МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов, А. А. Панин

Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу

Том I. Общая теория

Часть I. Лекции

Москва
Физический факультет МГУ
2016

К о р п у с о в М. О., П а н и н А. А.
Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том I. Общая теория. Часть I. Лекции. — М.: Физический факультет МГУ, 2016. 255 с.
ISBN 978-5-8279-0130-3

В курсе лекций изложены основы общей теории линейных пространств и операторов, действующих в линейных пространствах. Изложены основы теории абстрактной меры Лебега, теория пространств Лебега, теория метрических, топологических, векторных топологических, банаховых и гильбертовых пространств, спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, а также некоторые результаты теории компактности множеств в метрических пространствах.

Материал книги используется в курсе «Линейный и нелинейный функциональный анализ», который авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся в области функционального анализа.

Ил. 47. Библиогр. 28 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
проф. *В. Ю. Попов,*
проф. *Г. А. Свиридюк,*
проф. *М. В. Фалалеев*

Печатается по решению Учёного совета
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

ISBN 978-5-8279-0130-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

II. Метрические пространства

III. Топологические пространства

IV. Векторные топологические пространства

V. Банаховы пространства

VI. Гильбертовы пространства. Общая теория

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ функционального анализа для студентов кафедры математики физического факультета МГУ. В первом томе «Общая теория» подробно разбираются основы элементарной и абстрактной теории меры Лебега согласно подходу А. Н. Колмогорова. После этого мы рассматриваем теорию интеграла Лебега и пространств Лебега. Подробно рассматриваются такие вопросы линейного функционального анализа, как метрические пространства, топологические и векторные топологические пространства с углубленным изучением сильной, слабой и $*$-слабой топологий и теории направленностей. Затем излагаются основы теории банаховых пространств с доказательством трёх основных принципов функционального анализа — теорем Хана–Банаха, Банаха–Штейнгауза и теоремы об открытом отображении. При этом мы подробно рассматриваем сильную, слабую и $*$-слабую сходимости в банаховых пространствах. Подробно изложена теория транспонированных операторов, действующих в банаховых пространствах. На основе интеграла Данфорда мы рассматриваем спектральное исчисление в банаховых пространствах. Излагаются основы теории гильбертовых пространств и теория самосопряжённых операторов.

Книга состоит из основных лекций, в которых излагаются базовые сведения, из семинаров–лекций, в которых помимо большого количества примеров, иллюстрирующих основные свойства объектов, введённых в лекциях, рассматриваются также тонкие вопросы общей теории и, наконец, из дополнительных лекций, которые предназначены для самостоятельного изучения. В практике нашего преподавания студенты устно защищают решения задач перед преподавателем. (Один из авторов оценил на себе полезность подобной системы, за что очень благодарен своим учителям, и прежде всего А. Шеню.) Основные лекции и лекции–семинары нумеруются независимо. Значительная часть примеров и задач взята из различных учебников и задачников. Мы постарались наиболее полно отразить их список в библиографии.

Мы глубоко признательны А. Г. Свешникову, А. Н. Боголюбову, Е. Е. Букжалёву, Н. Н. Нефёдову и А. Г. Яголе за полезное обсуждение книги, а также рецензентам: В. Ю. Попову, Г. А. Свиридюку и М. В. Фалалееву за ценные замечания, существенно улучшившие книгу. Отдельно хотим выразить благодарность студентам А. А. Белову и В. В. Цепелеву, указавшим нам на ряд опечаток и неточностей.

Авторы

Тематическая лекция I

МЕРА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Лекция 1

ТЕОРИЯ МЕРЫ ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВ ИЗ $\mathbb{R}^2$

§ 1. Необходимость расширения понятия интеграла

Как известно из курса математического анализа функция Дирихле $D(x)$, определенная равенством

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману, например, на отрезке $[0, 1]$. С другой стороны, эта функция имеет важное значение в теории стохастических процессов. Таким образом, возникает необходимость в расширении интеграла Римана на случай подобных функций.

§ 2. Некоторые факты из теории множеств

Напомним следующие операции над множествами:

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\},$$
$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$, тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)], \tag{2.1}$$
$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \tag{2.2}$$
$$A \vartriangle B = (P \setminus A) \vartriangle (P \setminus B). \tag{2.3}$$

ПРИМЕР 2. Кроме того, справедливы следующие вложения:

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2). \tag{2.4}$$

Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2). \tag{2.5}$$

§ 3. Элементарные множества на плоскости

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1_x \times \mathbb{R}^1_y$. Будем называть прямоугольниками все множества следующего вида:

$$\Pi = \{A_x \otimes B_y\},$$

$$A_x = \{x \in \lfloor a, b \rceil\}, \quad B_y = \{y \in \lfloor c, d \rceil\}.$$

(Символ $\lfloor a, b \rceil$ обозначает конечный промежуток любого типа.)

Здесь Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$, и отрезком (интервалом, полуинтервалом), когда $a = b$ и $c < d$.

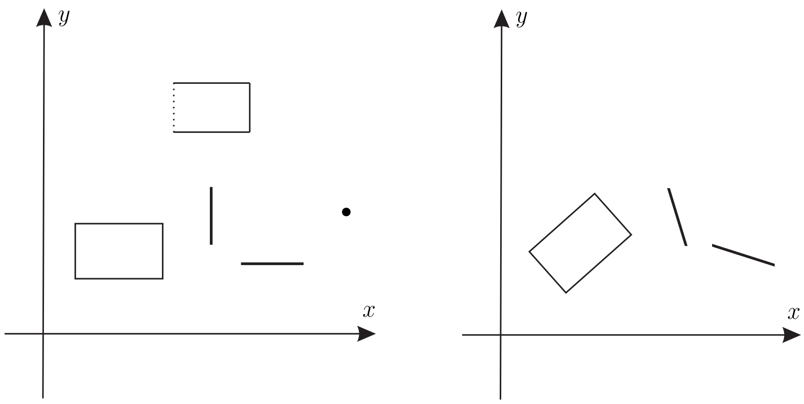

Рис. 1. «Правильные» и «неправильные» прямоугольники.

Такой выбор прямоугольников обусловлен тем, что пересечение «правильных» прямоугольников — со сторонами, параллельными осям координат, — является прямоугольником, а для прямоугольников произвольной ориентации («неправильных») это, вообще говоря, неверно.

Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом, как площадь:

$$m(\Pi) = (b - a)(d - c).$$

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок (интервал, полуинтервал), то по определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$

Можно доказать, что введённая мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \text{— прямоугольник},$$

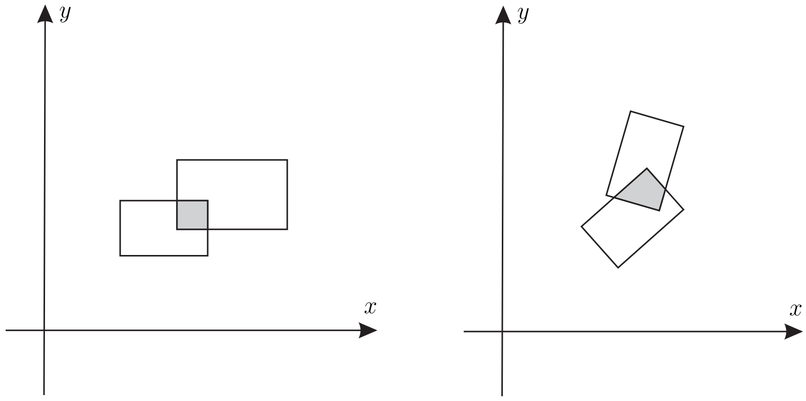

Рис. 2. Пересечения «правильных» и «неправильных» прямоугольников.

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\Pi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m(\Pi_i). \tag{3.1}$$

Теперь мы введём понятие *элементарного множества* из $\mathbb{R}^2$.

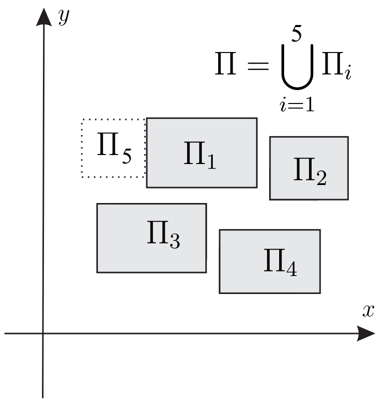

Рис. 3. Пример элементарного множества.

Определение 4. *Элементарным множеством из $\mathbb{R}^2$ называется множество, полученное объединением конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m'(A)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}m(\Pi_i),\quad \Pi_i\cap\Pi_j=\varnothing\quad\text{при}\quad i\neq j. \tag{3.2}$$

Это определение корректно, т. е. сумма в правой части не зависит от выбора разбиения данного элементарного множества на прямоугольники.

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \tag{3.3}$$

где

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing, \quad Q_i \cap Q_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу равенств (3.3) имеем

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i\right), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\Pi_i \bigcap Q_j\right), \tag{3.4}$$

причём

$$\begin{gathered} \left(Q_{j_1} \bigcap \Pi_i\right) \bigcap \left(Q_{j_2} \bigcap \Pi_i\right) = \varnothing \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2, \\ \left(\Pi_{i_1} \bigcap Q_j\right) \bigcap \left(\Pi_{i_2} \bigcap Q_j\right) = \varnothing \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Очевидно, что множество

$$Q_j \bigcap \Pi_i = \Pi_i \bigcap Q_j$$

является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (3.2) в силу (3.3), (3.4), (3.5) и (3.1) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i\right)\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} m\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} m\left(\Pi_i \bigcap Q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} m(Q_j). \boxtimes \end{aligned} \tag{3.6}$$

Непосредственно из определения следуют важные свойства меры на элементарных множествах. Именно, если A, B — элементарные множества, то

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B), \tag{3.7}$$

(конечная аддитивность)

$$A \subset B \Rightarrow m'(A) \leqslant m'(B) \tag{3.8}$$

(монотонность).

Имеет место свойство *счётной полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема 2. *Пусть A и A_n при $n \in \mathbb{N}$ являются элементарными множествами, причём*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$m'(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n). \tag{3.9}$$

Доказательство. Если ряд в правой части неравенства (3.9) расходится, то утверждение теоремы тривиально. В противном случае доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что для элементарного множества A можно построить такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, т. е. составленное из попарно непересекающихся замкнутых прямоугольников, что

$$\overline{A} \subset A$$

и

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j, \quad \text{где} \quad \Pi_i \bigcap \Pi_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

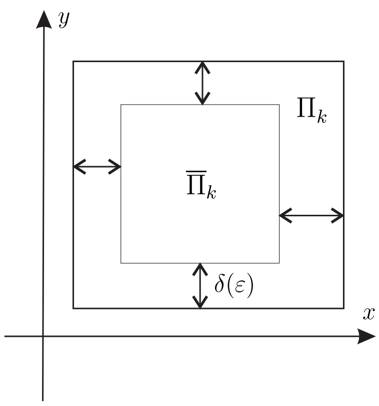

Рис. 4. Построение множества $\overline{\Pi}_k$.

Пусть $\overline{\Pi}_j$ — это замкнутые прямоугольники (т. е. имеющие вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которых имеют место вложения

$$\overline{\Pi}_j \subset \Pi_j, \quad \overline{A} = \bigcup_{j=1}^{l} \overline{\Pi}_j,$$

и мера которых равны

$$m(\overline{\Pi}_j) \geqslant m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l} \Rightarrow m'(\overline{A}) = \sum_{j=1}^{l} m(\overline{\Pi}_j) \geqslant \sum_{j=1}^{l} m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда мы приходим к неравенству (3.10). ⊠

Шаг 2. Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдётся такое открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$, т. е. составленное из открытых прямоугольников (прямоугольники вида $(a,b) \otimes (c,d)$), что

$$A_n \subset \widetilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{3.11}$$

□ Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем открытый прямоугольник $\widetilde{\Pi}$, «близкий» к прямоугольнику Π следующим образом:

$$\Pi_l = \lfloor a, b\rceil \otimes \lfloor c, d\rceil \Rightarrow \widetilde{\Pi}_l = (a-\delta, b+\delta) \otimes (c-\delta, d+\delta),$$

причём $\delta > 0$ выберем из условия

$$m\left(\widetilde{\Pi}_l\right) = m\left(\Pi_l\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\frac{1}{m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (b-a+2\delta)(d-c+2\delta) = (b-a)(d-c) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\frac{1}{m}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$4\delta^2 + (d-c+b-a)2\delta = \frac{\varepsilon}{m2^{n+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta = -(d-c+b-a) + \left[(d-c+b-a)^2 + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}m}\right]^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\widetilde{A}_n := \bigcup_{l=1}^{m} \widetilde{\Pi}_l$$

удовлетворяет условию (3.11). ⊠

Шаг 3. Ясно, что

$$\overline{A} \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n. \tag{3.12}$$

Но $\overline{A}$ — это замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^2$, т. е. так называемый *компакт*.

Справедливо следующее утверждение из вещественного анализа, подробное доказательство которого будет проведено позже при изучении метрических пространств в лекции 4:

Лемма 1. *Из любого произвольного покрытия компакта* $\overline{A}$ *открытыми прямоугольниками* $\widetilde{A}_n$

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n$$

можно выделить конечную подсистему

$$\left\{\widetilde{A}_{n_i}\right\}_{i=1}^{s} \quad \textit{такую, что} \quad \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{A}_{n_i}.$$

Используя свойство монотонности меры элементарных множеств, можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}). \tag{3.13}$$

Теперь из неравенств (3.10), (3.11) и (3.13) вытекает цепочка [1]

$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\widetilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \tag{3.14}$$

Поскольку такое рассуждение может быть проведено для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Мера* m', *заданная на элементарных множествах, является* σ*-аддитивной*:

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n), \tag{3.15}$$

если A, A_n $(n{=}1{,}2{,}\ldots)$ — *элементарные множества и*

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \varnothing \quad \textit{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

---

[1] Без промежуточного построения множеств $\{\widetilde{A}_n\}$ и $\overline{A}$ мы обойтись не можем.

□ Очевидно, нужно доказать лишь неравенство, обратное (3.9). Используем монотонность меры элементарных множеств

$$\sum_{n=1}^{N} m'(A_n) = m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant m'(A)$$

и предельный переход в неравенстве. ⊠

§ 4. Внешняя мера множеств

Определение 5. *Внешней мерой μ^* множества A называется число*

$$\mu^*(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{A\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \tag{4.1}$$

где $\{\Pi_k\}$ — произвольная конечная или счётная система прямоугольников (возможно, пересекающихся), покрывающая A.

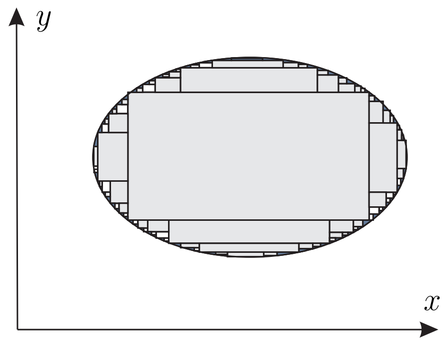

Рис. 5. Покрытие множества прямоугольниками.

Замечание 4. Пока мы рассматриваем лишь случай

$$A \subset \Pi \stackrel{\mathrm{def}}{=} [0,1]\times[0,1],$$

имеем $m(\Pi) = 1$ и из равенства (4.1) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leqslant m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

Следствие. *Из определения внешней меры сразу же вытекает, что*

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

для всякого элементарного множества A.

□ Действительно, поскольку

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k, \quad \Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2} = \varnothing, \quad k_1 \neq k_2 \Rightarrow m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(\Pi_k).$$

то, с учётом монотонности меры m' элементарных множеств, infimum достигается на этой системе прямоугольников. ⊠

Справедливо следующее *утверждение о σ-полуаддитивности внешней меры*:

Теорема 3. *Пусть $A \subset \Pi$, $A_n \subset \Pi$ — произвольные множества и*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \tag{4.2}$$

Доказательство.

Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{4.3}$$

Но тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(\Pi_{k,n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Если положить $A_2 = A_3 = \ldots = \varnothing$, то сразу получаем монотонность внешней меры*: *если $A \subset B$ — произвольные множества, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.*

§ 5. Измеримые по Лебегу множества

Определение 6. *Множество A называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество B, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon. \tag{5.1}$$

При этом его мерой Лебега $\mu(A)$ называется его внешняя мера: $\mu(A) = \mu^*(A)$.

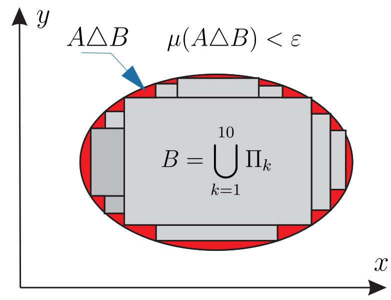

Рис. 6. «ε-приближение» множества A элементарным множеством B.

Замечание 5. Отметим, что из определения 6 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A, имеющих нулевую внешнюю меру.

☐ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $B = \varnothing$ и

$$\mu^*(A \vartriangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon. \boxtimes$$

Множество $\mathfrak{M}$ измеримых по Лебегу множеств обладает определённым набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме.

Лемма 2. *Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества A_ε, B_ε, что

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее в силу вложения (2.4) имеем

$$(A \cup B)\,\Delta\,(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon)\,,$$

откуда в силу монотонности внешней меры

$$\mu^*\left((A \cup B)\,\Delta\,(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)\right) \leqslant \mu^*\left(A\Delta A_\varepsilon\right) + \mu^*\left(B\Delta B_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Шаг 2. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество A_ε, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В силу (2.3) имеет место формула

$$(X\backslash A)\,\Delta\,(X\backslash A_\varepsilon) = A\Delta A_\varepsilon \Rightarrow \mu^*\left((X\backslash A)\,\Delta\,(X\backslash A_\varepsilon)\right) = \mu^*\left(A\Delta A_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Шаг 3. Справедлива следующая формула:

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (X\backslash A) \cup (X\backslash B)\,.$$

Следовательно, из пунктов 1 и 2 вытекает, что если $A, B \in \mathfrak{M}$, то

$$X\backslash A, X\backslash B, A \cup B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}.$$

Шаг 4. Последнее утверждение следует из пунктов 1–3 и следующей формулы:

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать σ-аддитивность меры Лебега μ на множестве $\mathfrak{M}$. Сначала докажем её *конечную* аддитивность.

Теорема 4. *Пусть*

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

где $A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \varnothing$ *при* $n_1 \neq n_2$, *причём* $A, A_n \in \mathfrak{M}$, *тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Доказательство.

Лемма 3. *Для любых множеств* A *и* B *имеет место следующее неравенство*:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B). \tag{5.2}$$

□ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \vartriangle B)\,, \quad B \subset A \cup (A \vartriangle B)\,,$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B). \quad \boxtimes$$

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу множеств A_1 и A_2.

Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Введём следующие обозначения:

$$A := A_1 \cup A_2, \quad B := B_1 \cup B_2. \tag{5.4}$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу (лемма 2) и, конечно, множество B является элементарным [1]. Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2), \tag{5.5}$$

поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются. Напомним, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера m' совпадают. Тогда из (5.3) и (5.5) вытекает следующее соотношение:

$$m'(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{5.6}$$

Наконец, в силу (5.2) имеют место следующие неравенства:

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \tag{5.7}$$

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leqslant \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{5.8}$$

В частности,

$$m'(B_1) > \mu^*(A_1) - \varepsilon, \quad m'(B_2) > \mu^*(A_2) - \varepsilon. \tag{5.9}$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2), \tag{5.10}$$

□ Докажем, что для конечно–аддитивной меры λ имеет место следующее равенство:

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2),$$

---

[1] Если $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, то возникает вопрос: а будет ли B объединением *непересекающихся* прямоугольников, как того требует определение элементарного множества? Легко сообразить, что да, поскольку объединение пересекающихся прямоугольников может быть разрезано на непересекающиеся прямоугольники.

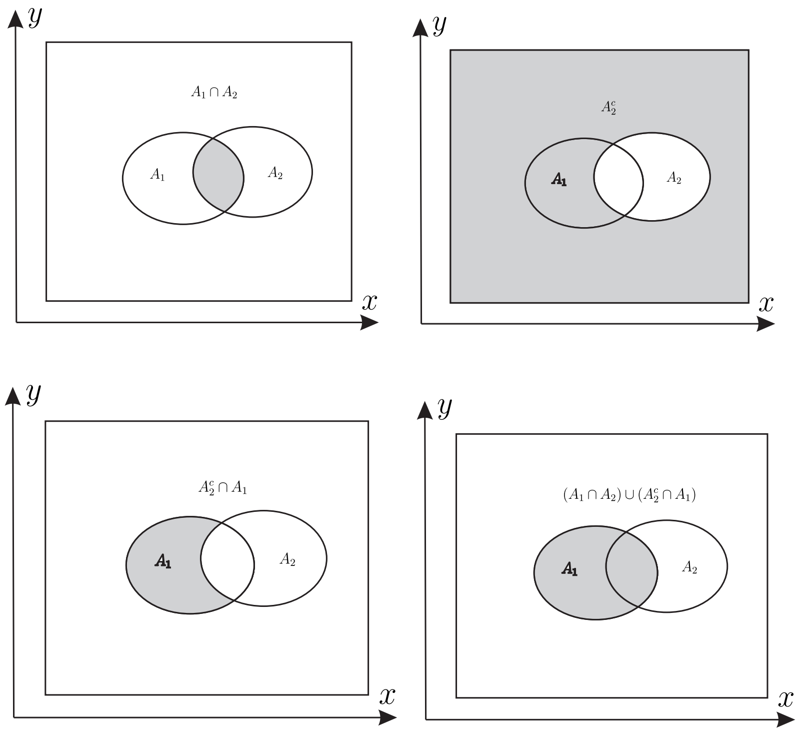

Рис. 7. Построение множества $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2^c \cap A_1)$.

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

где объединяемые множества не пересекаются и для удобства мы ввели обозначение

$$A^c := \Pi \backslash A.$$

Отсюда в силу конечной аддитивности меры λ приходим к равенствам

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), \quad \lambda(A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2),$$

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c). \quad \boxtimes$$

Из (5.6)–(5.10) вытекает оценка снизу

$$m'(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \tag{5.11}$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств:

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2).$$

Из (5.2) и (5.11) вытекает следующая цепочка соотношений:

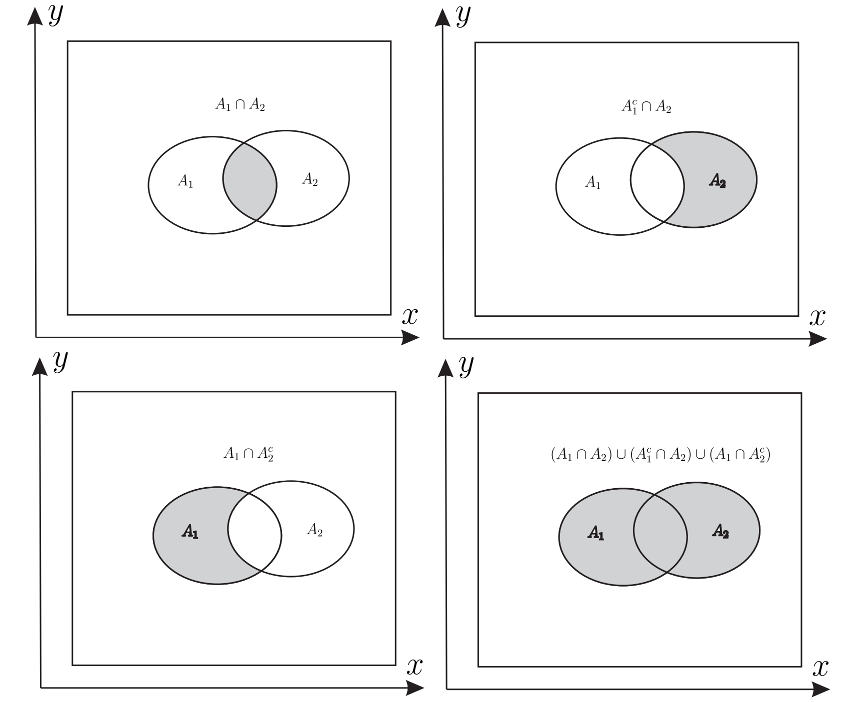

Рис. 8. Построение множества $A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$.

