма была отрицательно определенной, необх. и дост., чтобы знаки угловых миноров чередовались следующим образом: $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0$, $\delta_4 > 0$, $\ldots$

2007г. Л.8

Достаточное условие экстремума.

Для ф-ии одной переменной $y = f(x)$ достаточным условием минимума (максимума) в т. x_0 является условие $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ (< 0).

Это же условие можно записать через дифференциалы функции так: $dy\big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x = 0$, $d^2y\big|_{x_0} = f''(x_0)(\Delta x)^2 > 0$ (< 0) $\forall\, \Delta x \neq 0$.

Аналогичное достаточное условие имеет место и для функции многих переменных.

Для функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ первый и второй диф-лы в т. M_0 имеют вид:

$$du\big|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)\cdot \Delta x_i,$$

$$d^2u\big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j \quad (\text{ф-ла (5) из } §7)$$

Отметим, что $d^2u\big|_{M_0}$ — квадратичная форма от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$.

Теорема 21. Пусть: 1) функция $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$ дважды дифференцируема в т. $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$; 2) $du\big|_{M_0} = 0$; 3) $d^2u\big|_{M_0}$ — положительно (отрицательно) определенная кв. форма от $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$.

Тогда ф-я $u = f(M)$ имеет в т. M_0 локальный минимум (максимум)

Док-во. Рассмотрим случай, когда $d^2u\big|_{M_0}$ — положит. опр. кв. ф. Требуется док-ть, что $\exists$ δ-окр. т. M_0, в которой

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0 \quad \text{при } M \neq M_0.$$

Пусть $M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$ — произвольная точка из окр-ти т. M_0, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$.

Согласно теореме $19^{а}$ Δu можно представить в виде

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = \underbrace{du\big|_{M_0}}_{=0} + \frac{1}{2} d^2u\big|_{M_0} + o(\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\, \Delta x_i \Delta x_j + o(\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\, \frac{\Delta x_i}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_j}{\rho} + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right).$$

Введем обозначения: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) = a_{ij}$, $\frac{\Delta x_i}{\rho} = h_i$,

$$Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j, \quad \alpha(\rho) = \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \to 0 \text{ при } \rho \to 0.$$

Тогда

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 (Q + \alpha(\rho)),$$

величины $h_1, \ldots, h_m$ удовлетворяют равенству

$$h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_m^2 = 1, \qquad (S)$$

а $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Уравнение (S) является уравнением сферы радиуса 1 в пространстве R^m точек с координатами $(h_1, \ldots, h_m)$.

Кв. форма Q в силу условия ③ теоремы (явл-ся положит. определенной), т.е. $Q > 0$ $\forall\, h_1, \ldots, h_m$, одновременно не равных нулю. В частности,

$$Q(h_1, \ldots, h_m) > 0 \text{ во всех точках сферы } (S).$$

Кроме того, $Q(h_1, \ldots, h_m)$ — непрерывная ф-я $h_1, \ldots, h_m$, а сфера (S) — ограниченное замкнутое множество. По 2-й теореме Вейерштрасса ф-я Q достигает на сфере (S) своей точной нижней грани, т.е. имеет на сфере (S) минимальное значение. Обозначим его буквой m. Тогда $Q(h_1, .., h_2) \geq m > 0$ на сфере (S).

Т.к. $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, то $\exists\, \delta > 0$, такое, что $|\alpha(\rho)| < m$ при $0 < \rho < \delta$. Поэтому в δ-окр. т. M_0 имеем:

$$\Delta u = \frac{1}{2}\rho^2 [Q + \alpha(\rho)] > 0 \text{ при } \rho \neq 0, \text{ т.е. при } M \neq M_0,$$

что и треб. док-ть.

<u>Теорема 22.</u> Пусть выполнены условия ① и ② теоремы 21 и пусть ③ $d^2u\big|_{M_0} = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j$ — знакопеременная кв. форма. Тогда в т. M_0 экстремума функции нет.

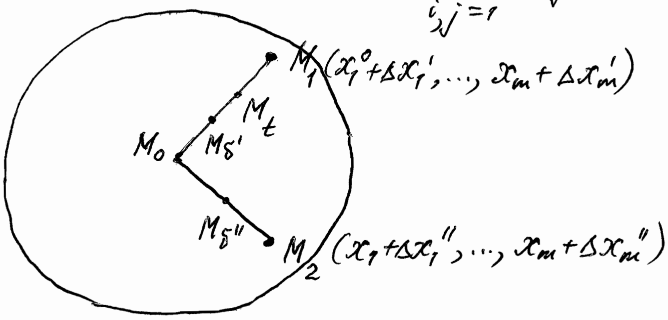
<u>Док-во.</u> (Изучить самост-но или на консультации).

В силу условия ③ $\exists\, \Delta x_1', \dots, \Delta x_m'$, такие, что число

$$Q' = \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)}_{a_{ij}} \Delta x_i' \Delta x_j' > 0,$$

и $\exists\, \Delta x_1'', \dots, \Delta x_m''$, такие, что число

$$Q'' = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \Delta x_i'' \cdot \Delta x_j'' < 0.$$



Положим $\rho' = \rho(M_1, M_0) = \sqrt{(\Delta x_1')^2 + \dots + (\Delta x_m')^2}$ — нек. число.