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \vartriangle B) = m'(B) - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant \\ \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \quad (5.12)$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \quad (5.13)$$

Обратное неравенство очевидно (полуаддитивность внешней меры), и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Теорема доказана.

§ 6. Счётная аддитивность измеримых множеств

Сначала докажем, что счётное объединение измеримых множеств измеримо.

Теорема 5. *Счётное объединение и счётное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.*

Доказательство.

Докажем, например, измеримость счётного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$
Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

$\square$ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:
$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$
Очевидно, что $A_{n_1}' \cap A_{n_2}' = \varnothing$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'. \quad \boxtimes$$
В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:
$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n'\right) \leqslant \mu(\Pi). \tag{6.1}$$
Поэтому ряд
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n')$$
сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2}$$
С другой стороны, измеримо множество
$$C := \bigcup_{n=1}^{N} A_n'.$$
Стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество B, что
$$\mu^*(C \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3}$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \vartriangle B \subset (C \vartriangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n'. \tag{6.4}$$

Стало быть, из (6.2)–(6.4) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Наконец, мы можем доказать важный результат *о σ-аддитивности меры Лебега.*

Теорема 6. *Пусть $\{A_n\}$ — это счётная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad \text{где} \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{6.5}$$

Доказательство.

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Обратное неравенство непосредственно следует из уже доказанной σ-полуаддитивности внешней меры.

Теорема доказана.

Дополнительная лекция 1

АБСТРАКТНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА

На прошлой лекции мы рассмотрели построение меры Лебега плоских множеств. Теперь наша задача — обобщить эту процедуру на случай произвольных множеств. При этом существо схемы построения абстрактной меры Лебега почти в точности повторяет схему, рассмотренную на прошлой лекции.

§ 1. Схема построения абстрактной меры Лебега

Исходя из результатов предыдущей лекции мы можем предъявить схему построения абстрактной меры Лебега.

Шаг 1. Прежде всего нам нужно указать семейство $\mathcal{A}$ элементарных множеств — подмножеств множества X, удовлетворяющих определённым требованиям замкнутости относительно основных операций над множествами: объединения множеств, пересечения множеств и дополнения множеств. Наконец, для произвольного множества из этого семейства задается априори некоторая конечно–аддитивная и положительная функция множеств m.

Шаг 2. Для произвольного подмножества $A \subset X$ по уже известной нам формуле вводится внешняя мера Лебега μ^*. После этого вводится семейство $\mathcal{A}_\mu$ измеримых по Лебегу множеств как таких множеств, которые сколь угодно точно по внешней мере Лебега можно приблизить элементарными множествами из семейства $\mathcal{A}$. Внешняя мера Лебега μ^*, рассматриваемая на $\mathcal{A}_\mu$, и есть искомая мера Лебега.

Шаг 3. Далее нужно доказать, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ замкнуто относительно операций объединения, пересечения, дополнения и счётного объединения множеств. Кроме того, нужно доказать, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, а мера μ^* является единственным продолжением, не только согласно схеме Лебега, исходной меры μ.

§ 2. Элементарные множества

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и σ-алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства*:

(i) $\varnothing,\ X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$;*

В том случае, если выполнено дополнительное свойство

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ верно*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

система множеств $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй.

Тривиальными примерами σ-алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\varnothing$, X. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества X, которое обозначается как 2^X.

Определение 2. *Пара $(\mathcal{A}, X)$, где $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется измеримым пространством.*

Определение 3. *Числовая функция μ называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Определение 4. *Числовая функция μ называется счётно-аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad A \in \mathcal{A},$$

имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счётно-аддитивная неотрицательная числовая функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется мерой.*

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из X, на котором задана мера μ, т. е. счётно-аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера μ.

При этом говорят, что задано пространство с мерой

$$(X, \mathcal{A}, \mu).$$

§ 3. Внешняя мера Лебега

Займёмся теперь продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение 6. *Внешняя мера $\mu^*(A)$ для каждого подмножества $A \subset X$ определяется следующим образом*:

$$\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)\,\middle|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}\right\}. \tag{3.1}$$

Замечание 1. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Замечание 2. Поскольку $\varnothing \in \mathcal{A}$, то фактически можно брать конечное покрытие.

Наконец, мы можем дать определение измеримого по Лебегу множества.

Определение 7. *Скажем, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу относительно меры μ, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества X обозначается как $\mathcal{A}_\mu$.

§ 4. Основная теорема об измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{A}_\mu$

Итак, мы предъявили способ продолжения меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры μ является числовая функция μ^* — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во-первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во-вторых, является ли внешняя мера μ^* мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть μ — это конечная ($\mu(X) < +\infty$) мера* [1]) *на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, причём внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$*;

[1]) По определению мера — это конечно–аддитивная и неотрицательная функция множеств.

(ii) *семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является σ-алгеброй, причём ограничение μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ является мерой*;

(iii) *мера μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ есть единственное неотрицательное продолжение меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$.*

Доказательство.

Шаг 1. Доказательство (i). Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A\Delta A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что *внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$.*

□ Действительно, по построению меры μ^* имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — любая такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n).$$

Оно следует из тождества $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

Можно доказать, что из счётной аддитивности и положительности меры μ вытекает счётная субаддитивность. Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств C_n, где

$$C_1 = B_1, \quad C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l$$

при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$.

Теперь можно воспользоваться определением счётной аддитивности, т. е. имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Тогда в силу определения внешней меры с учётом произвольности последовательности $\{A_n\}$ имеем неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй.

$\square$ Сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A) = A_\varepsilon \Delta A,$$

то

$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon\Delta A) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

С другой стороны, имеет место вложение

$$(A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon),$$

поэтому в силу монотонности внешней меры μ^* верны неравенства

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие равенства

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$

Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра. $\boxtimes$

Для доказательства того, что семейство $\mathcal{A}_\mu$ — σ-алгебра, нужно доказать ряд вспомогательных утверждений.

Шаг 3. Доказательство счётной субаддитивности внешней меры Лебега μ^*.

Лемма 1. *При условиях*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

в частности при

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty,$$

верно неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдётся система множеств

$$\{B_{nm}^{\varepsilon}\} \subset \mathcal{A}$$

такая, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем [1]

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счётную субаддитивность внешней меры.

Лемма доказана.

Шаг 4. «Неравенство треугольника» для меры.

---

[1] Читателя не должно смущать наличие двойного объединения элементарных множеств B_{nm}^{ε}, поскольку мы всегда можем «перенумеровать» систему множеств $\{B_{nm}^{\varepsilon}\}$ таким образом, чтобы объединение было по одному индексу.

Утверждение 1. *Справедливо неравенство*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A\Delta B) \tag{4.2}$$

для всех $A, B \in X$, *для которых* $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.

□ Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A\Delta B), \quad B \subset A \cup (A\Delta B),$$

поэтому в силу конечной субаддитивности внешней меры [1] имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B).$$

Стало быть, пришли к (4.2). ⊠

Шаг 5. Конечная аддитивность внешней меры на множестве $\mathcal{A}_\mu$.

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A \cap B = \varnothing$. Нам нужно доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

С этой целью нам достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

поскольку обратное неравенство есть конечная субаддитивность.

Заметим, что имеет место следующее вложение:

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B) \cup ((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)),$$

поэтому верно неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)), \tag{4.3}$$

где $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ удовлетворяют условию

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны,

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4.4}$$

Таким образом, из (4.3) и (4.4) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.5}$$

---

[1] Конечная субаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счётной субаддитивности.

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ и μ^* совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры μ на $\mathcal{A}$ верно равенство

$$\mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon). \tag{4.6}$$

Заметим, что в силу $A \cap B = \varnothing$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon).$$

И поэтому верна следующая оценка сверху:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, из (4.6) приходим к оценке снизу

$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Но тогда из (4.5) приходим к такой оценке снизу:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{4.8}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.2) имеют место неравенства

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A\Delta A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B\Delta B_\varepsilon).$$

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (4.8) получаем неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{4.9}$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \varnothing$.

Шаг 6. $\mathcal{A}_\mu$ — это σ–алгебра.

Теперь наша задача доказать, что счётное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счётного объединения

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

можно взять
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$
Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ (т. к. $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра) и B_n попарно не пересекаются, причём имеет место равенство
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$
Итак, ниже считаем, что A_n попарно не пересекаются. В силу конечной аддитивности функции μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ и её монотонности по включению мы приходим к следующим неравенствам:
$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$
в силу конечности меры μ.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.10}$$
В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $B \in \mathcal{A}$, что
$$\mu^*\left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Следовательно, в силу вложения
$$B \Delta \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right),$$
конечной аддитивности внешней меры и её счётной субаддитивности приходим к неравенству
$$\mu^*\left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(B \Delta \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \varepsilon.$$
Отсюда вытекает измеримость счётного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это σ-алгебра.

Шаг 7. Счётная аддитивность внешней меры Лебега.

Надо, однако, надо доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n), \quad \text{где} \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}_\mu \tag{4.12}$$

при оговорённых выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \tag{4.13}$$

в силу счётной субаддитивности внешней меры, а во-вторых, в силу её «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A) = \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right).$$

Устремляя N к бесконечности и учитывая (4.13), имеем равенство (4.12).

Шаг 8. Доказательство утверждения (iii):

Теперь докажем, что μ^* является единственным продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\mu$.

Замечание 3. Здесь нужно отметить следующее: какую схему продолжения меры μ с семейства множеств $\mathcal{A}$ на множество $\mathcal{A}_\mu$ мы бы ни взяли, мы всё равно получим внешнюю меру Лебега μ^*. В этом заключается единственность продолжения.

Пусть нет. Тогда на σ–алгебре $\mathcal{A}_\mu$ существует другая мера ν, совпадающая на $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ с исходной мерой μ. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдётся такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \Delta B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \Delta B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, \quad \mu(C_n) = \nu(C_n) = \mu^*(C_n),$$

причём

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A\Delta B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ, μ^* и ν совпадают. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\mu^*(B) - \nu(A)| = \\ = |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(B) - \nu(A)| \leqslant \mu^*(A\Delta B) + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Стало быть, меры μ^* и ν совпадают на σ-алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, что в силу единственности продолжения меры по Лебегу вытекает, что если за исходное пространство элементарных множеств с мерой взять уже построенную тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$, то после продолжения по Лебегу уже этого пространства мы получим в точности ту же самую тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$. В дальнейших лекциях мы будем рассматривать уже полученную тройку $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$.

Лекция 2

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Интеграл Лебега, конечно, строится не для всех функций, а только для так называемых измеримых. В дальнейшем для удобства вместо тройки $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$ мы будем писать просто $(X, \mathcal{A}, \mu)$, понимая под $\mathcal{A}$ уже полученную σ-алгебру измеримых множеств, а под μ уже продолженную по Лебегу меру.

§ 1. Измеримые по Лебегу функции

Итак, пусть у нас имеется измеримое пространство $(X, \mathcal{A}, \mu)$ с мерой Лебега μ. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x): X \to \mathbb{R}^1$ называется измеримой, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество*

$$\{x \in X : f(x) < c\}$$

принадлежит $\mathcal{A}$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Для измеримой функции f следующие множества измеримы:*

$$\{x : c_1 \leqslant f(x) < c_2\}, \quad \{x : f(x) \geqslant c_2\},$$

$$\{x : c_1 < f(x) \leqslant c_2\}, \quad \{x : f(x) \leqslant c_1\},$$

$$\{x : c_1 < f(x) < c_2\}, \quad \{x : c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\}.$$

Доказательство.

Действительно, пусть $f(x)$ измерима, тогда

$$A_1 = \{x : f(x) < c_1\}, \; A_2 = \{x : f(x) < c_2\} \in \mathcal{A},$$

$$B_n = \{x : f(x) < c_1 + 1/n\} \in \mathcal{A}.$$

Тогда измеримость указанных множеств вытекает из следующих формул:

$$\mathcal{A} \ni A_2 \backslash A_1 = \{x : c_1 \leqslant f(x) < c_2\}, \quad \mathcal{A} \ni X \backslash A_2 = \{x : c_2 \leqslant f(x)\},$$

$$\mathcal{A} \ni \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = B = \{x:\ f(x) \leqslant c_1\},$$

$$\mathcal{A} \ni \{x:\ f(x) < c_2\} \setminus \{x:\ f(x) \leqslant c_1\} = \{x:\ c_1 < f(x) < c_2\},$$

$$\{x:\ c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\} = (X \setminus A_1) \cap B \in \mathcal{A}.$$

При этом мы пользуемся замкнутостью σ-алгебры относительно операции счётного пересечения (см. задачу 3 лекции-семинара 3).

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Борелевские множества и непрерывные функции. Рассмотрим все открытые множества в пространстве $\mathbb{R}^N$, т. е. такие множества B, которые вместе с каждой точкой $x_0 \in B$ содержат некоторый шар

$$O(x_0, r) := \left\{x \in \mathbb{R}^N:\ |x - x_0| < r\right\}, \quad r > 0.$$

Рассмотрим алгебру $B(\mathbb{R}^N)$, порождённую всеми открытыми множествами из $\mathbb{R}^N$, т. е. рассмотрим всевозможные конечные их пересечения, дополнения до всего пространства $\mathbb{R}^N$ и конечные объединения, а затем добавим результаты этих операций к семейству, которое и обозначаем через $B(\mathbb{R}^N)$. Однако нам нужно из алгебры $B(\mathbb{R}^N)$ построить такое расширение, которое было бы замкнуто относительно операций счётного объединения и пересечения. Такое расширение и есть так называемая борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Дадим определение борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^N$.

Определение 2. *Минимальная σ-алгебра, порождённая алгеброй $B(\mathbb{R}^N)$, называется борелевской σ-алгеброй и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ является следующее*:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \textit{для всех} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1). \tag{1.1}$$

Доказательство.

Достаточность. Поскольку все множества вида $(-\infty, c)$ содержатся в борелевской σ-алгебре, измеримость функции непосредственно следует из (1.1).

Необходимость. Пусть $f(x)$ измерима. Введём следующее обозначение:

$$\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1):\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{E}$ — σ-алгебра.

Действительно, (смотри задачу 4 параграфа 7 лекции-семинара 6 (с. 80 части 2 тома I))

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}, \quad \text{если} \quad \{B_n\} \in \mathcal{E},$$

$$f^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \backslash B\right) = X \backslash f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \text{если} \quad B \in \mathcal{E}.$$

Стало быть, если $\{B_n\} \subset \mathcal{E}$, то и $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$. В частности, $\bigcup\limits_{n=1}^{M} B_n \in \mathcal{A}$ при $M \in \mathbb{N}$. Кроме того, если $B \subset \mathcal{E}$, то и $\mathbb{R}^1 \backslash B \in \mathcal{E}$. Наконец, в силу результатов леммы 1 множество $\mathcal{E}$ содержит все открытые множества.

Следовательно, $\mathcal{E}$ — σ-алгебра, а поскольку $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ — это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества, то

$$\mathcal{E} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \mathcal{B}(\mathbb{R}^1).$$

Лемма доказана.

Утверждение. *Всякая непрерывная функция измерима.*

$\square$ Согласно определению измеримости, требуется доказать, что для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество

$$A_c \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}((-\infty, c))$$

измеримо по Лебегу. Но в силу непрерывности функции $f(x)$ множество A_c открыто как прообраз открытого множества (см. теорему 1 лекции 4). А всякое открытое множество на прямой измеримо по Лебегу (доказано в конце § 9 семинара-лекции 2). $\boxtimes$

Нетрудно доказать простейшие свойства измеримых функций, а именно, что измеримые функции образуют линейное пространство. Кроме того, композиция $\varphi \circ f$ непрерывной функции $\varphi(y)$, которая, как мы доказали, тоже измерима, и измеримой функции $f(x)$ является тоже измеримой. Произведение измеримых функций измеримо. Частное $f(x)/g(x)$ двух измеримых функций измеримо при естественном условии, что $g(x) \neq 0$.

§ 2. Интеграл Лебега

Для дальнейшего нам необходимо ввести так называемые простые функции. Пусть

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A},$$

а $\chi_{A_i}(x)$ — это характеристическая функция множества A_i, т. е.

$$\chi_{A_i}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A_i; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin A_i. \end{cases}$$

Дадим определение.

Определение 3. *Функция*

$$h(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}^1,$$

называется простой.

Очевидно, что простые функции измеримы, поскольку измеримы множества в определении простой функции. Заметим теперь, что всякую функцию

$$f(x) : X \to \mathbb{R}^1$$

можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \tag{2.1}$$

где

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что измеримость функции $f(x)$ эквивалентна измеримости каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Теперь мы в состоянии дать определение интеграла Лебега.

Сначала определим интеграл Лебега от простой функции следующим образом:

$$\int\limits_X h(x)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i). \tag{2.3}$$

Теперь предположим, что измеримая функция $f(x)$ является неотрицательной. Тогда определим интеграл Лебега от этой функции следующим образом:

$$\int\limits_X f(x) d\mu \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$= \sup_h \left\{ \int\limits_X h(x)\, d\mu \mid h(x) \geqslant 0 \text{ и } f(x) \geqslant h(x)\ \mu\text{-п. вс.} \right\}. \tag{2.4}$$

Здесь мы ввели новое понятие «μ-п. вс.», которое означает, что множество B, на котором не выполняется некоторое свойство имеет нулевую меру: $\mu(B) = 0$. Теперь осталось распространить интеграл Лебега на случай произвольных измеримых функций. Делается это следующим образом:

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu := \int\limits_X f_+(x)\, d\mu - \int\limits_X f_-(x)\, d\mu.$$

Несложно доказать, что *множество интегрируемых по Лебегу функций образует линейное пространство* $\mathfrak{L}(X,\mu)$. Нулём этого линейного пространства является функция, тождественно равная нулю на множестве X. Это приводит к некоторым неудобствам, о которых (и способе их решения!) сказано ниже.

Заметим, что в отличие от интеграла Римана для интегрируемости по Лебегу функции $f(x)$ справедливо следующее необходимое и достаточное условие:

Теорема 1. *Если* $f(x)$ — *измеримая функция, то* $f(x) \in \in \mathfrak{L}(X,\mu)$ *тогда и только тогда, когда* $|f(x)| \in \mathfrak{L}(X,\mu)$. *Причём имеет место следующее неравенство*:

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Доказательство.

Ясно, что если функция $f(x)$ измерима, то для всех $c \in \mathbb{R}^1$ измеримо множество $\{x \in X : -c < f(x) < c\} = \{x \in X : |f(x)| < c\}$. Следовательно, функция $|f(x)|$ тоже измерима. Наконец, функция $f(x)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| = \left|\int\limits_X f_+(x)\,d\mu - \int\limits_X f_-(x)\,d\mu\right| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_X f_+(x)\,d\mu + \int\limits_X f_-(x)\,d\mu = \int\limits_X |f(x)|\,d\mu,$$

где мы воспользовались очевидным равенством

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \quad \text{если} \quad f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и определения (2.4) следует, что если функция f измерима, $|f(x)| \leqslant g(x)$ μ-п. в. и g интегрируема по Лебегу, то f тоже интегрируема. В самом деле, для $|f|$ точная верхняя грань в (2.4) конечна (она не превосходит таковой для g), а тогда в силу теоремы 1 функция f также интегрируема. Это соображение понадобится нам в теореме 6, да и важно само по себе.

Отметим, что интегрируемые по Лебегу функции называются также суммируемыми.

§ 3. Сходимости почти всюду и по мере

До сих пор в курсе вещественного анализа у нас имелось два вида сходимостей функциональных последовательностей $\{f_n(x)\}$: поточечная и равномерная. В связи с введением измеримого пространства с мерой, т. е. тройки $(X, \mathcal{A}, \mu)$, можно ввести ещё два типа сходимостей: сходимость по мере μ и сходимость μ-почти всюду.

Определение 4. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся по мере μ к функции $f(x)$, если для всякого $c > 0$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant c\}\right) = 0.$$

Определение 5. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся μ-почти всюду к функции $f(x)$, если множество точек из X, на которых последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к функции $f(x)$ имеет нулевую μ-меру.*

Возникает естественный вопрос о том, как связаны эти четыре типа сходимостей функциональных последовательностей. Имеет место следующая цепочка связей этих понятий:

$$\boxed{\textbf{равномерная сходимость}} \Rightarrow \boxed{\textbf{поточечная сходимость}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\textbf{сходимость п. вс.}} \Rightarrow \boxed{\textbf{сходимость по мере}}.$$

Оказывается, что есть в некотором смысле и обратная связь этих понятий. Так, оказывается, что у всякой сходящейся по мере функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_m}(x)\}$, сходящаяся почти всюду.

Кроме того, справедлива известная теорема Д. Ф. Егорова.

Теорема Егорова. *Для каждой почти всюду сходящейся функциональной последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое подмножество $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$ множества X, что*

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

и $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на X_ε.

Доказательство.

Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. По определению сходимости почти всюду найдётся такое измеримое множество $\overline{X} \subset X$, что

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{поточечно на} \quad \overline{X}, \quad \mu(\overline{X}) = \mu(X).$$

Заметим, что $f(x)$ измерима на $\overline{X}$.

$\square$ Действительно, при любом $c \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$A := \left\{x \in \overline{X} : \; f(x) < c\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>l} \left\{x \in \overline{X} : \; f_n(x) < c - \frac{1}{k}\right\} =: B.$$

Пусть $x \in A$. Тогда найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$x \in \left\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c - \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{n>l} \left\{x \in \overline{X} : \ f_n(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

для всякого $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x \in B$. Предположим теперь, что $x \in B$. Тогда найдутся такие $k, l \in \mathbb{N}$, что

$$x \in \bigcap_{n>l} \left\{x \in \overline{X} : \ f_n(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \subset \left\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \subset A.$$

Откуда с учётом замкнутости $\mathcal{A}$ относительно счётных объединений и пересечений

$$\left\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\right\} \in \mathcal{A}. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, поскольку $\mu(X \backslash \overline{X}) = 0$, то $X \backslash \overline{X} \in \mathcal{A}$, поэтому

$$\mu\left(\{x \in X : \ f(x) < c\}\right) = \mu\left(\left\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\right\}\right).$$

Следовательно,

$$\{x \in X : \ f(x) < c\} = \left\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\right\} \cup \left\{x \in X \backslash \overline{X} : \ f(x) < c\right\} \in \mathcal{A}.$$

Итак, функция $f(x)$ измерима.

Шаг 2. Поскольку $f_i(x)$ и $f(x)$ измеримы на X, то

$$A_{im} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \overline{X} : \ |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{A} \Rightarrow B_{n,m} := \bigcap_{i \geqslant n} A_{im} \in \mathcal{A}.$$

При каждом $m \in \mathbb{N}$ справедливо очевидное вложение и представление

$$B_{n,m} \subset B_{n+1,m}, \quad X = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{n,m}\right) \bigcup \left(X \backslash \overline{X}\right). \tag{3.1}$$

$\square$ Действительно, либо $x \in X \backslash \overline{X}$, либо $x \in \overline{X}$. И если $x \in \overline{X}$, то при любом фиксированном $m \geqslant 1$ найдётся такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $i \geqslant n_0$

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{m}, \quad \forall i \geqslant n_0 \Rightarrow x \in B_{n_0,m} \Rightarrow \overline{X} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{n,m}. \quad \boxtimes \tag{3.2}$$

Шаг 3. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ в силу (3.2) с учётом вложения $B_{n,m} \subset B_{n+1,m}$ найдётся такое $n = n(m) \in \mathbb{N}$, что

$$\mu\left(\overline{X} \backslash B_{n(m),m}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{3.3}$$

При этом, конечно,

$$X_\varepsilon := \bigcap_{m=1}^{+\infty} B_{n(m),m} \in \mathcal{A},$$

поскольку $B_{n,m} \in \mathcal{A}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\mu(X \backslash X_\varepsilon) \leqslant \mu(X \backslash \overline{X}) + \mu(\overline{X} \backslash X_\varepsilon) = \mu(\overline{X} \backslash X_\varepsilon) =$$
$$= \mu\left(\overline{X} \backslash \bigcap_{m=1}^{+\infty} B_{n(m),m}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} \overline{X} \backslash B_{n(m),m}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(\overline{X} \backslash B_{n(m),m}\right) \leqslant \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

Причём сходимость на множестве X_ε равномерная:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на} \quad X_\varepsilon,$$

т. к. по самому построению (3.3) множества X_ε имеем:

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m}$$

при всех $x \in X_\varepsilon$, $i \geqslant n(m)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, однако, что можно привести пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся по мере, но не сходящейся почти всюду.

§ 4. Свойства интеграла Лебега

Докажем сначала σ-аддитивность интеграла Лебега.

Теорема 2. *Если $A = \bigcup_n A_n$ — конечное или счётное объединение непересекающихся измеримых множеств и функция $f(x)$ интегрируема по множеству A, то верно равенство*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu,$$

причём из существования интеграла в левой части следует существование всех интегралов в правой части и сходимость ряда.

Доказательство.

Докажем теорему в несколько шагов.

Шаг 1. Сначала докажем аддитивность интеграла Лебега. Пусть

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}.$$

Сначала предположим, что $f(x) \geqslant 0$ почти всюду на A. Заметим, что любую простую функцию $h(x)$ на A можно представить в виде

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{если} \quad x \in A_1; \\ h_2(x), & \text{если} \quad x \in A_2, \end{cases}$$

где $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — простые функции на A_1 и A_2 соответственно. Поэтому согласно определению интеграла Лебега от неотрицательной функции $f(x)$ получим равенство

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_{A_1} f(x)\,d\mu + \int\limits_{A_2} f(x)\,d\mu.$$

Обобщение на произвольную (не знакопостоянную) функцию очевидно.

Шаг 2. Докажем теперь счётную аддитивность интеграла Лебега. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing, \quad n_1 \neq n_2.$$

Тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B_N \cup C_N, \quad B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N.$$

Докажем, что если $f(x)$ измерима и интегрируема на множестве A, то

$$I_N := \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu \to \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu = I := \int\limits_A f(x)\,d\mu$$

при $N \to +\infty$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|I_N - I| = \left| \int\limits_{C_N} f(x)\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu. \tag{4.1}$$

Докажем, что последний интеграл стремится к нулю при $N \to +\infty$.

С этой целью заметим, что в силу интегрируемости функции $f(x)$ на A для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая неотрицательная простая функция $h_\varepsilon(x)$, что

$$\int\limits_A [|f(x)| - h_\varepsilon(x)]\,d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad h_\varepsilon \leqslant M(\varepsilon) < +\infty.$$

Кроме того, при этом найдётся такое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, что

$$M(\varepsilon)\mu(C_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int\limits_{C_N} h_\varepsilon \, d\mu \leqslant M(\varepsilon)\mu(C_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C_N} |f(x)| \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для любых измеримых множеств $A, B \in \mathcal{A}$ таких, что $A \subset B$, и для любой интегрируемой на множестве B неотрицательной функции $f(x)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_A f(x) \, d\mu \leqslant \int\limits_B f(x) \, d\mu.$$

Доказательство.

Достаточно взять разбиение множества B на пересекающиеся множества

$$B = (B \backslash A) \cup A$$

и применить теорему 2:

$$\int\limits_B f(x) \, d\mu = \int\limits_A f(x) \, d\mu + \int\limits_{B \backslash A} f(x) \, d\mu \geqslant \int\limits_A f(x) \, d\mu,$$

поскольку

$$\int\limits_{B \backslash A} f(x) \, d\mu \geqslant 0.$$

Следствие доказано.

Теперь докажем теорему о достаточном условии интегрируемости интеграла Лебега.

Теорема 3. *Если $A = \bigcup_n A_n$ — конечное или счётное объединение непересекающихся измеримых множеств, функция $f(x)$ интегрируема по каждому из множеств A_n и ряд*

$$\sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)| \, d\mu \tag{4.2}$$

сходится, то f интегрируема на A и верно равенство

$$\int\limits_A f(x) \, d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x) \, d\mu.$$

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться неравенством (4.1).

Теорема доказана.

Справедлива важная теорема (*неравенство Чебышёва*).

Теорема 4. *Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ — суммируемая на $A \in \mathcal{A}$ функция, $c > 0$ — произвольное положительное число. Тогда*

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Доказательство.

Для доказательства обозначим $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\}$. Прежде всего следует заметить, что множество A' измеримо в силу измеримости функции φ. Напоминаем, что измеримость является необходимым условием интегрируемости. Теперь в силу только что установленных свойств аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_A \varphi(x)\, d\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)\, d\mu + \int\limits_{A \setminus A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant \int\limits_{A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Осталось лишь разделить полученное неравенство на положительное число c.

Теорема доказана.

Следующее свойство используется при доказательстве теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и носит название теоремы о абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A \in \mathcal{A}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset A$ с $\mu(e) < \delta$ имеет место оценка*

$$\left| \int\limits_e f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Легко видеть, что для ограниченной функции утверждение теоремы тривиально. Действительно, в случае $|f(x)| \leqslant c_1$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_e f(x)\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|\, d\mu \leqslant c_1\mu(e) \leqslant c_1\delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

В общем же случае положим

$$A_n := \{x \in A \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad B_N := \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N := A \setminus B_N,$$

причём ясно, что $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing$ при $n_1 \neq n_2$.

В силу теоремы о σ-аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu$$

и, в частности, ряд в правой части сходится. Тогда можно выбрать такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3}$$

Выберем ещё

$$\delta \in \left(0; \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right).$$

Тогда при $\mu(e) < \delta$, $e \subset A$ имеем

$$\left|\int\limits_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где первое слагаемое мы оценили в силу

$$\mu(e \cap B_N) \leqslant \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}, \quad |f(x)|_{B_N} < N+1,$$

а второе — в силу условия (4.3).

Теорема доказана.

Замечание 2. На σ-алгебре $\mathcal{A}$ семейства подмножеств множества X можно ввести помимо внешней меры Лебега μ ещё много других мер, порождённых почти всюду неотрицательными измеримыми и интегрируемыми функциями $f(x)$ по следующей формуле:

$$\varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_A f(x)\,d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{4.4}$$

С учётом теоремы 3 функция множеств $\varphi(A)$ является счётно-аддитивной мерой на семействе $\mathcal{A}$. При этом в силу теоремы 5 эта мера является *абсолютно непрерывной* относительно меры Лебега μ, т. е. для любого множества A с $\mu(A) = 0$ мера $\varphi(A) = 0$. Известен важный результат — *теорема Радона–Никодима* о том, что, наоборот, для любой абсолютно непрерывной меры φ относительно меры μ найдётся такая измеримая интегрируемая функция $f(x)$, что имеет место (4.4).

Лекция 3

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

§ 1. Теорема Лебега

В этом параграфе мы докажем сначала важный результат, называемый теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, а затем мы докажем ещё два утверждения: лемму Фату и теорему Беппо Леви.

Итак, пусть у нас имеется измеримое пространство с мерой Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, причем $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) < +\infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие свойства*:

1. *последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на множестве A к функции f*;
2. *для всех n почти всюду на множестве A имеет место неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$*;
3. *функция $\varphi(x)$ интегрируема по множеству A.*

Тогда

1. *функции f и f_n при всех n интегрируемы на A*,
2. *имеет место предельное равенство*

$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \to \int\limits_A f(x)\,d\mu. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего понятно, что предельная функция $f(x)$ измерима. Это было доказано на шаге 1 доказательства теоремы Егорова. Кроме того, из оценки

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in A$$

предельным переходом получим, что

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in A.$$

Из этих неравенств и следует интегрируемость функций $f_n(x)$ и $f(x)$.

Шаг 2. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $B \subset A$ с $\mu(B) < \delta$ выполняется

$$\int\limits_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.2}$$

Но в силу теоремы Егорова это множество B можно выбрать таким образом, чтобы [1])

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{равномерно на} \quad A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus B, \quad A \backslash A_\varepsilon = B. \tag{1.3}$$

Тогда мы можем выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ и при любом $x \in A_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A_\varepsilon)}. \tag{1.4}$$

Но при этом сразу получаем ($A = A_\varepsilon \cup B$), что при всех $n > N$

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_A f_n(x)\,d\mu\right| = \\
&= \left|\int\limits_{A_\varepsilon} f(x)\,d\mu + \int\limits_B f(x)\,d\mu - \int\limits_{A_\varepsilon} f_n(x)\,d\mu - \int\limits_B f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int\limits_{A_\varepsilon} (f(x) - f_n(x))\,d\mu\right| + \left|\int\limits_B f(x)\,d\mu\right| + \left|\int\limits_B f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int\limits_{A_\varepsilon} (f(x) - f_n(x))\,d\mu\right| + \int\limits_B \varphi(x)\,d\mu + \\
&+ \int\limits_B \varphi(x)\,d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Теорема доказана.

§ 2. Теорема Беппо Леви

Справедлива следующая теорема Беппо Леви:

[1]) Если нужно мы можем в качестве B взять его подмножество. Все неравенства сверху останутся справедливыми.

Теорема 2. *Пусть почти всюду на A выполнены неравенства*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots, \tag{2.1}$$

причём функции $f_n(x)$ измеримы и интегрируемы на A и

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \tag{2.2}$$

Тогда

1. *почти всюду на A существует конечный предел*

$$f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \tag{2.3}$$

2. *функция f измерима и интегрируема на A и*

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \to \int\limits_A f(x)\, d\mu. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Ограничимся случаем, когда почти всюду $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций

$$\widetilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \in A \mid f_n \to +\infty\}.$$

Нужно доказать, что *множество Ω имеет нулевую меру Лебега μ.*

$\square$ Обозначим через $f(x)$ поточечный предел последовательности, где он существует:

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in A.$$

Введём следующие обозначения:

$$\Omega_n^{(r)} = \{x \in A: \ f_n(x) > r\}, \quad \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f(x) > r\},$$
$$\Omega = \bigcap_{r\geqslant 0} \Omega^{(r)} = \{x \in A \mid f(x) = +\infty\}. \tag{2.5}$$

Стало быть,

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \quad \text{где} \quad \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f_n(x) > r\}. \tag{2.6}$$

Из неравенства Чебышёва в силу (2.5) следует, что при всех n, r

$$\mu(\Omega_n^r) \leqslant \frac{K}{r},$$

откуда с учётом

$$\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots$$

имеем

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Но при любом r верно включение $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, поэтому $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$, откуда следует, что $\mu(\Omega) = 0$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. ⊠

Шаг 2. Для доказательства предельного соотношения введём прежде всего обозначение

$$A_m \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid m - 1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

и положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Заметим, что на множестве A_m имеет место неравенство

$$\varphi(x) = m \leqslant f(x) + 1.$$

Докажем, что $\varphi(x)$ интегрируема на A. После этого останется лишь воспользоваться теоремой Лебега.

Положим

$$B_l = \bigcup_{m=1}^{l} A_m, \quad A_{m_1} \cap A_{m_2} = \varnothing, \quad m_1 \neq m_2.$$

Поскольку на множествах B_l функции f_n и f ограничены и $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, то в силу теоремы Лебега имеем [1)]

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_{B_l} f(x)\,d\mu + \mu(B_l) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{B_l} f(x)\,d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_l} f_n(x)\,d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но при всех l верно

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu = \sum_{m=1}^{l} m\mu(A_m).$$

[1)] Мы рассматриваем случай $\mu(A) < +\infty$.

Равномерная ограниченность этих сумм означает (абсолютную) сходимость ряда
$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\mu(A_m) = \int\limits_A \varphi(x)\,d\mu. \tag{2.8}$$

Шаг 3. Проверим, что выполнены все условия теоремы Лебега.

□ Действительно, имеем
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing \quad \text{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

1. Последовательность функция $\{f_n(x)\}$ почти всюду на A сходится к функции $f(x)$

2. Почти всюду на множестве A выполнено неравенство
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \text{почти всюду на} \quad A \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Функция $\varphi(x)$ интегрируема на A. ⊠

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 3. Лемма Фату

Докажем теперь важное утверждение, известное как лемма Фату.

Л е м м а 1. *Если последовательность интегрируемых на множестве A почти всюду неотрицательных функций f_n сходится почти всюду на A к функции f и при любом $n \in \mathbb{N}$*
$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K, \tag{3.1}$$
то f интегрируема на A и
$$\int\limits_A f(x)\,d\mu \leqslant K. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство проведём по следующей схеме:

1. Введём новые функции
$$\varphi_n := \inf_{k \geqslant n} f_k(x),$$
которые обладают свойством
$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant ... \leqslant \varphi_n(x) \leqslant ....$$

2. Полученные функции измеримы, поскольку

$$\{x \in A \mid \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x \in A \mid f_k(x) < c\} \in \mathcal{A}.$$

3. Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы и

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \tag{3.3}$$

4. По теореме Беппо Леви, применённой к последовательности $\{\varphi_n\}$, имеем интегрируемость и измеримость функции f и предельное соотношение

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu. \tag{3.4}$$

Заметим, что

$$\varphi_n(x) \to f(x)$$

почти всюду (а именно, в тех же точках, где $f_n(x) \to f(x)$).

Наконец, из (3.3) и (3.4) получаем неравенство, которое утверждается в условии теоремы.

Лемма доказана.

§ 4. Случай множества X с неограниченной мерой μ

Мы ограничимся случаем так называемой σ-конечной меры μ. Именно, будем говорить, что на пространстве X введена σ-конечная мера μ, если существует такая последовательность $\{X_n\} \subset X$, что

$$\mu(X_n) < +\infty, \quad X_n \subset X_{n+1}, \quad X = \bigcup_n X_n.$$

Любая такая последовательность называется *исчерпывающей*.

ПРИМЕР 1. Приведём простой пример меры, не являющейся σ-конечной: возьмем меру на прямой и положим меру каждой точки равной единице. Действительно, предположим, что такая исчерпывающая последовательность $\{X_n\}$ существует, тогда с необходимостью каждое множество не может состоять из конечного числа различных точек, а в этом случае

$$\mu(X_n) = \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(x_l) = \sum_{l=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Определение 1. *Измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры μ, называется суммируемой на X, если* *она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$$

существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f по множеству X и по-прежнему обозначается символом $\int_A f(x)\,d\mu$.

Для интегралов по множествам бесконечной меры сохраняют справедливость все предыдущие результаты, кроме утверждения об интегрируемости ограниченной измеримой функции.

Лекция 4

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Класс интегрируемых по Лебегу функций

Теперь наша задача рассмотреть важный класс интегрируемых по Лебегу функций. Из определения интеграла Лебега ясно, что множество интегрируемых по Лебегу функций образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{L}(X)$.

Дадим определение так называемого *метрического пространства*, изучение которого мы детально начнём со следующей лекции.

Определение 1. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нём задана вещественная функция $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Теперь введём на множестве $\mathcal{L}(X)$ — всех интегрируемых на множестве X функций относительно измеримого пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — вещественную функцию

$$d(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)| \, d\mu. \tag{1.1}$$

Ясно, что на множестве $\mathcal{L}(X)$ эта функция удовлетворяет условиям (ii) и (iii) определения 7. Однако не выполняется требование (i). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, $d(f, g) = 0$, но $f(x) \neq g(x)$ на X.

Что с этим нам делать? Задача заключается в построении так называемого *класса функций, интегрируемых по Лебегу*.

Будем вместо функций $f(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ рассматривать классы функций $\{f(x)\}$ такие, что две функции $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ принадлежат одному классу $\{f(x)\}$, если они отличаются от заданной функции $f(x)$ на подмножестве нулевой меры Лебега μ из множества X. Тогда на полученном пространстве, которое мы будем обозначать через $L(X)$, можно ввести метрику

$$d^\circ(\{f\},\{g\}) = d(f,g) = \int\limits_X |f(x)-g(x)|\, d\mu, \tag{1.2}$$

где $f(x) \in \{f(x)\}$, $g(x) \in \{g(x)\}$, т.е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на пространстве $L(X,\mu)$ классов эквивалентных функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов. В этом случае все условия (i)–(iii) будут выполнены.

Это построение является частным случаем операции введения на множестве $\mathfrak{A}$ отношения эквивалентности φ между элементами $x, y \in \in \mathfrak{A}$, что обозначается как

$$x \overset{\varphi}{\sim} y,$$

таким образом, чтобы это *отношение эквивалентности* удовлетворяло следующим трём свойствам:

1. $x \overset{\varphi}{\sim} x$;
2. $x \overset{\varphi}{\sim} y \Leftrightarrow y \overset{\varphi}{\sim} x$;
3. $x \overset{\varphi}{\sim} y$ и $y \overset{\varphi}{\sim} z \Rightarrow x \overset{\varphi}{\sim} z$.

При этом для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{A}$ возможен ровно один из двух случаев: либо $x \overset{\varphi}{\sim} y$, либо x и y не связаны отношением φ.

После того, как множестве $\mathfrak{A}$ введено отношение эквивалентности φ, можно провести операцию сопоставления по паре $(\mathfrak{A},\varphi)$ множества $\mathfrak{A}\backslash\{\varphi\}$ *классов эквивалентности*, определенное следующим образом:

$$x_1, x_2 (\in \mathfrak{A}) \in \{x\} \in \mathfrak{A}\backslash\{\varphi\}, \quad \text{если} \quad x_1 \overset{\varphi}{\sim} x_2.$$

Эта операция называется разбиением множества $\mathfrak{A}$ по фактору φ на классы эквивалентности φ.

ПРИМЕР 1. В случае множества $\mathfrak{A} = \mathcal{L}(X,\mu)$ отношение эквивалентности φ между функциями $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ характеризуется следующим условием:

$$f(x) = g(x) \quad \text{почти всюду по мере } \mu.$$

Можно проверить, что отношение эквивалентности φ разбивает множество $\mathfrak{A}$ на непересекающиеся классы. Действительно, если $x \in \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$ и между ними есть отношение эквивалентности φ, то они попадают в один класс. Если же они неэквивалентны, то они попадают в разные классы.

Корректность определения метрики.

Естественно, нам нужно доказать, что значение величины в левой части не зависит от выбора представителей в правой части. Доказывается это следующим образом.

Пусть $f(x), f_1(x) \in \{f(x)\}$ и $g(x), g_1(x) \in \{g(x)\}$. Тогда имеют место следующие неравенства, в силу того, что выполнены свойства (ii) и (iii) определения 7 для функции (1.1):

$$d(f, g) \leqslant d(f, f_1) + d(f_1, g_1) + d(g_1, g) = d(f_1, g_1), \tag{1.3}$$

$$d(f_1, g_1) \leqslant d(f_1, f) + d(f, g) + d(g, g_1) = d(f, g), \tag{1.4}$$

поскольку в силу определения (1.1) функции $d(\cdot, \cdot)$ и того, что

$$f_1(x) = f_2(x) = f(x), \quad g_1(x) = g_2(x) = g(x) \quad \text{почти всюду в} \quad x \in X,$$

имеют место равенства

$$d(f, f_1) = d(f_1, f) = 0, \quad d(g, g_1) = d(g_1, g) = 0.$$

Следовательно, из неравенств (1.3) и (1.4) вытекает, что

$$d(f, g) = d(f_1, g_1).$$

Стало быть, функция d°, определенная формулой (1.2), определена корректно.

Но теперь у нас для этой функции $d^\circ(\cdot, \cdot)$ помимо условий (ii) и (iii) выполнено и свойство (i). Таким образом, пространство классов интегрируемых функций $L(X)$ является метрическим пространством относительно метрики (1.2). Кроме того, в силу линейности пространства $\mathcal{L}(X)$ линейным является и пространство классов функций $L(X)$, в котором нулевым элементом $\vartheta(x)$ является класс функций $\{\vartheta(x)\}$, почти всюду равных нулю.

Таким образом, пространство классов функций $\{f\} \in L(X)$ является *линейным метрическим пространством*.

§ 2. Пространства Лебега $L^p(X, \mu)$ при $p \geqslant 1$

Дадим определение нормированного пространства.

Определение 2. *Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется нормированным, если на $\mathcal{E}$ задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства*

(i) $\|f\| = 0$ *тогда и только тогда, когда $f = \vartheta$ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{E}$*;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ *для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и всех $f \in \mathcal{E}$*;

(iii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ *для всех $f, g \in \mathcal{E}$.*

Нетрудно проверить, что линейное нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x, y) = \|x - y\|$. Проверьте самостоятельно!

Заметим, что если мы определим на линейном пространстве $L(X)$ норму следующим образом:

$$\|\{f\}\| := \int\limits_X |f(x)| \, d\mu, \quad f(x) \in \{f\} \in L(X, \mu), \tag{2.1}$$

то получим линейное нормированное пространство $L(X,\mu)$.

Теперь рассмотрим некоторые классы функций, важных в приложениях. Дадим определение.

Определение 3. *Измеримые функции $f(x)$, у которых*

$$|f(x)|^p \in \mathcal{L}(X,\mu) \quad \textit{при} \quad p \in [1,+\infty), \tag{2.2}$$

будем обозначать как пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из пространства $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ на классы функций $\{f\}$, мы получим класс $L^p(X,\mu)$ при $p \in \in (0,+\infty)$.

Заметим, что класс функций $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным нормированным пространством. Докажем это. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X,\mu)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место элементарное неравенство

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant c(p)\left(|\alpha|^p |f(x)|^p + |\beta|^p |g(x)|^p\right) \in L(X,\mu),$$

поскольку пространство $L(X,\mu)$ является линейным. Стало быть, пространство $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ следующую числовую функцию:

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} : L^p(X,\mu) \to \mathbb{R}^1_+ \tag{2.3}$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения нормы.

Докажем, что для функции (2.3) выполнено неравенство треугольника (iii) определения нормы, т. е. докажем так называемое *неравенство Минковского*:

$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1+\infty). \tag{2.4}$$

С этой целью заметим, что при $p = 1$ это неравенство есть следствие неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

§ 3. Неравенство Гёльдера

Теперь нам нужно рассмотреть случай $p \in (1, +\infty)$. Но для этого нам предварительно нужно доказать так называемое *неравенство Гёльдера.*

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f(x) \in L^p(X, \mu)$ *и* $g(x) \in L^q(X, \mu)$ *при* $p, q \in (1, +\infty)$, *причём*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда $f(x)g(x) \in L^1(X)$ *и имеет место неравенство*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Для неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^1_+$ имеет место хорошо известное неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.2}$$

$\square$ Докажем, что для всех $x \geqslant 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ имеет место следующее неравенство:

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ в окрестности точки $x = 1$. По формуле Лагранжа имеем

$$x^\alpha - 1^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}(x - 1), \quad z \in (1, x).$$

Отсюда сразу же получаем следующее неравенство:

$$x^\alpha - 1^\alpha \leqslant \alpha(x - 1) \quad \text{при} \quad x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha \in (0, 1).$$

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и для определенности $a \geqslant b$. Тогда в неравенстве (3.3) положим

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\frac{a}{b} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Умножим обе части этого неравенства на b и получим неравенство

$$a^{1/p} b^{1-1/p} - \frac{a}{p} \leqslant \frac{b}{q} \Rightarrow a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Сделаем в последнем неравенстве замену

$$a \mapsto a^p \quad \text{и} \quad b \mapsto b^q$$

и в результате получим искомое неравенство

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Поскольку $f \in L^p(X, \mu)$ и $g \in L^q(X, \mu)$, то $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, а значит, измеримо и их произведение.

$\Box$ Без ограничения общности будем считать, что $f(x), g(x) \geqslant 0$.

Докажем, что множество

$$C := \{x \in X \mid f(x)g(x) < c\} \tag{3.4}$$

измеримо.

Для удобства обозначений введём функции

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{c}}, \quad G(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{c}}. \tag{3.5}$$

Тогда

$$C = \{x \in X \mid F(x)G(x) < 1\}. \tag{3.6}$$

Пусть $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность пронумерованных (в некотором порядке) всех рациональных чисел. Пусть

$$\begin{gathered} A_n := \{x \in X \mid F(x) < e^{-r_n}\} \equiv \{x \in X \mid f(x) < \sqrt{c}\, e^{-r_n}\}, \\ B_n := \{x \in X \mid G(x) < e^{r_n}\} \equiv \{x \in X \mid g(x) < \sqrt{c}\, e^{r_n}\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Докажем, что

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_n. \tag{3.8}$$

Тогда из измеримости множеств A_n и B_n будет следовать измеримость множества C, а отсюда, в силу произвольности числа $c > 0$ — и измеримость функции $f(x)g(x)$.