Произвольная точка M_t на отрезке M_0M_1 имеет координаты $M_t(x_1^0 + t\Delta x_1', \dots, x_m^0 + t\Delta x_m')$, $0 \le t \le 1$; $t=0 \Leftrightarrow M_0$, $t=1 \Leftrightarrow M_1$

согласно теореме 19² имеем:

$$\Delta u = f(M_t) - f(M_0) = \cancel{du\big|_{M_0}}^{\,0} + \tfrac{1}{2} d^2u\big|_{M_0} + o(t^2\rho'^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t\Delta x_i')(t\Delta x_j') + o(t^2) = \frac{1}{2}t^2\Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\Delta x_i' \Delta x_j' +$$

$$+ \frac{o(t^2)}{t^2}\Big) = \frac{1}{2}t^2\Big(Q' + \frac{o(t^2)}{t^2}\Big).$$

Т.к. $\frac{o(t^2)}{t^2} \to 0$ при $t \to 0$, то $\exists\, \delta' > 0$, такое, что

$$\left|\frac{o(t^2)}{t^2}\right| < Q' \text{ при } 0 < t < \delta'.$$

Отсюда следует, что на отрезке $M_0M_{\delta'}$: $\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0$ при $M \ne M_0$.

Аналогично доказывается, что на отрезке M_0M_2 сущ-т точка $M_{\delta''}$, такая, что на отрезке $M_0M_{\delta''}$: $\Delta u < 0$ при $M \ne M_0$

Таким образом, в любой окр-ти т. M_0 имеются точки M, для которых $\Delta u = f(M) - f(M_0) > 0$, и также имеются точки, для которых $\Delta u < 0$.

Сл-но, в т. M_0 экстремума нет. Теорема доказана

Примеры. 1) $u = x^y$ $(x>0)$.

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= yx^{y-1} = 0 \\ u_y &= x^y \ln x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \Rightarrow M_0(1,0) \text{ - точка возм. экстремума}$$

$d^2u\big|_{M_0} = 2\Delta x \Delta y$ – знакопеременная кв. ф.

Сл-но, в т. $M_0(1,0)$ экстр. нет.

2) $u = x^2 + 2xy + 2y^2 + xz + z^3 - 4z$

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= 2x + 2y + z = 0 \\ u_y &= 2x + 4y = 0 \\ u_z &= x + 3z^2 - 4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -2y \left|\begin{aligned} &-2y + z = 0 \\ &x = -z \\ &3z^2 - z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = \tfrac{4}{3} \end{aligned}\right.$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{4}{3};\ y_1 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{2}{3}$

2 точки возм. экстремума

$$M_1\left(1, -\tfrac{1}{2}, -1\right); \quad M_2\left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

Исследуем второй дифференциал d^2u в точках M_1 и M_2.

$u_{xx} = 2,\ u_{xy} = 2,\ u_{xz} = 1;$

$u_{yx} = 2,\ u_{yy} = 4,\ u_{yz} = 0;$

$u_{zx} = 1,\ u_{zy} = 0,\ u_{zz} = 6z;$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

Угловые миноры: $\delta_1 = 2 > 0,\ \delta_2 = 4 > 0,\ \delta_3 = 24z - 4$

В т. M_1: $\delta_3 < 0 \Rightarrow d^2u\big|_{M_1}$ – знакопеременная кв. ф. В самом деле,

$$d^2u\Big|_{\substack{M_1 \\ \Delta x \neq 0 \\ \Delta y = \Delta z = 0}} = 2(\Delta x)^2 > 0, \quad d^2u\Big|_{\substack{M_1 \\ \Delta x = \Delta y = 0 \\ \Delta z \neq 0}} = -6(\Delta z)^2 < 0 \Rightarrow \text{В т. } M_1 \text{ экстр. нет.}$$

В т. M_2: $\delta_3 > 0 \Rightarrow d^2u\big|_{M_2}$ – полож. опр. кв. ф. $\Rightarrow$ в т. M_2 – локальный минимум.

Замечание. Если $du\big|_{M_0} = 0$, а $d^2u\big|_{M_0}$ – квазизнакоопределенная кв. ф., то в т. M_0 экстр. может быть и может не быть (нужно доп. исследование).

Случай функции двух переменных

$$u = f(x,y)$$

$$d^2u\Big|_{M_0} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)}_{a_{11}}(\Delta x)^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(M_0)}_{a_{12}}\Delta x\cdot\Delta y + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)}_{a_{22}}(\Delta y)^2 =$$

$$= a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\,\Delta x\cdot\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2.$$

Пусть выполнены условия ① и ② теоремы 21.

Тогда: I. Если $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в т. M_0 функция $u = f(x,y)$ имеет лок. экстремум: минимум, если $a_{11} > 0$; максимум, если $a_{11} < 0$.

II. Если $D < 0$, то в т. M_0 экстремума нет.

III. Если $D = 0$, то в т. M_0 экстремум может быть и может не быть.

Док-во изучить самостоятельно.

Для случая III рассмотреть примеры:

$u = x^4 + y^4$, т. $M_0(0;0)$;

$u = x^3y^3$, т. $M_0(0;0)$.