Вложение «справа налево» очевидно. Докажем обратное вложение. Итак, пусть $x \in X$ фиксировано и $F(x)G(x) < 1$. Пусть рациональное число $q_k \to \ln G(x) + 0$. Тогда $-q_k \to -\ln G(x) > \ln F(x)$ (последнее неравенство следует из того факта, что $\ln F(x) + \ln G(x) < 0$). Поэтому для всех q_k, достаточно близких к $\ln G(x)$, имеем $-q_k > \ln F(x)$. Зафиксируем номер k_0 из тех k, для которых выполнено последнее неравенство. Теперь выберем такое n, что $r_n = q_{k_0}$. Тогда

$$x \in A_n \cap B_n. \quad \boxtimes \tag{3.9}$$

Кроме того, их произведение определено почти всюду в X.

Шаг 3. Теперь возьмем

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

и подставим их в неравенство (3.2), откуда получим неравенство

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим неравенство

$$\int\limits_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \, d\mu \leqslant 1.$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гёльдера.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in L^p(X, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \quad (3.10)$$

Доказательство.

Прежде всего отметим, что в силу неравенства

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^{p-1} \left[|f(x)|^p + |g(x)|^p \right]$$

сумма функций $f(x) + g(x)$ принадлежит $L^p(X)$.

Перейдем к доказательству неравенства. Случай $p = 1$ очевиден. Рассмотрим теперь случай, когда $p \in (1, +\infty)$. Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гёльдера для обоих слагаемых в правой части этого неравенства, в котором для первого слагаемого сначала положим

$$f_1(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}, \quad f_2(x) = |f(x)|, \quad r_1 = \frac{p}{p-1}, \quad r_2 = p,$$

а затем положим

$$f_1(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}, \quad f_2(x) = |g(x)|, \quad r_1 = \frac{p}{p-1}, \quad r_2 = p.$$

В результате применения неравенства Гёльдера получим следующее неравенство:

$$\int\limits_X |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^{p} \, d\mu \right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Аналогичное неравенство получается и для второго слагаемого. Таким образом, получили

$$\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \times$$
$$\times \left[\left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right].$$

Откуда получаем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Следовательно, числовая функция (2.3) является нормой. Значит, линейное пространство $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным относительно указанной нормы.

К настоящему моменту мы разобрали случай, когда $p \in [1, +\infty)$. Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда $p = +\infty$. Дадим определение.

Определение 4. *Пространством $L^\infty(X, \mu)$ мы назовем класс измеримых функций, которые почти всюду являются ограниченными.*

Введём норму на этом пространстве одним из возможных способов.

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g(x) \in \{f(x)\}} \sup_{x \in X} |g(x)|, \tag{3.11}$$

где символом $\{f(x)\}$ мы обозначили класс функций $g(x)$ таких, что $g(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$ по мере Лебега μ.

Подробное изучение этого пространства мы продолжим во второй части, где и докажем, что введенная функция действительно является нормой.

Необходимость введения пространства $L^\infty(X,\mu)$ вызвана, например, следующим утверждением, которое мы приведём без доказательства.

Теорема 3. *Неравенство Гёльдера остается справедливым для функции $f(x) \in L^1(X,\mu)$ и функции $g(x) \in L^\infty(X,\mu)$ и имеет вид*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Тематическая лекция II

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 5

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Определение и пример

Определение 1. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нём задана вещественная функция $d: Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

ПРИМЕР 1.

Рассмотрим полностью один нетривиальный пример. Пусть l^p при $p > 1$ — линейное пространство последовательностей комплексных чисел вида

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad x_k \in \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введём метрику на этом линейном пространстве по формуле

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Утверждение 1. *Функция $d(x, y)$ является метрикой на линейном пространстве l^p при $p > 1$.*

□ Действительно, первые два свойства очевидны и в доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Пусть сначала $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это последовательности неотрицательных чисел. Пусть

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad b = \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Тогда из полученного нами в предыдущей лекции арифметического неравенства Гёльдера вытекает неравенство

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Теперь просуммируем по $i = \overline{1, n}$ и получим неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Шаг 2. Имеет место следующая цепочка выражений:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1} y_i \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right]. \quad (1.2)$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Шаг 3. Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это комплексные последовательности, тогда по доказанному получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Наконец, воспользуемся очевидным неравенством

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$$

и получим неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Теперь нужно перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить неравенство Минковского для линейного пространства l^p при $p > 1$. Случай $p = 1$ рассматривается очевидным образом. ⊠

§ 2. Открытые и замкнутые множества

Определение 2. *Открытый шар* $O(a,r)$ *и замкнутый шар* $K(a,r)$ *метрического пространства* (X,d) :

$$O(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x,a) < r\}, \quad K(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x,a) \leqslant r\}.$$

ПРИМЕР 2. Хорошо изученный случай — это метрическое пространство $\bigl(\mathbb{R}^N, d(x,y) = |x-y|\bigr)$. В этом случае открытый шар — это собственно шар (без границы) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^N$ и радиуса $r > 0$

$$O(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| = \left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-a_i)^2\right)^{1/2} < r\right\},$$

а замкнутый шар $K(a,r)$ — это шар $O(a,r)$, к которому добавлена его граница $\partial O(a,r) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| = r\bigr\}$:

$$K(a,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x-a| = \left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-a_i)^2\right)^{1/2} \leqslant r\right\}.$$

Определение 3. *Открытое множество — множество, содержащее вместе с каждой своей точкой* x_0 *некоторый открытый шар* $O(x_0,r)$ *радиуса* $r > 0$. *Замкнутое множество — дополнение открытого.*

Замечание 1. В разъяснении нуждается определение замкнутого множества. В курсе вещественного анализа мы рассматривали замкнутое множество как множество, к которому добавлены все его предельные точки, т.е. множество A замкнуто тогда, когда любая сходящаяся последовательность его точек $\{x_n\} \subset A$ сходится в нём — *найдётся такая точка* $x_0 \in A$, *что*

$$|x_n - x_0| \to +0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Сначала дадим такое определение *предельной точки.*

Определение 4. *Точка x_0 множества A, не обязательно принадлежащая самому множеству A, называется предельной точкой множества A, если любой открытый шар с центром в этой точке содержит точку этого множества, отличную от данной.*

Теперь дадим определение *предела последовательности.*

Определение 5. *Пределом последовательности $\{x_n\} \subset X$ называется такая точка $x_0 \in X$, что*

$$d(x_n, x_0) \to +0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 по метрике d, и пишут

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. *Для каждой предельной точки x_0 множества A найдётся последовательность $\{x_n\} \subset A$ такая, что*

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

$\square$ Действительно, рассмотрим вложенные шары $O_n = O(x_0, r_n)$ радиусов $r_n = 1/n$ при $n \in \mathbb{N}$ и в каждом шаре O_n возьмём точку $x_n \in O_n$, отличную от точки x_0. Поскольку $r_n \to +0$ при $n \to +\infty$, то

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

$\boxtimes$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 3. *Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.*

$\square$ Действительно, пусть $G \subset X$ — замкнутое множество. Тогда найдётся такое открытое множество $U \subset X$, что $G = X \backslash U$. Пусть $\{x_n\} \subset G$ такая, что

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем, что $x_0 \in G = X \backslash U$. Пусть нет — $x_0 \in U$. Тогда в силу открытости множества U найдётся такое число $r > 0$, что $O(x_0, r) \subset U$, но начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\{x_n\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset O(x_0, r) \subset U, \quad \{x_n\} \subset G = X \backslash U.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. ⊠

Дадим определения *внутренней* и *внешней* точек.

Определение 6. *Внутренняя точка* x_0 *множества — содержится во множестве вместе с некоторым открытым шаром* $O(x_0,r)$ *радиуса* $r>0$. *Внешняя точка* x_0*— содержится вместе с некоторым открытым шаром* $O(x_0,r)$ *радиуса* $r>0$ *в дополнении множества.*

Определение 7. *Точка* $x_0 \in M$ *называется изолированной точкой множества* M*, если существует такой открытый шар* $O(x_0,r)$ *радиуса* $r>0$, *что* $O(x_0,r)\cap M=\{x_0\}$.

Дадим определения окрестности и открытой окрестности.

Определение 8. *Окрестностью точки* x_0 *метрического пространства называется любое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым шаром* $O(x_0,r)$ *радиуса* $r>0$.

Определение 9. *Открытой окрестностью точки называется произвольное открытое множество, содержащее данную точку.*

ПРИМЕР 3. Напомним определения ε-окрестности и замкнутой ε-окрестности точки x_0 в пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$U_\varepsilon(x_0)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^N:\ |x-x_0|<\varepsilon\right\},\quad \overline{U}_\varepsilon(x_0)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^N:\ |x-x_0|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Справедлива следующая лемма, называемая *леммой о топологии.*

Лемма 1. *Имеют место следующие топологические свойства метрических пространств*:

(i) *Объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество*;

(ii) *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множества*;

(iii) *Само пространство* X *и* $\varnothing$ *— это открыто-замкнутые множества.*

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha:\ \alpha\in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств и пусть

$$x\in\bigcup_{\alpha\in A}\Sigma_\alpha,$$

тогда найдётся такое $\alpha_0\in A$ и такой открытый шар $O(x,r)$ радиуса $r>0$, что

$$x\in O(x,r)\subset\Sigma_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in A}\Sigma_\alpha.$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств — это открытое множество.

Пусть теперь

$$\Sigma\stackrel{\text{def}}{=}\bigcap_{k=1}^{n}\Sigma_k \text{ – пересечение конечного числа открытых множеств.}$$

Пусть $x \in \Sigma$, тогда найдутся такие открытые шары $O(x, r_k)$ радиусов $r_k > 0$, что

$$x \in O(x, r_k) \subset \Sigma_k.$$

Определим теперь $r := \min\{r_k,\ k = \overline{1, n}\} > 0$, тогда очевидно, что

$$x \in O(x, r) = \bigcap_{k=1}^{n} O(x, r_k) \subset \Sigma.$$

Шаг 2. Второе утверждение леммы о топологии вытекает из первого переходом к дополнениям. Действительно, пусть

$$\{S_\alpha :\ \alpha \in A\} - \text{произвольное семейство замкнутых множеств.}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash \Sigma_\alpha) = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha \right),$$

где мы ввели обозначение

$$\Sigma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} X \backslash S_\alpha.$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X \backslash \Sigma_k) = X \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k \right), \quad S_k = X \backslash \Sigma_k.$$

Поэтому можно провести следующие рассуждения. Пусть $\{G_\alpha\}$ при $\alpha \in A$ — это произвольное семейство замкнутых множеств. Тогда согласно определению замкнутого множества найдутся такие открытые множества U_α, что $G_\alpha = X \backslash U_\alpha$. Поэтому в силу формул двойственности имеем

$$\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash U_\alpha) = X \backslash \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{замкнуто,}$$

поскольку, как мы доказали,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{открыто.}$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_n - \text{замкнуто.}$$

Шаг 3. Осталось заметить, что пустое множество $\varnothing$ мы по определению считаем открытым, а множество X открыто, поскольку всякая его точка $x_0 \in X$ входит в него вместе с некоторым шаром $O(x_0, r)$ радиуса $r > 0$. Тогда доказательство пункта (iii) основано на формулах двойственности

$$X \backslash X = \varnothing, \quad X \backslash \varnothing = X.$$

Отсюда приходим к утверждению.

Лемма доказана.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим пример счётной системы открытых множеств, пересечение которых замкнуто, и пример счётной системы замкнутых множеств, объединение которых открыто. Положим

$$O_n \stackrel{\text{def}}{=} O\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 + \frac{1}{n}\right\},$$

$$K_n \stackrel{\text{def}}{=} K\left(0, 1 - \frac{1}{2n}\right) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1 - \frac{1}{2n}\right\}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие равенства (докажите сами!):

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = K(0, 1), \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = O(0, 1).$$

Дадим определение замыкания множества.

Определение 10. *Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется замыканием множества и обозначается $\overline{A}$.*

Справедливы следующие свойства замыкания множества, которые мы собрали в одной лемме.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства*:

(i) $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;
(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(iii) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$;
(iv) *вообще говоря*, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем (i). Действительно,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha \text{ -- замкнуто} \Rightarrow A \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{A} \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \bigcap_{\alpha} B_\alpha = \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Шаг 2. Докажем (ii). Прежде всего заметим, что если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$. Поэтому имеют место вложения

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \quad \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Пусть теперь $x \in \overline{A \cup B}$. Предположим, что $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Согласно определению замыкания множества найдутся такие числа $r_A > 0$ и $r_B > 0$, что

$$O(x, r_A) \cap A = \varnothing, \quad O(x, r_B) \cap B = \varnothing.$$

Положим $r := \min\{r_A, r_B\} > 0$. Справедливо выражение

$$O(x, r) \cap (A \cup B) = (O(x, r) \cap A) \cup (O(x, r) \cap B) = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{A \cup B}.$$

Шаг 3. Докажем (iii). Действительно,

$$\varnothing = \varnothing - \text{замкнуто} \Rightarrow \varnothing = \overline{\varnothing}, \quad X = X - \text{замкнуто} \Rightarrow X = \overline{X}.$$

Шаг 4. Для доказательства утверждения (iv) приведём пример.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных числе, а $\mathbb{J}$ — множество иррациональных чисел.

$$A = [0,1] \cap \mathbb{Q}, \ B = [0,1] \cap \mathbb{J}, \ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1, \ \overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \overline{A} = [0,1], \ \overline{B} = [0,1].$$

При этом $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{A} \cup \overline{B} = [0,1]$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Замыкание $\overline{A}$ замкнутого множества A совпадает с самим множеством A.*

Доказательство.

Действительно, с одной стороны, имеет место вложение $A \subset \overline{A}$. С другой стороны,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha - \text{замкнуто}.$$

Но поскольку множество A замкнуто и $A \subset A$ имеем $A \in \{B_\alpha\}$. Следовательно,

$$\overline{A} \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{A} \subset A \Rightarrow \overline{A} = A.$$

Лемма доказана.

Ясно, что всякое подмножество Y метрического пространства (X, d) является метрическим пространством (Y, d). Мы ранее выяснили, что в метрическом пространстве (X, d) открыто-замкнутыми множествами заведомо являются само множество X и $\varnothing$. Однако существуют такие метрические пространства, у которых есть и другие открыто-замкнутые множества. Дадим определение *связного метрического пространства*.

Определение 11. *Метрическое пространство* (X, d) *называется топологически связным, если в нем нет других открыто-замкнутых множеств, кроме* X *и* $\varnothing$.

ПРИМЕР 6. Пусть A_1 и A_2 — это два непересекающихся замкнутых подмножества множества $\mathbb{R}^2$ с метрикой $d = |x - y|$. Тогда $(A_1 \cup A_2, d)$ — это несвязное метрическое пространство. Справедливы следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cup A_2) \setminus A_2 - \text{открыто}, \quad A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus A_1 - \text{открыто}.$$

Следовательно, множества A_1 и A_2 в метрическом пространстве

$$(A_1 \cup A_2, d)$$

одновременно открыты и замкнуты.

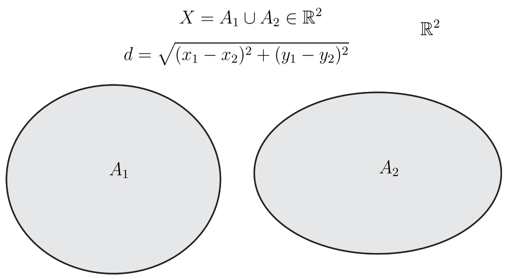

Рис. 9. Несвязное метрическое пространство.

§ 3. Плотные и неплотные множества

Дадим определения *плотных и нигде не плотных множеств* в метрических пространствах.

Определение 12. *Множество* A *метрического пространства* (X, d) *называется плотным во множестве* B *этого же пространства, если* $\overline{A} = B$.

ПРИМЕР 7. Пусть $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $B = [0, 1]$, тогда $\overline{A} = B$.

Определение 13. *Множество* A *называется всюду плотным в метрическом пространстве* (X, d), *если* $\overline{A} = X$.

Определение 14. *Множество* A *называется нигде не плотным в метрическом пространстве, если всякое открытое множество метрического пространства* (X, d) *содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества* A.

ПРИМЕР 8. Тривиальным примером нигде не плотного множества в метрическом пространстве $(X = [0, 1], d(x, y) = |x - y|)$ является любое конечное множество точек $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Это пространство является сепарабельным, поскольку в силу известной теоремы Стоуна любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Q}. \tag{3.1}$$

Именно, для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой многочлен $P_n(x)$ вида (3.1), что имеет место неравенство

$$d(f(x), P_n(x)) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Рассмотрим множество всех многочленов с рациональными коэффициентами $E_0 = \{P_n(x)\}$. Ясно, что предельными точками этого множества в силу неравенства (3.2) являются все непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.

Определение 15. *Метрическое пространство (X,d) называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.*

ПРИМЕР 10. Метрическое пространство l^∞ [1]).

Рассмотрим всевозможные последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$, для которых

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Введём на этом пространстве следующую метрику:

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

Докажем, что это пространство не является сепарабельным.

С этой целью нам нужно предъявить такое подмножество E_0 множества l^∞, которое нельзя приблизить с любой наперед заданной точностью элементами любого счётного множества.

В качестве такого множества E_0 возьмём произвольные последовательности, состоящие из нулей и единиц:

$$\{x_k\}, \quad x_k = 0 \quad \text{либо} \quad x_k = 1.$$

Можно проверить, что мощность этого множества E_0 — континуум. Кроме того,

$$d(x_0, y_0) = 1 \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

[1]) В некоторых книгах это пространство обозначается как m.

С другой стороны,

$$O(x_0, 1/2) \cap O(y_0, 1/2) = \varnothing \quad \text{для всех} \quad x_0, y_0 \in E_0.$$

Возьмём в каждом из шаров $O(x_0, 1/2)$ точку x, когда x_0 пробегает все множество E_0. Образованное множество M имеет ту же мощность, что и множество E_0. Поэтому множество, которое с любой точностью по метрике d приближает множество E_0 должно иметь мощность континуума. Следовательно, *счётного* всюду полного множества в l^∞ не существует.

§ 4. Множество Кантора

Дадим определение *совершенного множества.*

Определение 16. *Множество метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и состоит из предельных точек.*

ПРИМЕР 11. Приведем пример замкнутого, но не совершенного множества. Пусть

$$A = \overline{O(x_0, r)} \cup \{x_1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad |x_0 - x_1| > r.$$

Множество A замкнуто как объединение двух замкнутых множеств — $\overline{O(x_0, r)} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| \leqslant r\right\}$ и точки $\{x_1\}$, которое тоже замкнуто, поскольку множество $\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1\}$ является открытым. Докажите сами! Ясно, что точка $\{x_1\}$ не является предельной точкой множества A, поскольку открытые шары $O(x_1, \varepsilon)$ при любом $0 < \varepsilon < r/2$ не содержат других точек множества A за исключением самой точки $\{x_1\}$. Тем самым, множество A замкнуто, но не совершенно.

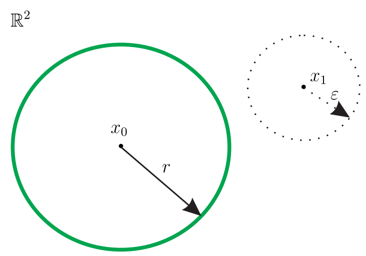

Рис. 10. Несовершенное множество $A = \overline{O(x_0, r)} \cup \{x_1\}$.

Предъявим алгоритм построения так называемого множества Кантора. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$, который мы разделим на три равные части и выкинем из него интервал $(1/3, 2/3)$. Теперь оставшиеся отрезки также разделим на три равные части и из них также выкинем серединные интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т.д. В результате на

$n-$ом шаге получим замкнутое множество I_n длиной 3^{-n}, причём выполнена цепочка вложений

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots .$$

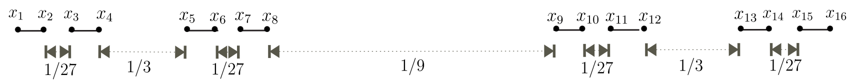

Рис. 11. Построение множества Кантора.

Введем множество Кантора

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n. \tag{4.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Множество Кантора K является совершенным и нигде не плотным множеством.*

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что по построению I_n замкнуты в метрическом пространстве $(X = [0, 1], d(x, y) = |x - y|)$. Поэтому множество Кантора K как пересечение счётного числа замкнутых множеств замкнуто.

Шаг 2. Докажем, что каждая точка множества Кантора K является его предельной точкой.

Действительно, пусть $x \in K$. Рассмотрим произвольную окрестность этой точки Σ_x, которая согласно определению окрестности содержит открытый интервал $\sigma_x \stackrel{\text{def}}{=} (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Sigma_x$ с центром в точке x. Пусть Λ_n — это тот отрезок из множества I_n, который содержит точку x. Заметим, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_n \in \sigma_x$. Пусть $a_n \in \Lambda_n$ — это тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с $x \neq a_n$. Следовательно, для произвольной окрестности Σ_x точки x нашлась точка $a_n \in K$ такая, что $x \neq a_n \in \Sigma_x$.

Таким образом, множество Кантора совершенно.

Шаг 3. Докажем, что множество Кантора K является нигде не плотным множеством на отрезке $[0, 1]$. Пусть Σ — это произвольное открытое множество на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что если на этом множестве нет точек Канторова множества, то доказывать нечего. Пусть, однако, $x \in K \cap \Sigma$. Теперь возьмём тот отрезок Λ_m, который содержит точку x. Возьмём теперь интервал с центром в середине этого отрезка Λ_m и радиуса 2^{-m-1}. Этот интервал не принадлежит Канторову множеству.

Таким образом, нигде не плотность доказана.

Лемма доказана.

Лекция 6

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Определения по Коши и по Хайне

Как вам известно из курса математического анализа существуют два определения непрерывности отображений метрических пространств. Дадим определение по Коши.

Определение 1. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, *если для всякой окрестности* $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ *точки* $g(x_0) \in Y$ *найдётся такая окрестность* $\Sigma_{x_0} \subset X$ *точки* x_0, *что*

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Теперь дадим определение по Хайне.

Определение 2. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, *если для всякой сходящейся к точке* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *соответствующая последовательность* $\{g(x_n)\}$ *сходится к точке* $g(x_0)$ *в метрическом пространстве* (Y, ρ) :

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \Rightarrow g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Точка* a *принадлежит замыканию* $\overline{A}$ *множества* A *метрического пространства* (X, d) *тогда и только тогда, когда существует такая последовательность* $\{x_n\} \subset A$, *что*

$$x_n \xrightarrow{d} a \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $a \in \overline{A}$. По определению

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} A_\alpha, \quad A \subset A_\alpha, \quad A_\alpha \text{ — замкнуто.}$$

Предположим, что найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$O(a, 1/n_0) \cap A = \varnothing.$$

Тогда

$$O(a, 1/n_0) \subset X \backslash A, \quad B_a = X \backslash O(a, 1/n_0) \text{ – замкнуто,}$$

причём $A \subset B_a$. Стало быть,

$$a \in \overline{A} \subset B_a \quad \text{и} \quad a \notin B_a.$$

Полученное противоречие доказывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$O(a, 1/n) \cap A \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь достаточно взять $x_n \in O(a, 1/n) \cap A \subset A$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и получить, что

$$x_n \xrightarrow{d} a \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Пусть теперь

$$\{x_n\} \subset A \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow{d} a.$$

Докажем, что $a \in \overline{A}$. Действительно,

$$\{x_n\} \subset A \subset A_\alpha \text{ – произвольное замкнутое множество.}$$

Тогда $a \in A_\alpha$.

□ Этот доказывается так. Пусть нет и

$$a \notin A_\alpha \Rightarrow a \in X \backslash A_\alpha \Rightarrow \exists O(a, r) \subset X \backslash A_\alpha$$

с положительным радиусом $r > 0$, поскольку $X \backslash A_\alpha$ открыто. Но начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{x_n\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset O(a, r) \subset X \backslash A_\alpha,$$

а, с другой стороны, имеем

$$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A_\alpha.$$

Следовательно,

$$a \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \overline{A}. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в частном случае, когда a — изолированная точка множества A, имеем $x_n = a$, $a \in \overline{A}$.

Дадим определение образа множества при отображении g.

О п р е д е л е н и е 3. *Образом $V \subset Y$ множества $U \subset X$ при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y :\ y = g(x),\ x \in U\}.$$

О п р е д е л е н и е 4. *Полным прообразом $U \subset X$ множества $V \subset$ $\subset Y$ при отображении*

$$g : X \to Y$$

называется множество

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X :\ g(x) \in V \subset Y\}\,.$$

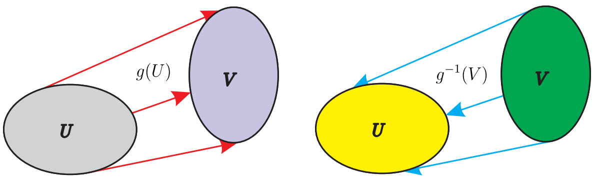

Рис. 12. Образ и прообраз множества.

§ 2. Теорема об открытом отображении

Докажем теорему *об открытом отображении*.

Т е о р е м а 1. *Отображение*

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

является непрерывным тогда и только тогда, когда полный прообраз $G \subset X$ открытого множества $\Sigma \subset Y$ открыт в X.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S — открытое множество в (Y, ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз множества S непуст. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

в силу непрерывности g (поскольку $g(x_0) \in S$) найдётся такая открытая окрестность $\Sigma_{x_0} \ni x_0$, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset S.$$

Тогда множество

$$\bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0},$$

очевидно, открыто и является согласно определению полным прообразом.

Шаг 2. Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Sigma_{g(x_0)}$ — это открытая окрестность точки $g(x_0)$. Тогда

$$g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})$$

— это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$:

$$g\left(g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})\right) = \Sigma_{g(x_0)}.$$

Следовательно, $g(x)$ — непрерывное отображение согласно определению по Коши.

Теорема доказана.

Следствие. Переходя к дополнениям и учитывая, что (если функция g определена на всём пространстве X) полный прообраз дополнения есть дополнение полного прообраза, получаем эквивалентное условие непрерывности: прообраз всякого замкнутого множества замкнут.

Теперь мы можем доказать теорему об эквивалентности определений по Коши и по Хайне.

Теорема 2. *Определение по Коши эквивалентно определению по Хайне.*

Замечание 2. Отметим, что это достаточно сильное утверждение, поскольку в более общих топологических пространствах, которые мы скоро будем изучать, из определения по Хайне, вообще говоря, не следует определение по Коши, хотя из определения по Коши всегда следует определение по Хайне.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

есть непрерывное отображение по Коши. Докажем, что оно непрерывно по Хайне. Действительно, пусть

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{в} \quad (X, d) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

тогда для любой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ найдётся такая окрестность $S_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Но $x_n \in S_{x_0}$ начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ и поэтому

$$g(x_n) \in g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

Значит, последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$:

$$g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Итак, пусть Σ — это открытое множество метрического пространства (Y, ρ). Докажем, что его полный прообраз

$$G := \{x \in X : \ g(x) \in \Sigma\}$$

является открытым множеством. Пусть нет. Тогда *найдётся такая точка* x_0, *что*

$$x_0 \in G \quad \textit{и} \quad x_0 \in \overline{X \backslash G}.$$

□ Действительно, согласно отрицанию определения открытого множества G для любого шара $O(x_0, r)$ положительного радиуса r имеем одновременно

$$x_0 \in G \quad \text{и} \quad O(x_0, r) \cap (X \backslash G) \neq \varnothing.$$

Следовательно,

$$x_0 - \text{предельная точка множества } X \backslash G \Rightarrow x_0 \in \overline{X \backslash G}. \quad \boxtimes$$

Но тогда найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset X \backslash G$, что

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{в} \quad (X, d) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

З а м е ч а н и е 3. В этом месте существенно, что топология окрестностей точки $x_0 \in X$ может быть задана счётной системой окрестностей

$$O(x_0, 1/n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in X : \ d(x, x_0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

В случае общих топологических пространств локально в некоторой точке $x_0 \in X$ её система окрестностей не может быть задана счётным семейством окрестностей. Поэтому в случае общих топологических пространств это место доказательство не проходит — нельзя выделить сходящуюся к точке x_0 последовательность и теорема неверна.

При этом согласно определению полного прообраза G имеем

$$g(x_n) \notin \Sigma \text{ при всех } n \in \mathbb{N},$$

поскольку $\{x_n\} \not\subset G$. С другой стороны, согласно определению непрерывности по Хайне

$$g(x_n) \xrightarrow{\rho} g(x_0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку всякая точка открытого множества является согласно определению предельной, то в силу открытости множества Σ начиная с некоторого натурального числа n_0

$$\{g(x_n)\}_{n=n_0}^{+\infty} \subset \Sigma.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

§ 3. Компактные метрические пространства

Определение 5. *Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ открытых множеств такое, что*

$$A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

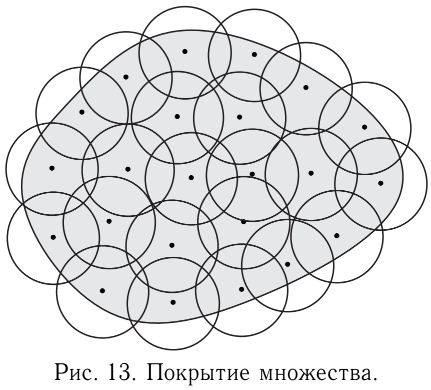

Рис. 13. Покрытие множества.

Определение 6. *Метрическое пространство (X, d) называется компактным (или компактом), если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

ПРИМЕР 1. Компактом в метрическом пространстве $(X = \mathbb{R}^1, d(x,y) = |x - y|)$ является, например, отрезок $[0, 1]$.

Определение 7. *Метрическое пространство (X, d) называется локально компактным, если всякая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.*

Определение 8. *Произвольное семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.*

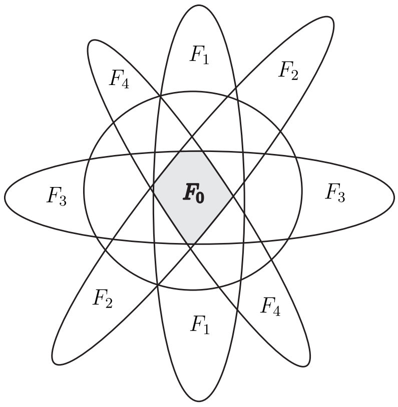

Рис. 14. Центрированная система множеств.

Докажем важную теорему о необходимом и достаточном условии компактности метрического пространства.

Теорема 3. *Для того чтобы метрическое пространство (X, d) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть (X, d) компактно и $\{F_\alpha\}$ — это произвольная центрированная система его замкнутых подмножеств. Тогда $\{G_\alpha\} = \{X \backslash F_\alpha\}$ — это семейство открытых множеств.

Предположим, что

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing \Rightarrow X = X \backslash \varnothing = X \backslash \left(\bigcap_\alpha F_\alpha \right) = \bigcup_\alpha (X \backslash F_\alpha) = \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Тогда

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \text{найдётся конечная подсистема } \{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n, \quad X = \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}.$$

Тогда

$$\varnothing = X \backslash X = X \backslash \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n X \backslash G_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k}.$$

Следовательно, система $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Противоречие.

Шаг 2. Достаточность. Пусть всякая центрированная система его замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества X, тогда

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha, \quad \{F_\alpha\} = \{X \backslash G_\alpha\}$$

— это система замкнутых множеств, причём

$$X = \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \varnothing = X \backslash X = X \backslash \left(\bigcup_\alpha G_\alpha \right) = \bigcap_\alpha (X \backslash G_\alpha) = \bigcap_\alpha F_\alpha.$$

Следовательно,

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing.$$

Таким образом, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Значит, некоторая его конечная подсистема

$$\{F_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$$

имеет пустое пересечение. Поэтому справедлива цепочка выражений

$$\bigcap_{k=1}^N F_{\alpha_k} = \varnothing \Rightarrow X = X \backslash \varnothing = X \backslash \left(\bigcap_{k=1}^N F_{\alpha_k} \right) = \bigcup_{k=1}^N (X \backslash F_{\alpha_k}) = \bigcup_{k=1}^N G_{\alpha_k}.$$

Таким образом,

$$\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^N \quad \text{покрывает} \quad X,$$

где $G_{\alpha_k} = X \backslash F_{\alpha_k}$. Значит, X — компакт.

Теорема доказана.

В следующей лемме мы собрали некоторые свойства компактных метрических пространств.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства компактов*:

(i) *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом*;

(ii) *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактное пространство*;

(iii) *Компактное подмножество метрического пространства, рассматриваемое как метрическое пространство, замкнуто.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем свойство (i). Действительно, пусть (X, d) — это компакт и A замкнуто в (X, d). Тогда

$$X_1 = X \backslash A - \text{открыто}.$$

Пусть $\{U_\alpha\}$ — это произвольное открытое покрытие множества A. Тогда в силу компактности метрического пространства (X, d)

$$X = (X \backslash A) \cup A = X_1 \bigcup \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) \Rightarrow \exists \text{ конечная подсистема } \{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^n,$$

что
$$X = X_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \right) \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}.$$
Следовательно, A — это компакт.

Шаг 2. Докажем свойство (ii). Пусть
$$g(x) : (X, d) \to (Y, \rho) - \text{непрерывное отображение.}$$
Пусть
$$Y = \bigcup_{\alpha} V_\alpha, \quad V_\alpha - \text{открыто в } (Y, \rho).$$
По теореме об открытом отображении
$$U_\alpha = g^{-1}(V_\alpha) - \text{открыто в } (X, d).$$
Следовательно,
$$X = g^{-1}(Y) = g^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} V_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha} g^{-1}\left(V_\alpha \right).$$
Поскольку (X, d) — компакт, то найдётся конечная подсистема
$$\left\{ g^{-1}\left(V_{\alpha_k} \right\}_{k=1}^{n} \right), \quad X = \bigcup_{k=1}^{n} g^{-1}\left(V_{\alpha_k} \right) = g^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} V_{\alpha_k} \right) \Rightarrow Y = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}.$$
Следовательно, (Y, ρ) — это компакт.

Докажем свойство (iii). Действительно, пусть A — компакт в (X, d) и $y \notin A$. Тогда для любой точки $x \in A$ найдутся такие открытые окрестности $x \in U_x$ и $y \in V_x(y)$, что
$$U_x \bigcap V_x(y) = \varnothing.$$
Кроме того,
$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}(y) \right) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \right) = \varnothing.$$
Следовательно, y входит в $X \backslash A$ вместе с некоторой открытой окрестностью:
$$y \in \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \subset X \backslash A \Rightarrow X \backslash A - \text{открыто} \Rightarrow A - \text{замкнуто.}$$
Лемма доказана.

§ 4. База топологии метрического пространства

Дадим определение базы топологии метрического пространства.

Определение 9. *Базой топологии $\mathfrak{B}$ метрического пространства (X, d) называется такая система открытых множеств, что любое открытое множество Σ можно представить в виде*

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}, \quad B_{\alpha} \in \mathfrak{B}.$$

Например, на плоскости база топологии — это множества $O(x, 1/m)$ при $m \in \mathbb{N}$:

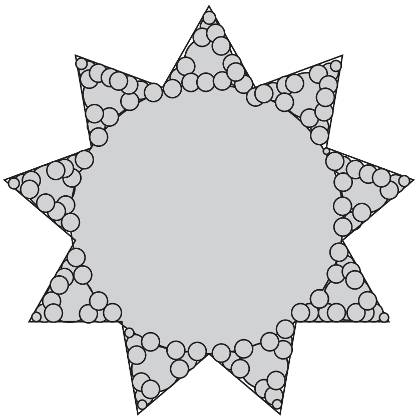

Рис. 15. Открытые шары радиусов $1/m$ при $m \in \mathbb{N}$ — база топологии на $\mathbb{R}^2$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Для того чтобы система открытых множеств $\mathfrak{B}$ была базой топологии метрического пространства (X, d), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и всякой его точки $a \in G$ нашлось такое множество $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что $a \in \Sigma_a \subset G$.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии. Тогда для любого открытого множества G и любой его точки $a \in G$ найдётся такая подсистема

$$\{\Sigma_{\alpha}\} \in \mathfrak{B},$$

что

$$G = \bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha} \Rightarrow \exists \alpha_0 : a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть теперь для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдётся такое $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что

$$a \in \Sigma_a \subset G.$$

Но тогда

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_a.$$

Значит, $\mathfrak{B}$ — база топологии.

Лемма доказана.

Определение 10. *Метрическое пространство называется пространством со счётной базой, если существует хотя бы одна база топологии, состоящая из счётного числа множеств.*

ПРИМЕР 2. Примером пространства со счётной базой является пространство $(X = \mathbb{R}^1, d(x, y) = |x - y|)$. Действительно, в качестве базы топологии возьмём следующую счётную систему множеств:

$$\mathfrak{B} = \{(a_n - 1/m, a_n + 1/m)\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Q}.$$

Справедлива следующая лемма, обобщающая этот результат:

Лемма 4. *Метрическое пространство является пространством со счётной базой, если в нём существует счётное всюду плотное множество, т. е. если это метрическое пространство сепарабельно.*

Рекомендуется доказать её самостоятельно.

Лекция 7

ПОЛНОТА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Полные метрические пространства

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *метрического пространства* (X, d) *называется фундаментальной, если*

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad \textit{при} \quad n, m \to +\infty.$$

ПРИМЕР 1. В метрическом пространстве $(X = [0,1], d(x,y) = |x-y|)$ всякая фундаментальная последовательность сходится. С другой стороны, приведём пример метрического пространства, в котором не всякая фундаментальная последовательность сходится. Действительно, пример такой:

$$X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Приведём соответствующий пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим следующую последовательность:

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in [0, 1/2 - \frac{1}{2+n}]; \\ \omega_n(x), & \text{если} \quad x \in [1/2 - \frac{1}{2+n}, 1/2 + \frac{1}{2+n}]; \\ 1 - x, & \text{если} \quad x \in [1/2 + \frac{1}{2+n}, 1], \end{cases}$$

где

$$\omega_n(x) \in \mathbb{C}^{(1)}\left(\left[1/2 - \frac{1}{2+n}, 1/2 + \frac{1}{2+n}\right]\right),$$

$$\omega_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n}\right) = 1/2 - \frac{1}{2+n}, \quad \omega_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}\right) = 1/2 - \frac{1}{2+n},$$

$$\omega_n'\left(1/2 - \frac{1}{2+n}\right) = 1, \quad \omega_n'\left(1/2 + \frac{1}{2+n}\right) = -1.$$

Такая гладкая функция $\omega_n(x)$ существует.

Теперь заметим, что построенная последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ и сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1/2]; \\ 1-x, & \text{если } x \in [1/2,1], \end{cases}$$

которая не является дифференцируемой в точке $x = 1/2$.

С другой стороны, метрическое пространство

$$X = \mathbb{C}^{(1)}([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \left[|f(x)-g(x)| + |f'(x)-g'(x)|\right]$$

уже обладает тем свойством, что всякая фундаментальная в нём последовательность сходится к некоторой функции из $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$.

Определение 2. *Метрическое пространство называется полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится в нем.*

ПРИМЕР 3. В качестве примера рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|.$$

Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ — это фундаментальная последовательность относительно указанной метрики. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить полноту этого пространства.

Наша цель этой лекции доказательство утверждения о том, что всякое метрическое пространство может быть «пополнено» до некоторого полного метрического пространства.

§ 2. Изометрия метрических пространств

Рассмотрим линейное пространство $B(X)$ ограниченных функций на множестве X [1]) относительно метрики

$$d_0(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|. \tag{2.1}$$

Оно является полным метрическим пространством $(B(X), d_0)$.

---

[1]) Причем X метрическое пространство относительно некоторой метрики d.

Определение 3. *Отображение*

$$\mathrm{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

двух метрических пространств называется изометрией, если

$$d_2(\mathrm{J}(f), \mathrm{J}(g)) = d_1(f, g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in X_1.$$

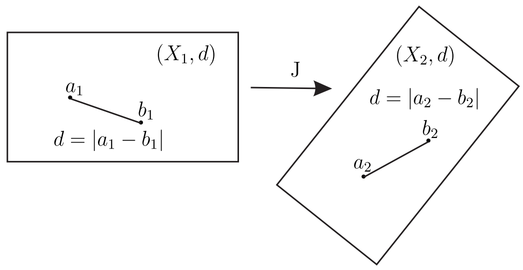

Рис. 16. Поворот прямоугольника на плоскости — изометрия.

Замечание 1. Заметим, что изометрия является взаимно однозначным отображением на свой образ.

□ Действительно, докажем, что изометрия однозначное отображение. Пусть $x \in X_1$ и имеет место равенство

$$y_1 = \mathrm{J}(x), \quad y_2 = \mathrm{J}(x) \Rightarrow 0 = d_1(x, x) = d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(x)) = d_2(y_1, y_2) \Rightarrow \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Осталось доказать инъективность, что следует из равенств

$$y = \mathrm{J}(x_1) = \mathrm{J}(x_2), \quad d_1(x_1, x_2) = d_2(\mathrm{J}(x_1), \mathrm{J}(x_2)) = d_2(y, y) = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes$$

Справедлива следующая лемма об изометрии метрических пространств:

Лемма 1. *Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — это два полных метрических пространства и*

$$E_1 \overset{ds}{\subset} X_1, \quad E_2 \overset{ds}{\subset} X_2,$$

где между E_1 и E_2 имеется изометрия J, причём $\mathrm{J}E_1 = E_2$. Тогда изометрия J продолжается единственным образом до изометрии между (X_1, d_1) и (X_2, d_2).

Замечание 2. Здесь и всюду далее мы пишем

$$E \overset{ds}{\subset} X,$$

если множество E всюду плотно в метрическом пространстве (X, d)

$$\overline{E} = X.$$

Это равносильно свойству, что для любой точки $x \in X$ найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что

$$x_n \xrightarrow{d} x \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Определение $\widehat{\mathrm{J}}$. Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда в силу всюду плотности E_1 в X_1 существует такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \quad n \to +\infty.$$

Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}x_n\}$ фундаментальна в (X_2, d_2), поскольку

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(x_m)) = d_1(x_n, x_m) \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty,$$

и в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) найдётся такое $y \in X_2$, что

$$\mathrm{J}(x_n) \xrightarrow{d_2} y \quad n \to +\infty.$$

Обозначим через

$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad x \in X_1 \backslash E_1; \\ \mathrm{J}(x), & \text{если} \quad x \in E_1 \end{cases}$$

некоторое продолжение оператора изометрии J, определённого на множестве E_1, на множество X_1.

Шаг 2. Корректность. Проверим корректность определения $\mathrm{J}(x)$. Пусть существует другая последовательность $\{v_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}(v_n)\}$ тоже сходится к $\widehat{\mathrm{J}}(x)$, поскольку последовательность

$$\{z_n\} = x_1, v_1, x_2, v_2, \ldots, x_n, v_n, \ldots$$

сходится к x. Действительно, $z_{2n-1} = x_n$ и поэтому

$$d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(z_n), \mathrm{J}(z_{2n-1})) + d_2(\mathrm{J}(z_{2n-1}), \widehat{\mathrm{J}}(x)) \to +0$$

при $n \to +\infty$. Поэтому и подпоследовательность $\{\mathrm{J}(z_{2n}) = \mathrm{J}(v_n)\}$ тоже сходится к $\widehat{\mathrm{J}}(x)$.

Шаг 3. Изометрия. Проверим, что так определённое продолжение изометрии J является изометрией на X_1.

□ Действительно, пусть $x, z \in X_1$, тогда найдутся такие последовательности $\{x_n\} \subset E_1$ и $\{z_n\} \subset E_1$, что

$$x_n \xrightarrow{d_1} x, \quad z_n \xrightarrow{d_1} z \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

тогда

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, z_n) = d_1(x, z).$$

Действительно, это следствие следующих рассуждений:

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) + d_2(\mathrm{J}(z_n), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Отсюда получаем, что

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) \leqslant \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x_n), \widehat{\mathrm{J}}(x)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) + d_2(\widehat{\mathrm{J}}(z), \mathrm{J}(z_n)),$$

из которой сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)).$$

Значит,

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \widehat{\mathrm{J}}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(z_n)).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$d_1(x, z) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, z_n). \quad \boxtimes$$

Шаг 4. Отображение на X_2. Наконец, докажем, что

$$\widehat{\mathrm{J}}(X_1) = X_2.$$

Действительно, для каждой точки $z \in X_2$ найдётся такая последовательность $\{z_n\} \subset E_2$, что

$$d_2(z_n, z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поскольку на E_1 отображение J обладает обратным, то это в свою очередь означает, что найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что $z_n = \mathrm{J}(x_n)$ и тем самым

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), z) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, последовательность $\{\mathrm{J}(x_n)\}$ сходится, а следовательно, фундаментальна. Но тогда в силу изометрии J последовательность $\{x_n\}$ также фундаментальна. Значит, она сходится к $x \in X_1$ в силу полноты (X_1, d_1). Кроме того, справедливы следующие выражения

$$d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), z) \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), z_n) + d_2(z_n, z) = \\ = d_1(x, x_n) + d_2(\mathrm{J}(x_n), z_n) + d_2(z_n, z),$$

Поскольку $z_n = \mathrm{J}(x_n)$ и

$$x_n \xrightarrow{d_1} x, \quad z_n \xrightarrow{d_2} z \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

приходим к неравенству

$$0 \leqslant d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x), z) \leqslant 0 \Rightarrow z = \widehat{\mathrm{J}}(x).$$

Шаг 5. Инъективность. Инъективность является следствием того, что $\widehat{\mathrm{J}}$ — это изометрия.

□ Действительно, пусть для некоторого $y \in X_2$ найдутся две точки такие, что $\widehat{\mathrm{J}}(x_1) = \widehat{\mathrm{J}}(x_2) = y$, тогда

$$d_1(x_1, x_2) = d_2(\widehat{\mathrm{J}}(x_1), \widehat{\mathrm{J}}(x_2)) = d_2(y, y) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Справедлива следующее утверждение:

Теорема 1. *Всякое метрическое пространство (X, d) изометрично некоторой части метрического пространства $(B(X), d_0)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть метрическое пространство (X, d) не пусто. Тогда найдётся точка $x_0 \in X$. Определим функцию на метрическом пространстве (X, d) следующим образом:

$$f_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} d(y, x) - d(x_0, y), \tag{2.2}$$

где точки $x, x_0 \in X$ фиксированные, а точка $y \in X$ произвольная.

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, x_0) \tag{2.3}$$

□ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x),$$

$$d(y, x_0) \leqslant d(y, x) + d(x, x_0) = d(y, x) + d(x_0, x).$$

Из этих двух неравенств вытекает неравенство (2.3). $\boxtimes$

Значит,
$$|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0),$$
т. е. функция $f_x(y)$ для произвольных фиксированных $x, x_0 \in X$ принадлежит метрическому пространству $B(X)$ как функция $y \in X$.

Шаг 2. Для фиксированных $x_1, x_2 \in X$ имеют место следующие цепочки выражений:
$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2).$$
Отсюда получаем, что
$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2). \tag{2.4}$$

Докажем, что на самом деле в неравенстве (2.4) имеет место равенство. С этой целью достаточно указать такое $y \in X$, что имеет место равенство. Действительно, пусть $y = x_1$, тогда имеем
$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$
Итак,
$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2).$$
Таким образом, установлена изометрия между всем метрическим пространством (X, d) и частью метрического пространства $B(X)$.

Теорема доказана.

§ 3. Пополнение метрических пространств

Как мы уже говорили, не всякое метрическое пространство полно относительно заданной метрики. Однако для всякого метрического пространства существует операция «пополнения», после которой «пополненное» метрическое пространство уже полно относительно заданной метрики.

ПРИМЕР 4. Пусть $X = \mathbb{C}^{(1)}([0, 1])$ и
$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|,$$
тогда «пополнением» этого пространства относительно метрики $d(f, g)$ будет пространство $\mathbb{C}[0, 1]$. С другой стороны, рассмотрим метрическое пространство $X = \mathbb{C}^{(1)}[0, 1]$ с другой метрикой
$$d_p(f, g) = \left(\int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Тогда при «пополнении» мы получим пространство Лебега $L^p(0,1)$.

Дадим определение пополнения метрического пространства (X,d).

Определение 4. *Пополнением метрического пространства* (X,d) *называется такое полное метрическое пространство* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$, *что* (X,d) *изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в* $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

Справедлива основная теорема этой лекции.

Теорема 2. *Всякое метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.*

Доказательство.

Шаг 1. По доказанной ранее теореме об изометрии метрическое пространство (X,d) изометрично некоторому подмножеству полного метрического пространства $B(X)$. Пусть J — это изометрия, о которой идет речь. Тогда рассмотрим

$$\mathrm{J}X \subset B(X).$$

Замыкание множества $\mathrm{J}(X)$ в полном метрическом пространстве $B(X)$, очевидно, является полным метрическим пространством. Обозначим это замыкание через $\widetilde{B}(X)$. Тогда $\widetilde{B}(X)$ и можно взять за $\widetilde{X}$. В самом деле, $\widetilde{B}(X)$ — полное метрическое пространство и по построению выполнено

$$(\mathrm{J}X,\widetilde{d}) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{X},\widetilde{d}). \tag{3.1}$$

Шаг 2. Докажем, что пополнение единственно с точностью до изометрии. Пусть имеется метрическое пространство $(\widetilde{\widetilde{X}},d_2)$ и изометрия

$$\mathrm{J}_2 : (X,d) \to (\widetilde{\widetilde{X}},d_2)$$

такая, что

$$(\mathrm{J}_2X,d_2) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}},d_2).$$

Тогда, поскольку любая изометрия обратима и обратное отображение тоже является изометрией, существует отображение

$$\mathrm{J}_2 \cdot \mathrm{J}^{-1} : \mathrm{J}X \to \mathrm{J}_2X,$$

являющееся изометрией $\mathrm{J}X$ на J_2X. Поскольку

$$(\mathrm{J}X,d_0) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{B}(X),d_0), \quad (\mathrm{J}_2X,d_2) \overset{ds}{\subset} (\widetilde{\widetilde{X}},d_2), \tag{3.2}$$

то в силу леммы 8 эта изометрия продолжается до изометрии между $(\widetilde{B}(X),d_0)$ и $(\widetilde{\widetilde{X}},d_2)$, что и доказывает единственность пополнения с точностью до изометрии.

Теорема доказана.

§ 4. Теорема Бэра о категориях и её следствия

Сначала докажем теорему о вложенных шарах.

Теорема 3. *Пусть* (X, d) *— это полное метрическое пространство и* $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— семейство замкнутых шаров, причём при всех* $n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} \subset B_n$ *и радиусы шаров* r_n *стремятся к* 0, *тогда*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\},$$

где a *— некоторая точка из* X.

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, возьмём последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \in B_n$. Поскольку шары вложены и их радиусы стремятся к нулю, то эта последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна.

□ Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$

$$a_n, a_m \in B_{\min\{n,m\}},$$

а радиус шара $B_{\min\{n,m\}}$ стремится к нулю при $N \to +\infty$. ⊠

Следовательно, в силу полноты (X, d) последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке a, которая в силу замкнутости шаров B_n, принадлежит их пересечению.

Шаг 2. Докажем, что пересечение этих шаров состоит в точности из одной точки. Для этого заметим, что расстояние между двумя точками x, y, лежащими в одном замкнутом шаре радиуса r, не превосходит $2r$.

□ Действительно, если o — центр шара, имеем

$$d(x, y) \leqslant d(x, o) + d(o, y) \leqslant 2r. \quad ⊠$$

Следовательно, если пересечение всех шаров содержит точки a, b, то

$$d(a, b) \leqslant 2r_n \to 0,$$

откуда $d(a, b) = 0$ и $a = b$.

Теорема доказана.

Справедлива важная теорема Бэра о категориях.

Теорема 4. *Пусть* (X, d) *— это полное метрическое пространство, которое представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \quad X_n = \overline{X}_n, \tag{4.1}$$

тогда хотя бы одно множество X_{n_0} *содержит открытый шар положительного радиуса.*

Доказательство.

Доказательство проведём по индукции.

Шаг 1. Если $X = X_1$, то доказывать нечего, поскольку тогда X_1 содержит все открытые шары.

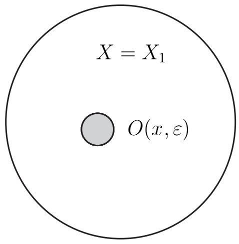

Рис. 17. Случай $X = X_1$.

Шаг 2. Пусть $X \neq X_1$, тогда поскольку X_1 замкнуто, то множество $X \backslash X_1$ открыто и поэтому найдётся непустой открытый шар $O(x_1, \varepsilon_1) \subset \subset X \backslash X_1$. Очевидно,

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap X_1 = \varnothing.$$

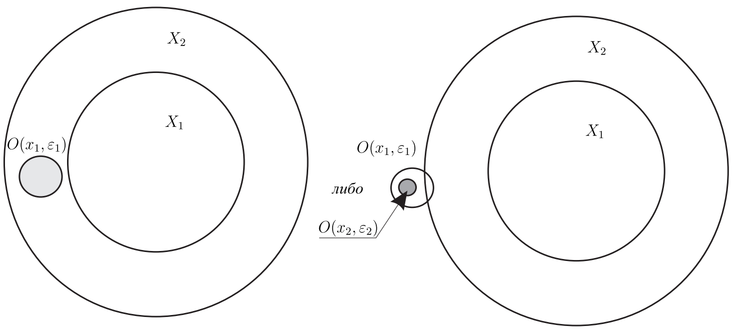

Рис. 18. Случай $X \neq X_1$.

Теперь либо $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X_2$ и тогда утверждение доказано, либо

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap (X \backslash X_2) \neq \varnothing$$

и, поскольку $X \backslash X_2$ открыто (так как X_2 замкнуто), тогда найдётся открытый шар

$$O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap X \backslash X_2, \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Понятно, что

$$O(x_2, \varepsilon_2) \cap (X_1 \cup X_2) = \varnothing.$$

Шаг 3. Таким образом, мы либо найдём на n-ом шаге непустой открытый шар $O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset X_n$ (и тогда теорема будет доказана), либо получим цепочку вложенных открытых шаров

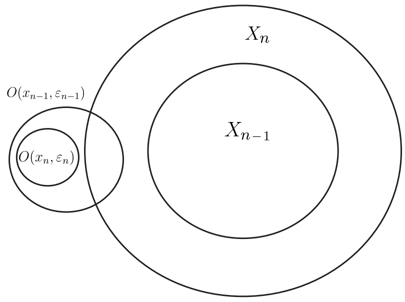

Рис. 19. Шаг n.

$$O(x_n, \varepsilon_n) \subset O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \ldots \subset O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{4},$$

$$O(x_n, \varepsilon_n) \cap (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = \varnothing. \tag{4.2}$$

Докажем, что последнее невозможно. В самом деле, в этом случае

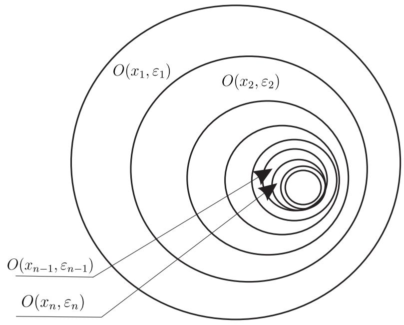

Рис. 20. Система вложенных шаров.

имеем

$$d(x_n, x_{n+m}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{3}. \tag{4.3}$$

Кроме того,

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4^{n-1}} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и сходящейся к некоторому элементу $x_0 \in X$ в силу полноты (X, d).

Теперь перейдём к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (4.3) и получим, что в силу (4.2)

$$d(x_n, x_0) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{3} \Rightarrow x_0 \in O(x_n, \varepsilon_n) \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} X_n.$$

Поскольку это верно для всех $n \in \mathbb{N}$, с учётом (4.1) получаем, что $x_0 \notin X$. Противоречие.

Теорема доказана.

Следующая теорема, которая называется *принцип равномерной ограниченности* или *теорема Банаха–Штейнгауза*, имеет важное значение при рассмотрении сопряженных пространств.

Прежде всего дадим определение равностепенной непрерывности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

Определение 5. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на метрическом пространстве (X, d), если для любой последовательности $\{x_m\} \subset (X, d)$ такой, что*

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X,$$

верно

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0.$$

Замечание 3. Отличие равностепенной непрерывности последовательности $\{f_n(x)\}$ от непрерывности каждой функции $f_n(x)$ заключается в том, что в последнем случае

$$x_m \xrightarrow{d} x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_m)| \to +0 \quad \text{при фиксированном } n \in \mathbb{N}.$$

Дадим определение равностепенной ограниченности последовательности функций $\{f_n(x)\}$.

Определение 6. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограниченной на метрическом пространстве (X, d), если выполнено неравенство*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K < +\infty, \quad x \in X, \quad K = K(x) > 0.$$

Теорема 5. *Пусть (X, d) — это полное метрическое пространство и выполнены следующие условия:*

1) *функции*

$$f_n(x) : (X, d) \to \mathbb{R}^1$$

непрерывны на (X, d) при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$;

2) *последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограничена.*

Тогда найдётся такой замкнутый шар $K \subset X$ положительного радиуса, что

$$\sup_{x \in K} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty.$$

Доказательство.

Введём множества

$$X_N \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N \right\}.$$

Шаг 1. Множества X_N замкнуты. В самом деле, множества

$$B_N^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : |f_n(x)| \leqslant N\}$$

замкнуты как прообразы замкнутых множеств $(-\infty, N]$ при непрерывных отображениях f_n (см. следствие из теоремы 1), но тогда

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_N^{(n)} = X_N$$

замкнуты по лемме о топологии как пересечения замкнутых множеств.

Шаг 2. Поскольку $\{f_n(x)\}$ равностепенно по $n \in \mathbb{N}$ ограничена, то

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_N.$$

□ Действительно, для каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N} \quad K(x) \leqslant N \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant K(x) \leqslant N \Rightarrow x \in X_N. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Следовательно, в силу теоремы Бэра о категориях найдётся такое $N_0 \in N$, что X_{N_0} содержит внутренние точки, а следовательно, некоторый замкнутый шар K. И, следовательно,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in K \Rightarrow \sup_{x\in K} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N_0 < +\infty.$$

Теорема доказана.

Тематическая лекция III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 8

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Определение топологического пространства

Определение 1. *Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ множества X называется топологическим пространством (X, τ), если выполнены следующие свойства*:

(i) X, $\varnothing \in \tau$;

(ii) *произвольное объединение множеств из τ есть множество из τ*;

(iii) *конечное пересечение множеств из τ есть множество из τ*;

при этом система подмножеств τ называется топологией.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим произвольное множество X и топологию $\tau = \{X, \varnothing\}$. Это топологическое пространство, которое называется антидискретным или слипшимся.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим множество X и топологию $\tau = 2^X$, т. е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Это топологическое пространство называется дискретным, поскольку топологии τ принадлежат все одноточечные множества $\{x\}$ при $x \in X$.

ПРИМЕР 3. В силу теоремы о топологии метрического пространства (X, d) топология этого пространства порождена всеми открытыми множествами метрического пространства.

Замечание 1. Заметим, что в силу той же теоремы о топологии замкнутые множества метрического пространства и вообще любого заданного топологического пространства (X, τ), в качестве топологического пространства можно взять само множества X с системой замкнутых множеств $\tau' = X \backslash \tau$, но при этом определение топологического пространства изменится:

Определение 2. *Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ' множества X называется топологическим пространством (X, τ'), если выполнены следующие свойства*:

$(\mathrm{i})_1$ X, $\varnothing \in \tau'$;

$(\mathrm{ii})_1$ *конечное объединение множеств из τ' есть множество из τ'*;

$(\mathrm{iii})_1$ *произвольное пересечение множеств из τ' есть множество из τ'*

при этом система подмножеств τ' называется топологией.

При этом хотя по смыслу множества из τ' замкнутые (как дополнительные к открытым) все теоремы остаются в силе. Например, теорема об открытом отображении остается в силе, поскольку в силу дополнительности прообраз при непрерывном отображении всякого замкнутого множества является замкнутым множеством.

Определение 3. *Окрестностью точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ) называется любое такое множество $U \in \tau$, что $x \in U$.*

Замечание 2. Ясно, что по определению окрестность — это открытое множество.

§ 2. Фундаментальная система окрестностей

Заметим, что задавать всю систему множеств τ довольно трудно на практике, поэтому вводят понятие фундаментальной системы окрестностей (ФСО). С этой целью обозначим через τ_x — все множества из топологии τ, содержащие точку x.

Определение 4. *Локальной базой топологии в точке $x \in X$ называется семейство множеств $\nu_x \subset \tau_x$ такое, что для всякого $U \in \tau_x$ найдётся такое $V \in \nu_x$, что $V \subset U$.*

Замечание 3. Заметим, что по смыслу локальная база топологии ν_x в каждой точке может заменить исходную топологию τ_x в этой точке, поскольку для целей последующих рассмотрений нам нужна не топология как таковая, а система окрестностей точки, обладающая определенными свойствами. Однако при этом система множеств

$$\nu \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in X} \nu_x$$

может уже и не обладать свойствами, указанными в определении топологии, и поэтому саму систему ν нельзя взять в качестве новой топологии.

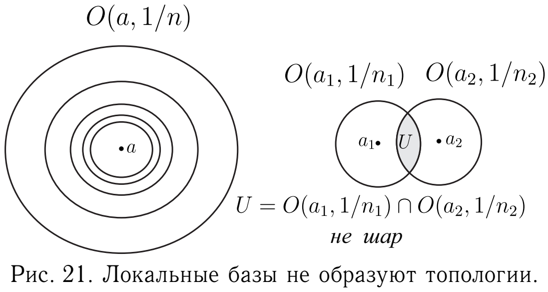

Рис. 21. Локальные базы не образуют топологии.

Действительно, ниоткуда не следует, что объединение двух множеств U_x, V_x из ν_x есть множество из ν_x, а можно лишь утверждать, что найдётся третье множество W_x из ν_x такое, что

$$W_x \subset U_x \cup V_x.$$

Если же мы можем выделить систему, обладающей этим свойством, то мы приходим к новому понятию *базы топологии*.

ПРИМЕР 4. Отметим, что в качестве локальной базы точки x метрического пространства (X, d) можно взять шары

$$O\left(x, \frac{1}{n}\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

ПРИМЕР 5. А для метрического пространства (X, δ) с дискретной метрикой

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = y; \\ 0, & \text{при } x \neq y \end{cases}$$

в качестве локальной базы можно взять одноточечное множество $\{x\}$.

Теперь мы фиксируем локальную базу окрестностей ν_x в каждой точке x топологического пространства (X, τ). Справедливо представление для этого семейства множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \; \alpha \in A_x\}, \quad V_{x,\alpha} \in \tau_x \subset \tau, \tag{2.1}$$

где A_x — это для каждого $x \in X$ семейство индексов, нумерующее семейство множеств ν_x.

Замечание 4. Отметим, что, вообще говоря, множество индексов A_x в каждой точке $x \in X$ может быть несчётным, например множеством мощности континуум. Как мы уже выяснили в примере 4, в случае метрического пространства множество индексов счётно. (Сформулируем это утверждение точнее: в метрическом пространстве существует счётная локальная база; но существуют и несчётные.)

С этим, как мы покажем далее, связана неэквивалентность понятий непрерывности по Коши и непрерывности по Хайне, поскольку при доказательстве соответствующей теоремы в предыдущей лекции мы существенно пользовались тем, что множество индексов счётно.

С другой стороны, можно ввести определение, обобщающее определение непрерывности по Хайне. Для этого вместо понятия последовательности точек топологического пространства вводят понятие направленности.

Попросту направленность определяется так же, как и последовательность. Например, сходящаяся к точке x последовательность $\{x_n\} \subset X$ в метрическом пространстве (X, d) определялась как произвольные точки из локальной базы топологии в точке x

$$x_n \in O(x, 1/n)\backslash\{x\} \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x.$$

Теперь в случае произвольной локальной базы топологии ν_x в точке $x \in X$ направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A_x}$, сходящаяся к этой точке выбирается так:

$$\text{пусть} \quad x_\alpha \in V_{x,\alpha} \text{ — произвольная точка.}$$

Далее в точке x_α рассмотрим снова локальную базу топологии $\nu_{x_\alpha} = \{V_{x_\alpha,\alpha_1}\} \subset \tau$ и следующую точку x_{α_1} выбираем из пересечения

$$x_{\alpha_1} \in V_{x,\alpha} \cap V_{x_\alpha,\alpha_1} \in \tau,$$

поскольку по определение локальной базы топологии $V_{x,\alpha}, V_{x_\alpha,\alpha_1} \in \tau$. Теперь рассмотрим локальную базу топологии $\nu_{x_{\alpha_1}} = \{V_{x_{\alpha_1},\alpha_2}\}$ в точке x_{α_1} и рассмотрим произвольную точку из пересечения

$$x_{\alpha_2} \in V_{x,\alpha} \cap V_{x_\alpha,\alpha_1} \cap V_{x_{\alpha_1},\alpha_2} \in \tau$$

и так далее. В результате мы и получаем некоторое обобщение последовательности сходящейся к точке x.

Таким образом, в каждой точке $x \in X$ локальная база топологии определяет новую систему окрестностей. Дадим определение ФСО.

Определение 5. *Фундаментальной системой окрестностей (ФСО) называется семейство множеств*

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}. \tag{2.2}$$

Справедливы следующие свойства ФСО:

Теорема 1. *Семейство множеств $\nu = \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}$ является ФСО для некоторой единственной топологии τ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$(\mathrm{i})_2$ *для любой точки $x \in X$ множество $\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \ \alpha \in A_x\} \neq \varnothing$ и для каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ имеем $x \in V_{x,\alpha}$;*

$(\mathrm{ii})_2$ *для каждых $V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x$ найдётся такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что*

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2};$$

$(\mathrm{iii})_2$ *для любого $x \in X$ и каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ и для любого $y \in V_{x,\alpha}$ найдётся $V_{y,\beta} \in \nu_y$, что $V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Итак, пусть семейство ν является ФСО для некоторой топологии τ. Докажем, что выполнены свойства $(\mathrm{i})_2$ – $(\mathrm{iii})_2$.

□ Действительно,

1. свойство $(\mathrm{i})_2$ выполнено по определению;

2. свойство $(\mathrm{ii})_2$ выполнено, поскольку множество $V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \in \tau_x$ и, следовательно, по определению ν_x найдётся такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2};$$

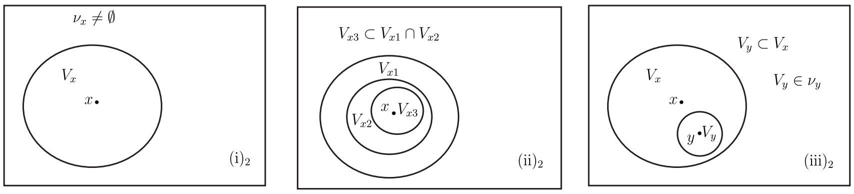

Рис. 22. Теорема 1 о ФСО.

3. докажем, что имеет место свойство (iii)$_2$. Пусть $x \in X$ и $V_{x,\alpha} \in \in \nu_x$. Тогда поскольку

$$\nu_x \subset \tau_x \subset \tau,$$

то в силу свойства (i)$_1$ для каждого

$$y \in V_{x,\alpha} \subset \tau$$

найдётся такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y \Rightarrow V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Таким образом, семейство ν — ФСО. ⊠

Шаг 2. Достаточность. Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть задано семейство множеств ν вида (2.2), удовлетворяющая свойствам (i)$_2$ – (iii)$_2$. Докажем, что ν порождает единственную топологию пространства X, для которой в свою очередь ν является ФСО.

Определим топологию τ как такое семейство множеств $\{U\} = \tau$, что для каждого $x \in U$ найдётся такое множество

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x \Rightarrow V_{x,\alpha} \subset U.$$

З а м е ч а н и е 5. Таким образом, семейство множеств τ определяется в обратную сторону по семейству ν, исходя из определения локальной базы топологии.

Понятно, что X и $\varnothing$ принадлежат топологии τ.

Проверим свойства топологии τ.

1. *Объединение любого числа множеств из топологии τ есть множество из топологии τ.*

□ Пусть

$$U_\alpha \in \tau, \ \alpha \in A \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Тогда для каждого $x \in B$ найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in U_{\alpha_0}$ и, следовательно, по определению семейства множеств τ найдётся такое $V_{x,\alpha_0} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_0} \in U_{\alpha_0} \subset B \Rightarrow B \in \tau. \quad ⊠$$

2. *Пересечение двух множеств из τ есть множество из τ.*

□ Действительно, пусть $U_1, U_2 \in \tau$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся такие V_{x,α_1} и V_{x,α_2} из ν_x, что

$$V_{x,\alpha_1} \subset U_1 \quad \text{и} \quad V_{x,\alpha_2} \subset U_2.$$

Тогда по свойству $(\mathrm{ii})_2$ найдётся такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \subset U_1 \cap U_2.$$

Стало быть,

$$U_1 \cap U_2 \in \tau.$$

Таким образом, семейство множеств τ — это топология. Однако, вообще говоря, не очевидно, что семейство множеств ν является ФСО для этой построенной топологии τ.

Теперь наша задача доказать, что ν — это ФСО для данной топологии τ, и единственность так введённой топологии.

1. *ФСО*. В силу свойства $(\mathrm{iii})_2$ для каждого $U_x \in \nu_x$ и для любой точки $y \in U_x$ найдётся такое $V_{y,x} \in \nu_y$, что $V_{y,x} \subset U_x$ и, следовательно, $U_x \in \tau_x \subset \tau$. Стало быть, ν — это ФСО для построенной топологии τ.

2. *Единственность*. Итак, пусть существуют две топологии τ и τ', причём $\nu \in \tau$ и $\nu \in \tau'$. Пусть $U \in \tau$, тогда для всякой точки $x \in U$ найдётся такое $V_{x,\alpha(x)} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha(x)} \subset U,$$

но тогда

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\} \subset \bigcup_{x\in U} V_{x,\alpha(x)} \subset U.$$

Значит,

$$U = \bigcup_{x\in U} V_{x,\alpha(x)} \subset \tau',$$

поскольку $V_{x,\alpha(x)} \in \nu \subset \tau'$ и, следовательно, произвольное объединение множеств из топологии $\tau^{'}$ принадлежит топологии $\tau^{'}$.

Итак, $U \in \tau'$. Аналогично в обратную сторону. Следовательно,

$$\tau = \tau'.$$

Теорема доказана.

§ 3. Примеры

ПРИМЕР 6. Рассмотрим множество $\mathbb{C}(X)$ — линейное пространство непрерывных функций на непустом множестве X. Введём топологию равномерной сходимости τ, порождённую, согласно теореме о ФСО, следующей системой окрестностей:

$$V_{x,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t\in X} |x(t) - y(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Соответствующая топология τ называется топологией равномерной сходимости.

□ Действительно, проверим свойства $(\mathrm{i})_2 - (\mathrm{iii})_2$.

1. $x(t) \in V_{x,\varepsilon} \neq \varnothing$, то $\nu_x \neq \varnothing$.

2. Пусть заданы V_{x,ε_1} и V_{x,ε_2}, тогда при $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ имеем, очевидно,

$$V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1}, \quad V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_2} \Rightarrow V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1} \cap V_{x,\varepsilon_2}.$$

3. Пусть $y(t) \in V_{x,\varepsilon_1}$. Пусть $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и

$$V_{x,\varepsilon_1} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon_1 \right\},$$

$$\sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| = \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$

$$V_{y,\varepsilon_3} = \left\{ z(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t \in X} |z(t) - y(t)| < \varepsilon_3 \right\}, \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Докажем, что $V_{y,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1}$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sup_{t \in X} |z(t) - x(t)| \leqslant \sup_{t \in X} |z(t) - y(t)| + \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon_3 + \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

для всех $z(t) \in V_{y,\varepsilon_3}$. ⊠

Таким образом, согласно теореме 1 семейство множеств ν_x, состоящее из указанных окрестностей, порождает некоторую топологию τ, для которой это семейство множеств является ФСО.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим то же множество $\mathbb{C}(X)$. Пусть

$$\{t_i\}_{i=1}^n \subset X,$$

тогда определим ФСО состоящей из следующих окрестностей:

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Точно так же, как и ранее, проверяется, что построенное семейство окрестностей удовлетворяет условиям теоремы 1 и порождает некоторую топологию, для которой является ФСО.

Соответствующая топология τ_p называется топологией поточечной сходимости. Пространство $\mathbb{C}(X)$, наделённое такой топологией, обозначается как $\mathbb{C}_p(X)$.

Поскольку каждый набор точек $\{t_i\}_{i=1}^n \subset X$, то при фиксированном $x(t) \in \mathbb{C}(X)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in \{t_i\}_{i=1}^n} |y(t_i) - x(t_i)| \leqslant \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)|.$$

Поэтому из условия $y(t) \in V_{x,\varepsilon}$ вытекает, что $y(t) \in V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$. Следовательно, $V_{x,\varepsilon} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$. Ясно, что окрестностей $V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$ больше, чем окрестностей $V_{x,\varepsilon}$.

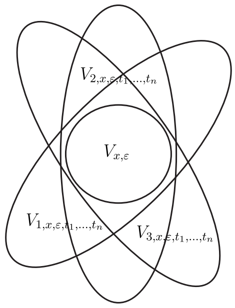

Рис. 23. «Грубая» поточечная ФСО и «тонкая» равномерная ФСО.

Возникает вопрос о том, как связаны эти две топологии, поскольку это два семейства множеств на одном и том же множестве $\mathbb{C}(X)$.

Согласно определению топологии, порождённой ФСО, имеют место следующие свойства:

$$U \in \tau_p, \quad \text{если} \quad \forall x \in U \quad \text{найдётся} \quad V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon} \in \nu_{px}, \quad V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon} \subset U;$$

$$U \in \tau, \quad \text{если} \quad \forall x \in U \quad \text{найдётся} \quad V_{x,\varepsilon} \in \nu_x, \quad V_{x,\varepsilon} \subset U.$$

Как мы уже доказали $V_{x,\varepsilon} \subset V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon}$. Поэтому, если $U \in \tau_p$, то $U \in \tau$. Таким образом, имеет место вложение $\tau_p \subset \tau$.

§ 4. Сравнение топологий и метризуемые топологические пространства

Когда на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2, возникает вопрос о том, как они соотносятся.

Определение 6. *Пишем $\tau_1 \geqslant \tau_2$, если имеет место множественное вложение $\tau_2 \subset \tau_1$. При этом говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2, а топология τ_2 слабее топологии τ_1. Если*

$$\tau_1 \not\subset \tau_2 \quad \text{и} \quad \tau_2 \not\subset \tau_1,$$

то говорят, что топологии несравнимы. Если же имеет место строгое вложение

$$\tau_2 \subset \tau_1,$$

то говорят, что топология τ_1 существенно сильнее, а топология τ_2 существенно слабее.

Определение 7. *Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым, если существует такая метрика d, что ФСО, определенная этой метрикой, состоящая из окрестностей*

$$\nu = \{\nu_x,\ x \in X\}, \quad \nu_x = \{V_{x,\varepsilon} = (y \in X : \ d(x,y) < \varepsilon), \quad \varepsilon > 0\},$$

порождает топологию τ.

З а м е ч а н и е 6. В качестве ФСО метрического пространства можно взять такую систему окрестностей, что локально в каждой точке $x \in X$ ФСО состоит из окрестностей

$$V_{x,n} = \left\{ y \in X : \; d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Справедливо следующее очевидное утверждение:

Л е м м а 1. *Для того чтобы топологическое пространство (X,τ) было метризуемым, необходимо, чтобы локальная база топологии в каждой точке порождалась счётным семейством окрестностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Необходимость очевидна.

Л е м м а д о к а з а н а.

§ 5. База топологии и относительная топология

О п р е д е л е н и е 8. *Базой $\mathfrak{B}$ топологии τ называется такая система множеств, что*

$$\mathfrak{B} \subset \tau,$$

причём для каждого $U \in \tau$ найдётся такая система множеств

$$\{V_\alpha : \; \alpha \in A\} \subset \mathfrak{B}, \quad \textit{что} \quad U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

О п р е д е л е н и е 9. *Топологическое пространство (X,τ) удовлетворяет первой аксиоме счётности, если в каждой точке существует конечная или счётная локальная база. Топологическое пространство (X,τ) удовлетворяет второй аксиоме счётности, если существует конечная или счётная база.*

П Р И М Е Р 9. Метризуемое топологическое пространство (X,τ) является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счётности. А пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счётности.

Пусть (X,τ) — топологическое пространство, а $A \subset X$ — это некоторое подмножество. Рассмотрим топологию на A, определённую следующим образом (она называется относительной):

$$\tau_A := \{V \cap A : \; V \in \tau\}.$$

Такое множество A вместе с введённой топологией τ_A является топологическим пространством

$$(A,\tau_A) \subset (X,\tau).$$

Лекция 9

ЗАМЫКАНИЕ. ВНУТРЕННОСТЬ. ГРАНИЦА

§ 1. Точки прикосновения и замыкание множества

Напомним, что мы определяли замкнутое множество в случае метрического пространства (X, d) как дополнение открытого. В случае общего топологического пространства (X, τ) мы дадим такое же определение.

Определение 1. *Замкнутое множество — дополнение открытого.*

Дадим определение операции замыкания множества.

Определение 2. *Замыканием $\overline{A}$ множества A называется множество*

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_{\alpha},$$

где пересечение берётся по всем замкнутым множествам $B_{\alpha} \supset A$.

Дадим определение точки прикосновения.

Определение 3. *Точкой x прикосновения множества A называется такая точка, что для любого $U \in \tau_x$ имеем $U \cap A \neq \varnothing$.*

Замечание 1. Точка прикосновения множества не обязана принадлежать самому множеству. Определение точки прикосновения является аналогом определения предельной точки в случае метрического пространства.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 1. *Операция замыкания и операция добавления всех точек прикосновения совпадают.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем, что замыкание $\overline{A}$ содержит все точки прикосновения множества A.

□ Пусть x — точка прикосновения множества A. Тогда для любого $U_x \in \tau_x$

$$U_x \cap A \neq \varnothing.$$

С другой стороны,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} B_{\alpha}, \quad A \subset B_{\alpha}. \tag{1.1}$$

Предположим, что $x \notin \overline{A}$, тогда найдётся такое замкнутое множество $B_\alpha \supset A$, что $X \backslash B_\alpha$ — открыто и $x \in X \backslash B_\alpha$. Значит, найдётся такое открытое $U_x \in X \backslash B_\alpha$, причём $x \in U_x$ и в силу (1.1) $A \notin X \backslash B_\alpha$. Следовательно, $A \cap U_x = \varnothing$. Противоречие. $\boxtimes$

Шаг 2. Докажем теперь обратное утверждение.

$\square$ Пусть теперь

$$x \in \overline{A} = \bigcap_\alpha B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha, \quad B_\alpha - \text{замкнуто},$$

но существует такая окрестность точки $x \in U_x \in \tau_x$, что $U_x \cap A = \varnothing$. Тогда,

$$A \subset X \backslash U_x - \text{замкнутое множество} \Rightarrow x \in \overline{A} \subset X \backslash U_x \quad \text{и} \quad x \in U_x.$$

Противоречие. $\boxtimes$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

(i)$_3$ $A \subset \overline{A}$; *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(ii)$_3$

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma;$$

(iii)$_3$

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A}_i.$$

Доказательство.

Шаг 1. Первые два свойства в (i)$_3$ очевидны. Рассмотрим последнее утверждение в (i)$_3$.

$\square$ Действительно,

$$\overline{A} = \bigcap_\alpha B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha - \text{замкнуто} \Rightarrow A \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть

$$\overline{A} = \bigcap_\alpha B_\alpha, \quad A \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{A} \subset B_\alpha \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \bigcap_\alpha B_\alpha = \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{A}.$$

Следовательно, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$. $\boxtimes$

Шаг 2. Докажем теперь первое свойство в (ii)$_3$.

$$A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Rightarrow \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma}.$$

Докажем теперь второе свойство в $(\mathrm{ii})_3$.

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset A_\gamma \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \overline{A_\gamma} \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}.$$

Шаг 3. Докажем свойство $(\mathrm{iii})_3$.

□ Действительно, в силу первого свойства $(\mathrm{ii})_3$ имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Предположим, что $x \notin \overline{A}_i$ для всех $i = \overline{1,n}$. Значит, найдутся такие непустые $V_{xi} \in \tau_x$, что

$$V_{xi} \cap A_i = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть

$$\varnothing \neq V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{xi} \in \tau_x,$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap V_x = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap V_x \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap V_{xi} = \varnothing.$$

Значит,

$$x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в $(\mathrm{ii})_3$ нельзя заменить вложения на равенства множеств. Действительно,

$$\overline{\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x\right)} = \mathbb{R}, \quad \text{но} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{x} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x = \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Кроме того,

$$\overline{\mathbb{Q}\cap\mathbb{J}} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \quad \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

§ 2. Замкнутые множества и замыкание множества

Как дополнения открытых, замкнутые множества обладают следующими свойствами:
Теорема 2. *Замкнутые множества обладают следующими свойствами*:
(i)$_4$ $\varnothing$ *и* X *являются замкнутыми множествами*;
(ii)$_4$ *пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством*;
(iii)$_4$ *объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Обозначим семейство всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) через φ.
Теорема 3. *Пусть* $A \subset X$. *Тогда* $\overline{A}$ *— замкнутое множество.*

Доказательство.

Пусть $x \in X \backslash \overline{A}$. Значит,

$$x \notin \overline{A} = \overline{\overline{A}}.$$

Следовательно, найдётся такое $V_x \in \tau_x$, что

$$V_x \cap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow V_x \subset X \backslash \overline{A}.$$

Следовательно,

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \in X \backslash \overline{A}} V_x \in \tau.$$

Значит, $\overline{A}$ — замкнутое множество как дополнение к открытому.

Теорема доказана.

§ 3. Внутренние точки множества

Определение 4. *Точка x множества $A \subset X$ называется внутренней точкой множества A, если существует такая её окрестность $U \in \tau_x$, что*

$$U \subset A.$$

Определение 5. *Внутренностью* $\operatorname{int} A$ *множества* $A \subset X$ *называется совокупность всех внутренних точек множества* A.

Справедливы следующие свойства *внутренности* множеств.
Теорема 4. *Имеет место следующее равенство*:

$$\operatorname{int} A = X \backslash \left(\overline{X \backslash A} \right).$$

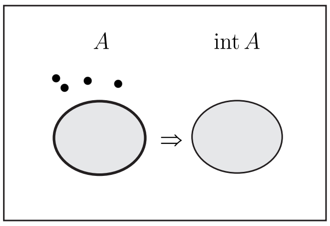

Рис. 24. Внутренность множества A.

Доказательство.

Для любой точки $x \in A$ реализуется одна из возможностей: существует такая окрестность $U_x \in \tau_x$, что $U_x \subset \operatorname{int} A$, либо всякая окрестность $U_x \in \tau_x$ не содержится целиком в $\operatorname{int} A$. Значит, в последнем случае

$$U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad U_x \in \tau_x,$$

но тогда

$$x \in \overline{X \backslash A} \Rightarrow X = \operatorname{int} A \cup \overline{X \backslash A} \Rightarrow \operatorname{int} A = X \backslash \left(\overline{X \backslash A} \right).$$

Теорема доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Справедливы следующие свойства внутренностей множеств*:

(i)$_5$ $\operatorname{int} A \subset A, \quad A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B, \quad \operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A;$

(ii)$_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \right) \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma, \quad \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma;$$

(iii)$_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i.$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем утверждения (i)$_5$. Первые два свойства очевидны. Докажем, что $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$.

☐ Действительно, $\operatorname{int}\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} A$. Пусть $x \in \operatorname{int} A$, тогда найдется такое $U_x \in \tau_x$, что $x \in U_x \subset A$. Поскольку все точки $y \in U_x$ внутренние, то $x \in U_x \subset \operatorname{int} A$. Следовательно, $x \in \operatorname{int}\operatorname{int} A$. ⊠

Шаг 2. Докажем утверждения (ii)$_5$.

☐ Действительно,

$$A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Rightarrow \operatorname{int} A_\gamma \subset \operatorname{int} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Rightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma \subset \operatorname{int} \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset A_\gamma \Rightarrow \operatorname{int} \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset \operatorname{int} A_\gamma \Rightarrow \operatorname{int} \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Докажем утверждение $(\mathrm{iii})_5$.

$\square$ Действительно, в силу результата шага 2 осталось доказать вложение

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i \subset \operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Пусть

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i \Rightarrow \exists\, U_{xi} \in \tau_x,\ x \in U_{xi} \subset A_i.$$

Следовательно,

$$x \in V_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{xi} \in \tau_x, \quad x \in V_x \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 4. Граница множества

Определение 6. *Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества A, если для любого $U \in \tau_x$ имеем*

$$A \cap U \neq \varnothing, \quad (X \backslash A) \cap U \neq \varnothing.$$

При этом множество всех граничных точек множества A обозначается как ∂A.

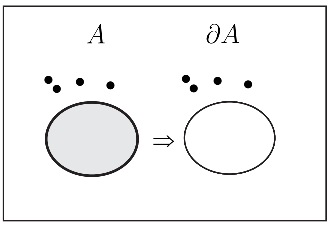

Рис. 25. Граница множества A.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Справедливо следующее представление*:

$$A = \operatorname{int} A \cup \partial A, \quad \operatorname{int} A \cap \partial A = \varnothing,$$

причём ∂A — это замкнутое множество.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $x \in A$. Очевидно, что

$$\text{либо} \quad x \in \operatorname{int} A \quad \text{либо} \quad x \in X \setminus \operatorname{int} A.$$

Причём $\operatorname{int} A$ — открытое множество, а $X \setminus \operatorname{int} A$ — замкнутое множество. Если $x \in X \setminus \operatorname{int} A$, тогда имеют место следующие свойства:

1. для всех $U_x \in \tau_x$ имеем $U_x \cap A \neq \varnothing$ (поскольку $x \in A$);
2. для всех $U_x \in \tau_x$ имеем $U_x \cap (X \setminus \operatorname{int} A) \neq \varnothing$.

В силу свойства 2 имеем $U_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

☐ Действительно, в противном случае найдется $U_x \in \tau_x$ такое, что

$$U_x \subset A \Rightarrow U_x \subset \operatorname{int} A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A.$$

Пришли к противоречию с тем, что $x \in X \setminus \operatorname{int} A$. ⊠

Значит, $x \in \partial A$. Кроме того, из доказательства вытекает, что

$$\partial A \cap \operatorname{int} A = \varnothing, \quad A = \partial A \cup \operatorname{int} A.$$

Шаг 2. Докажем теперь, что множество ∂A замкнуто.

☐ Действительно, докажем, что множество $X \setminus \partial A$ открыто. Если $x \in X \setminus \partial A$, то найдется такое $\varnothing \neq U_x \in \tau_x$, что

$$\text{либо} \quad U_x \cap A = \varnothing \quad \text{либо} \quad U_x \cap (X \setminus A) = \varnothing.$$

В первом случае имеем

$$x \in U_x \subset X \setminus A \subset X \setminus \partial A \Rightarrow X \setminus \partial A - \text{открыто}.$$

Поскольку $\partial A \cap \operatorname{int} A = \varnothing$ во втором случае имеем

$$x \in U_x \subset \operatorname{int} A \subset X \setminus \partial A \Rightarrow X \setminus \partial A - \text{открыто}. \quad ⊠$$

Лемма доказана.

§ 5. Всюду плотные множества

Определение 7. *Множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если*

$$\overline{A} = X.$$

Определение 8. *Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если*

$$\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 6. *Для того чтобы множество $A \subset X$ было нигде не плотным, необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого множества $U \in \tau$ нашлось непустое подмножество $V \subset U$ и $V \in \tau$, что*

$$A \cap V = \varnothing.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть $A \subset X$ и нигде не плотно и $U \in \tau$ — непустое множество. Пусть

$$V = U \backslash \overline{A},$$

тогда

$$\text{либо} \quad V = \varnothing \quad \text{либо} \quad V \subset U \quad \text{и} \quad V \cap A = \varnothing.$$

1. Докажем, что $V \in \tau$. Действительно, справедливо следующее представление:

$$V = U \backslash \overline{A} = U \cap (X \backslash \overline{A}),$$

но $U \in \tau$, $\overline{A}$ — замкнуто и тогда $X \backslash \overline{A}$ — открыто. Стало быть, V — открыто.

2. Теперь поскольку $\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing$, то $U \not\subset \overline{A}$, значит,

$$V = U \backslash \overline{A} \neq \varnothing.$$

Причём по построению $V \cap A = \varnothing$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть выполнено достаточное условие теоремы. Предположим, что при этом

$$\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing,$$

тогда

$$\exists U = \operatorname{int} \overline{A}, \quad \forall V \subset U \subset \overline{A}, \quad V \in \tau$$

имеем

$$A \cap V \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad V \subset U, \quad V \in \tau,$$

поскольку $\overline{A}$ содержит все свои точки прикосновения. Противоречие.

Теорема доказана.

Лемма 3. *Множество $A \subset X$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда множество $X \backslash \overline{A}$ всюду плотно.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть A нигде не плотно и $x \in X$. Докажем, что $x \in \overline{X \backslash \overline{A}}$. Надо доказать, что для всех $U_x \in \tau_x$

$$U_x \cap \left(X \backslash \overline{A}\right) \neq \varnothing.$$

Предположим противное, тогда найдётся такое $U_x \neq \varnothing$, что

$$U_x \cap \left(X \backslash \overline{A}\right) = \varnothing \Rightarrow U_x \subset \operatorname{int} \overline{A} = \varnothing.$$

Противоречие. Значит, x — точка прикосновения множества $X\backslash\overline{A}$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $X\backslash\overline{A}$ всюду плотно в X. Докажем, что $\operatorname{int}\overline{A} = \varnothing$. Пусть нет и найдётся $U \in \tau$ такое, что $U \subset \operatorname{int}\overline{A} \subset \overline{A}$, но тогда

$$U \cap X\backslash\overline{A} = \varnothing.$$

Заметим, что согласно определению всюду плотного множества все точки X являются точками прикосновения для множества $X\backslash\overline{A}$. Поэтому для всякого $U \in \tau$ должно быть

$$U \cap X\backslash\overline{A} \neq \varnothing.$$

Теорема доказана.

Дополнительная лекция 2

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Непрерывность по Коши и по Хайне

Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — это два топологических пространства и f — это отображение множества X_1 во множество X_2.

Дадим определение непрерывности по Коши отображения.

Определение 1. *Отображение*

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) *и* (X_2, τ_2) *называется непрерывным по Коши в точке* $x \in X_1$, *если для всякой окрестности* $U_2 \in \tau_2$ *точки* $f(x) \in U_2$ *найдётся такая окрестность* $U_1 \in \tau_1$ *точки* $x \in U_1$, *что имеет место вложение* $f(U_1) \subset U_2$.

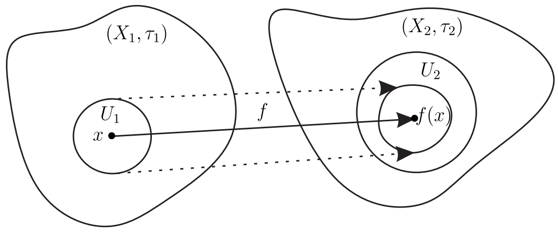

Рис. 26. Непрерывная по Коши функция f.

Напомним определение непрерывности по Хайне отображения двух метрических пространств (Y_1, d_1) и (Y_2, d_2).

Определение 2. *Функция*

$$f(y) : (Y_1, d_1) \to (Y_2, d_2)$$

называется непрерывной по Хайне в точке $y_0 \in Y_1$, *если для произвольной последовательности* $\{y_n\} \subset Y_1$, *сходящейся в метрическом пространстве* (Y_1, d_1) *к* y_0, *соответствующая последовательность* $\{f(y_n)\} \subset Y_2$ *является сходящейся в метрическом пространстве* (Y_2, d_2) *к* $f(y_0)$.

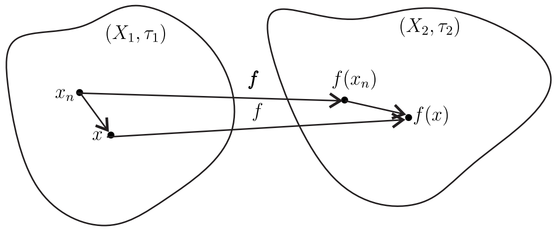

Рис. 27. Непрерывная по Хайне функция f.

Однако если ввести понятие сходящейся последовательности в топологическом пространстве (X, τ), то можно ввести и определение непрерывности по Хайне и в топологическом пространстве.

Дадим определение сходящейся последовательности.

Определение 3. *Последовательность* $\{x_n\} \subset X$ *называется сходящейся к точке* $x_0 \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ), *если для всякой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *найдётся такое* $N \in \in \mathbb{N}$, *что для всех* $n \geqslant N$ *имеем* $x_n \in U(x_0)$. *В этом случае мы пишем*

$$x_n \xrightarrow{\tau} x_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь дадим определение непрерывности по Хайне.

Определение 4. *Отображение*

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) *и* (X_2, τ_2) *называется непрерывным по Хайне в точке* $x_0 \in X_1$, *если для произвольной последовательности* $\{x_n\} \subset X_1$, *сходящейся к* x_0 *в топологическом пространстве* (X_1, τ_1), *соответствующая последовательность* $\{f(x_n)\} \subset X_2$ *сходится к точке* $f(x_0) \in X_2$ *в топологическом пространстве* (X_2, τ_2).

Совершенно не трудно показать, что из непрерывности по Коши вытекает непрерывность по Хайне. Однако обратное утверждение, вообще говоря, не выполнено. По смыслу непрерывность по Хайне — это секвенциальная непрерывность, а для получения эквивалентного определения непрерывности в смысле сходимости нужно обощение понятия последовательности — понятие направленности. Поэтому для того чтобы ввести понятие такой сходимости, которое бы давало бы в результате определение непрерывности эквивалентное определение непрерывности по Коши нужно ввести ряд новых понятий.

§ 2. Направленность

Определение 5. *Говорят, что на множестве* X *задан частичный порядок, или что множество* X *частично упорядоченно*, *если выделено некоторое семейство пар* $(x, y) \in \mathcal{P} \subset X \otimes X$, *для которых пишут* $x \leqslant y$, *причём для порядка* «$\leqslant$» *выполнены следующие свойства*:

(i) $x \leqslant x$;

(ii) *если* $x \leqslant y$ *и* $y \leqslant x$, *то* $x = y$;

(iii) *если* $x \leqslant y$ *и* $y \leqslant z$, *то* $x \leqslant z$.

Замечание 1. Знак $\leqslant$ может не иметь ничего общего со знаком сравнения вещественных чисел. Знак равенства $=$ в свойстве (ii) — это знак равенства множеств.

Замечание 2. Отметим, что в третьей лекции нами был введено определение отношения эквивалентности $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$, которое не упорядочивает множество, а лишь определяет принцип по которому элементы множества множества можно считать эквивалентными.

Вторые свойства отношения эквивалентности $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$ и частичного порядка $\leqslant$ разные. Так, если $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$, то и $y \overset{\mathcal{L}}{\sim} x$. Однако если $x \leqslant y$, то, вообще говоря, нельзя сказать, что и $y \leqslant x$. Так будет только в том случае, если эти два элемента совпадают.

ПРИМЕР 1. На множестве $\mathcal{L}(X, \mu)$ измеримых и интегрируемых по Лебегу функций можно ввести отношение эквивалентности

$$f(x) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(x) = \{f(x) = g(x) \text{ для почти всех } x \in X\},$$

а можно ввести частичный порядок

$$f(x) \leqslant g(x) = \{f(x) \leqslant g(x) \text{ для почти всех } x \in X\}.$$

Терминологическая разница понятна.

ПРИМЕР 2. На плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^1$, которая, конечно, сама по себе не упорядочена, можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$x = (x_1, x_2) \leqslant y = (y_1, y_2) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

если выполнены неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$. Заметим, что при такой частичной упорядоченности имеется место следующее свойство: для всех $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ найдётся третья точка $z = (z_1, z_2)$ такая, что имеет место упорядоченность

$$x \leqslant z \quad \text{и} \quad y \leqslant z.$$

Дадим определение *направленного множества.*

Определение 6. *Множество* A *называется направленным, если на нем введена частичная упорядоченность* «$\leqslant$», *причём таким образом, что для любых* $x, y \in \mathrm{A}$ *найдётся третий элемент* $z \in \mathrm{A}$ (*не обязательно отличный от x, y*) *такой, что*

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant z.$$

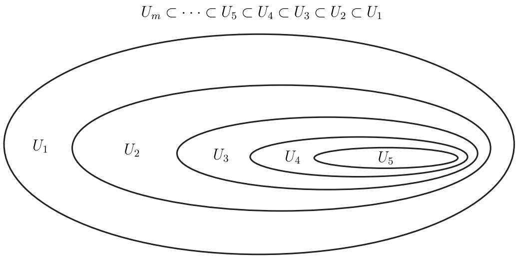

Рис. 28. Направленное множество $A = \{U_n\}$, упорядоченное по операции включения «$U \subset V$».

Теперь мы можем дать определение *направленности*, обобщающей понятие последовательности.

Определение 7. *Множество элементов* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *индексируемое направленным множеством* A, *называется* *направленностью*.

Дадим определение сходящейся направленности.

Определение 8. *Направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$ *называется сходящейся к элементу* $x_0 \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ), *если для всякой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *найдётся такой элемент* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, *что для всех элементов* $\alpha \in \mathrm{A}$ *таких, что* $\alpha_0 \leqslant \alpha$, *имеем* $x_\alpha \in U(x_0)$.

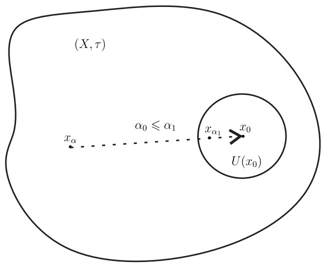

Рис. 29. Сходимость направленности $\{x_\alpha\}$.

Наконец, мы можем доказать результат об эквивалентности непрерывности по Коши и непрерывности по Хайне в смысле направленностей.

Теорема 1. *Для того чтобы отображение*

$$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

было непрерывным в точке $x \in X_1$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящейся к* x *в топологическом пространстве* (X_1, τ_1), *соответствующая направленность* $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходилась к точке* $f(x) \in X_2$ *в топологическом пространстве* (X_2, τ_2).

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in X_1$. Пусть V — это окрестность точки $f(x)$, тогда найдётся такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная направленность, сходящаяся к x. Выберем элемент $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ таким образом, чтобы $x_\alpha \in U$ при $\alpha_0 \leqslant \alpha$, но тогда $f(x_\alpha) \in \in f(U) \subset V$, т. е. направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ сходится к $f(x)$.

Шаг 2. Достаточность. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Действительно, пусть V — это окрестность точки $f(x)$.

1. Выберем направленное множество следующим образом. Пусть ν_x — это ФСО точки x, частично упорядоченное следующим образом: для $U_1, U_2 \in \nu_x$ пишем $U_1 \leqslant U_2$, если $U_2 \subset U_1$. Ясно, что ν_x с указанным порядком является направленным множеством.

□ Действительно, нужно лишь проверить, что для любых окрестностей $U_1, U_2 \in \nu_x$ найдётся третья $U_3 \in \nu_x$, что

$$U_3 \subset U_1, \quad U_3 \subset U_2.$$

Это следствие того, что $U_1 \cap U_2 \in \tau_x$ и, следовательно, по определению ФСО найдётся $U_3 \in \nu_x$ такое, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. ⊠

2. Предположим, что для каждого $U \in \nu_x$ найдётся такая точка $x_U \in U$, что $f(x_U) \notin V$. Теперь для каждого $U \in \nu_x$ мы выберем такую точку $x_U \in U$. Таким образом, мы построили направленность $\{x_U\}_{U \in \nu_x}$, которая сходится к точке x. Докажем это.

□ Действительно, пусть U_0 — это окрестность точки x (т. е. $U_0 \in \in \nu_x$), тогда для всякого $U \in \nu_x$ такого, что $U_0 \leqslant U$, имеем по построению $x_U \in U \subset U_0$. ⊠

Но при этом по построению направленность $\{f(x_U)\}_{U \in \mathfrak{U}}$ не сходится к точке $f(x)$.

Значит, наше предположение не верно, т. е. для всякой окрестности V точки $f(x)$ найдётся такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$.

Теорема доказана.

§ 3. Хаусдорфовы топологические пространства

Определение 9. *Топологическое пространство (X, τ) называется хаусдорфовым или отделимым, если для любых двух точек $x \neq y$ найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$, т. е. $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.*

ПРИМЕР 3. Всякое метрическое пространство является хаусдорфовым. Действительно, пусть $x \neq y$ и $x, y \in X$ и $d = d(x, y)$ метрика. Пусть $d_0 = d(x, y) > 0$. Рассмотрим окрестности

$$O(x, d_0/4) = \{z \in X : \ d(z, x) < d_0/4\},$$

$$O(y, d_0/4) = \{z \in X : \ d(z, y) < d_0/4\}.$$

Докажем, что эти окрестности не пересекаются.

□ Действительно, пусть верно противное:

$$z \in O(x, d_0/4) \cap O(y, d_0/4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_0 = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{d_0}{4} + \frac{d_0}{4} = \frac{d_0}{2}. \quad \boxtimes$$

ПРИМЕР 4. Приведём пример нехаусдорфова топологического пространства. Рассмотрим множество

$$X = \{0,1\}, \quad \tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}.$$

Таким образом, в топологию τ не входит множество $\{1\}$. Тогда у точек $\{0\}$ и $\{1\}$ все их окрестности пересекаются.

□ Действительно, у точки $\{0\}$ их две — это $\{0\}$ и X. У точки $\{1\}$ окрестность одна — это X. Итак,

$$\{0\} \cap X = \{0\}, \quad X \cap X = X. \quad \boxtimes$$

Важное свойство хаусдорфовых пространств в том, что всякая сходящаяся направленность (в частности, последовательность) имеет единственный предел.

Теорема 2. *Для того чтобы топологическое пространство (X, τ) было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы всякая сходящаяся направленность имела единственный предел.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная сходящаяся к точке x и к точке y направленность. Докажем, что $x = y$. Пусть нет, тогда найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Поскольку направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ является сходящейся к x, то для окрестности $U(x)$ найдётся такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(x).$$

Аналогичным образом найдётся такое $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_2 \leqslant \alpha$, имеем

$$x_\alpha \in U(y).$$

Поскольку множество A является направленным, то для α_1 и α_2 найдётся такое α_3, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3.$$

Поэтому

$$x_{\alpha_3} \in U(x) \cap U(y) = \varnothing.$$

Противоречие. Следовательно, $x = y$ в силу хаусдорфовости.

Шаг 2. Достаточность. Пусть топологическое пространство (X, τ) не является хаусдорфовым. Тогда найдутся такие две его точки $x \neq y$, что любые их окрестности $U(x)$ и $U(y)$ соответственно имеют непустое пересечение:

$$U(x) \cap U(y) \neq \varnothing.$$

1. Рассмотрим направленное множество $\mathfrak{U}$, состоящее из пар $(U(x), U(y))$ окрестностей (ФСО) ν_x и ν_y точек x и y, частично упорядоченное следующим образом:

$$\alpha_1 = (U_1(x), U_1(y)) \leqslant \alpha_2 = (U_2(x), U_2(y)),$$

если

$$U_2(x) \subset U_1(x) \quad \text{и} \quad U_2(y) \subset U_1(y).$$

Ясно, что множество $\mathfrak{U}$ является направленным, поскольку свойство направленности очевидно.

2. Поскольку $U(x) \cap U(y) \neq \varnothing$, то можно выделить направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ как $x_U \in U(x) \cap U(y)$, когда множества $U(x)$ и $U(y)$ пробегают все окрестности этих точек. Докажем, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Действительно, для всякой окрестности $U_0(x)$ найдётся $U(x)$ такое, что

$$x_U \in U(x) \subset U_0(x) \quad \text{при} \quad U_0 \leqslant U.$$

Значит, направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Аналогичным образом доказывается, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к y. Поскольку в силу единственности предела $x = y$, то мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы множество B топологического пространства (X, τ) было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset B$, сходящейся к x, имело место $x \in B$.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть B замкнуто ($\overline{B} = B$) и $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset$ $\subset B$, причём

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x.$$

Тогда для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ найдётся $\alpha_0 \in A$, что для всех $\alpha \in A : \alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U_x \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B} = B.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset B$, причём

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \in B.$$

Тогда для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что для всех $\alpha \in A : \alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U_x \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}.$$

Стало быть, $B = \overline{B}$.

Теорема доказана.

Дополнительная лекция 3

ПОДНАПРАВЛЕННОСТЬ

§ 1. Предельные точки направленностей. Поднаправленности

Определение 1. *Направленность* $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ *называется поднаправленностью направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, *если существует такое отображение*

$$\pi : \mathrm{B} \to \mathrm{A},$$

что $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$, *причём для каждого* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ *найдётся такое* $\beta_0 \in \mathrm{B}$, *что*

$$\alpha_0 \leqslant \pi(\beta) \quad \textit{при всех} \quad \beta \in B: \quad \beta_0 \leqslant \beta.$$

Замечание 1. Обсудим определение поднаправленности.

1. Свойство $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$ означает, что $\{y_\beta\}_{\beta\in B} \subset \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

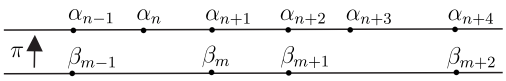

Рис. 30. Отображение π.

2. Свойство, что для любого $\alpha_0 \in A$ найдётся такое $\beta_0 \in B$, что $\alpha_0 \leqslant \pi(\beta)$ для всех $\beta \in B$ таких, что $\beta_0 \leqslant \beta$ означает, что направленное множество B при отображении π сохраняет частичный порядок $\leqslant$ направленного множества A.

ПРИМЕР 1. В частном случае, когда $A = \mathbb{N}$ и $B \subset \mathbb{N}$ — упорядочены знаком $\leqslant$ и B счётное подмножество, мы имеем дело с определением подпоследовательности.

Определение 2. *Говорят, что направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *часто бывает во множестве* $E \subset X$, *если для всякого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *найдётся такой индекс* $\alpha' \in \mathrm{A}$, *для которого* $\alpha \leqslant \alpha'$ *и* $x_{\alpha'} \in E$.

Определение 3. *Точка* $x \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ) *называется предельной точкой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, *если эта направленность часто бывает в любой окрестности* $U(x)$ *точки* x.

Замечание 2. Дадим сначала определение предельной точки множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$:

точка x называется предельной точкой множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, если в любой окрестности $U(x)$ точки x есть хотя бы одна точка x_α отличная от x.

Теперь определение предельной точки направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

точка x называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ этой точки x.

Ясно, что если $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — это направленность, то не всякая предельная точка этого множества является предельной точкой этой направленности.

§ 2. Теорема о предельной точке направленности

Теорема 1. *Точка $x \in X$ в топологическом пространстве (X, τ) является предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ тогда и только тогда, когда существует поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, сходящаяся к точке x.*

Доказательство.

Необходимость. Итак, пусть x есть предельная точка направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

1. Рассмотрим ФСО ν_x точки x. Значит, для всякой окрестности $U \in \nu_x$ найдётся такое $\alpha \in \mathrm{A}$, что $x_\alpha \in U$. Поэтому можно ввести направленное множество B, состоящее из пар (α, U) таких, что при $\alpha \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in U \in \nu_x$.

Замечание 3. Отметим, что мы по каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ выбираем элемент α из направленного множества A.

Упорядочим множество B следующим образом:

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U), \quad \text{если} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad U_1 \supset U.$$

Ясно, что для любых пар

$$(\alpha_1, U_1),\ (\alpha_2, U_2) \in \mathrm{B}$$

найдётся пара $(\alpha_3, U_3) \in \mathrm{B}$, для которой

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha_3, U_3), \quad (\alpha_2, U_2) \leqslant (\alpha_3, U_3).$$

□ Действительно, свойство, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ найдётся такое $\alpha_3 \in \mathrm{A}$, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3,$$

следует из того, что множество A — направленное (см. определение 14). Наконец, то, что для любых $U_1, U_2 \in \nu_x$ найдётся $U_3 \in \nu_x$, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ вытекает из определения базиса окрестности ν_x. ⊠

Итак, множество B пар (α, U) является направленным множеством.

2. Теперь мы можем определить поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$, где $\beta = (\alpha, U) \in \mathrm{B}$, как $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha$.

Проверим, что это действительно поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$.

□ Действительно, это следствие того, что в данном случаем отображение π имеет следующий вид:

$$\pi : (\alpha, U) \to \alpha.$$

Проверим, что отображение π сохраняет порядок $\leqslant$, заданный на множестве A. Для заданного $\alpha_0 \in A$ найдётся $\beta_0 = (\alpha_0, X) \subset B$, что для всех $\beta \in B$ при $\beta_0 \leqslant \beta$ имеем $\alpha_0 \leqslant \pi(\beta)$, поскольку при таких $\beta = (\alpha, U)$ имеет место $\alpha_0 \leqslant \alpha = \pi(\beta)$, поскольку всегда $U \subset X$. ⊠

Докажем теперь, что поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in \mathrm{B}}$ сходится к точке x.

□ Действительно, для любой окрестности $U_1(x) \in \nu_x$ найдётся такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что $x_{\alpha_1} \in U_1(x)$. Тогда для всех (α, U) таких, что $(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U)$, имеем

$$x_\alpha = y_{(\alpha,U)} \in U \subset U_1.$$

Итак, построенная поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in \mathrm{B}}$ сходится к x. ⊠

Достаточность. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — это направленность и $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ — заданная поднаправленность, которая, очевидно, тоже является направленностью и к тому же сходящейся к точке x.

Следовательно, направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ часто бывает в любой окрестности точки x. Стало быть, x — это предельная точка и направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Теорема доказана.

§ 3. Теорема о компактности

Дадим определение компактного множества в топологическом пространстве (X, τ).

Определение 4. *Множество $K \subset X$ топологического пространства (X, τ) называется компактным, если из любого покрытия этого множества*

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in \mathrm{A}} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$K \subset \bigcup_{\alpha_i} U_{\alpha_i} \quad \textit{при} \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 2. *Топологическое хаусдорфово пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда всякая бесконечная направленность имеет предельную точку.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть (X, τ) компактно и хаусдорфово и $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — бесконечная направленность.

Докажем, что *найдётся такая точка* $x \in X$, *что* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *часто бывает в любой окрестности* $x \in U_x \in \tau$.

□ Пусть нет. Тогда для каждой точки $x \in X$ найдётся такая её окрестность $U_x \in \tau$ и такой индекс $\alpha_x \in A$, что для всех $\alpha \in A$, $\alpha_x \leqslant \alpha$ и $x_\alpha \notin U_x$. Тогда для каждой точки $x \in X$ выберем указанную окрестность $U_x \in \tau_x$. В этом случае в силу компактности (X, τ) имеем

$$X = \bigcup_{x\in X} U_x \Rightarrow \exists i = \overline{1, n}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

По определению U_{x_i} найдется такой индекс $\alpha_{x_i} \in A$, что для всех $\alpha \in A$ таких, что $\alpha_{x_i} \leqslant \alpha$ имеем $x_\alpha \notin U_{x_i}$. В силу определения направленного множества A найдётся такой индекс α_0, мажорирующий все индексы $\alpha_{x_i} \in A$

$$\alpha_{x_1} \leqslant \alpha_0, ..., \alpha_{x_n} \leqslant \alpha_0,$$

что для всех $\alpha \in A$ с $\alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \Rightarrow x_\alpha \notin X.$$

Противоречие. ⊠

Достаточность. Предположим, что всякая бесконечная направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ имеет предельную точку. Докажем, что хаусдорфово пространство (X, τ) компактно.

□ Действительно, пусть

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$

Предположим, что не существует такого конечного набора $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Стало быть, для каждого конечного набора $t = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$ найдётся такая точка

$$x_t \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}. \tag{3.1}$$

Таким образом,

1. мы получаем новое множество индексов $T = \{t\}$, которое является частично упорядоченным по включению

$$t_1 \leqslant t_2, \quad \text{если} \quad t_2 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset t_1 = \{\beta_1, ..., \beta_m\};$$

по этому частичному порядку множество индексов T является направленным множеством;

2. мы построили направленность $\{x_t\}_{t\in T}$, обладающую тем свойством, что для каждого $t = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in T$ найдутся такие окрестности U_{α_i}, что выполнено свойство (3.1);

3. по условию эта направленность имеет поднаправленность $\{x_s\}_{s\in S}$, сходящуюся к некоторому $x \in X$.

Выберем такой индекс $\alpha_0 \in A$, что $x \in U_{\alpha_0}$. Стало быть, в силу сходимости поднаправленности $\{x_s\}_{s\in S}$ найдётся такой индекс $s_0 \in S$, что для всякого $s_1 \in S$, такого что $s_0 \leqslant s_1$ и $\{\alpha_0\} \leqslant s_1$ одновременно имеет место вложение

$$x_{s_1} \in U_{\alpha_0}.$$

Заметим, что индекс $\alpha_0 \in A$ как одноэлементное множество $\{\alpha_0\} \in T$ при этом по включению $\{\alpha_0\} \subset s_1$. По определению направленного множества индексов T индекс $s_1 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in S \subset T$, причём некоторый индекс $\alpha_i = \alpha_0$ и при этом

$$x_{s_1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow x_{s_1} \notin U_{\alpha_0}.$$

Противоречие. ⊠

Теорема доказана.

Тематическая лекция IV

ВЕКТОРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 10

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Линейные функционалы

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Пусть $\mathfrak{L}$ — это линейное пространство над полем K вещественных либо комплексных чисел.

Рассмотрим множество всех линейных функционалов над линейным пространством $\mathfrak{L}$.

Определение 1. *Линейным функционалом f над линейным пространством $\mathfrak{L}$ называется произвольное линейное отображение:*

$$f : \mathfrak{L} \to \mathbb{K},\ f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),\ x_1, x_2 \in \mathfrak{L},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.$$

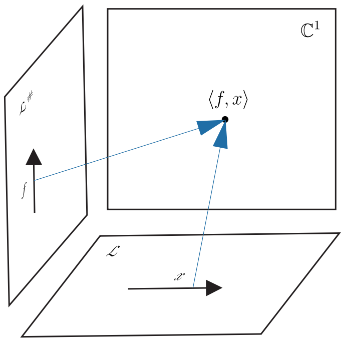

Рис. 31. Скобки двойственности.

Ясно, что это множество, которое мы обозначим через

$$\mathfrak{L}^{\#},$$

также является линейным пространством над тем же полем, если положить

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x). \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение так называемые скобки двойственности.

Вместо того, чтобы обозначать действие линейного функционала $f \in \mathcal{L}^{\#}$ на элементе $x \in \mathcal{L}$ как $f(x)$, нам удобно ввести следующее новое обозначение:

$$\langle f, x\rangle : \mathcal{L}^{\#} \otimes \mathcal{L} \to \mathbb{C}^1 \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^1.$$

Отметим, что скобка двойственности $\langle f, x\rangle$ является билинейным функционалом своих аргументов.

□ Действительно, это следствие того, что

1. Функционал $f \in \mathcal{L}^{\#}$ является линейной функцией на линейном пространстве $\mathcal{L}$, что в старых обозначениях записывается как

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathcal{L}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.$$

2. С учетом определения (1.1) линейные функционалы $\mathcal{L}^{\#}$ сами образуют линейное пространство. ⊠

Возникает вопрос о существовании линейных функционалов и о размерности этого пространства. В конечномерном случае справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_n$ — n-мерное линейное пространство с базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда пространство $\mathcal{L}_n^{\#}$ тоже n-мерно и возможный базис этого пространства определяется следующими линейными функционалами $\{e^{*j}\}_{j=1}^n$:*

$$\left\langle e^{*j}, e_i\right\rangle := \delta_i^j. \tag{1.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что формулы (1.2) действительно задают линейные функционалы. Итак,

$$\left\langle e^{*j}, x\right\rangle = x^j, \quad x = x^i e_i\ ^{1)},$$

$$\left\langle e^{*j}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right\rangle = \alpha_1 x_1^j + \alpha_2 x_2^j = \alpha_1 \left\langle e^{*j}, x_1\right\rangle + \alpha_2 \left\langle e^{*j}, x_2\right\rangle.$$

Шаг 2. Докажем, теперь, что набор линейных функционалов $\{e^{*j}\}$ образует базис пространства $\mathcal{L}_n^{\#}$.

□ Действительно, докажем линейную независимость. Пусть $\{\beta_j\}_{j=1}^n$ — произвольный набор комплексных чисел. Тогда

$$\beta_j e^{*j} = \vartheta^* \Leftrightarrow 0 = \langle \beta_j e^{*j}, e_i\rangle = \beta_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad ⊠$$

Теперь докажем, что это максимальный набор линейно независимых линейных функционалов.

□ Предположим, что существует еще один линейный функционал e^{*0}, линейно независимый вместе с набором $\{e^{*j}\}_{j=1}^n$. Рассмотрим следующее выражение:

$$x = x^i e_i, \quad \left\langle e^{*0}, x\right\rangle := \gamma_i x^i, \quad \gamma_i := \langle e^{*0}, e_i\rangle.$$

---

[1]) Мы пользуемся обозначениями Эйнштейна.

Предположим, что линейный функционал e^{*0} не нулевой. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\gamma_1 \neq 0$. Рассмотрим следующее равенство:

$$c_0 e^{*0} + \sum_{j=1}^{n} c_j e^{*j} = \vartheta^* \Rightarrow \left\langle c_0 e^{*0} + \sum_{j=1}^{n} c_j e^{*j}, x \right\rangle = 0,$$

$$(c_0\gamma_i + c_i)x^i = 0 \quad \text{для всех} \quad \{x^i\}_{i=1}^n \Rightarrow c_0 = -\frac{c_1}{\gamma_1}, \quad c_1 \neq 0.$$

Стало быть, имеет место равенство

$$e^{*0} = -\gamma_1 e^{*1} - \frac{\gamma_1}{c_1} \sum_{j=2}^{n} c_j e^{*j}, \quad \gamma_1 \neq 0.$$

Следовательно, набор функционалов $\{e^{*0}, e^{*j}\}_{j=1}^n$ является линейно зависимым. Наше предположение неверно. ⊠

В частности, отсюда вытекает, что пространство линейных функционалов над n–мерным линейным пространством n–мерно.

Теорема доказана.

§ 2. Определение векторного топологического пространства (ВТП)

Начнем со следующего определения.

Определение 2. *Векторное пространство X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, на котором задана топология τ, называется векторным топологическим пространствам (X, τ), если операции сложения элементов и умножения элемента на число являются непрерывными отображениями из (X, τ) в (X, τ).*

Рассмотрим поподробнее это определение. Прежде всего отметим, что можно ввести понятие декартова произведения топологических пространств $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2)$ как топологическое пространство (X, τ), где

$$X = X_1 \times X_2, \quad \tau = \tau_1 \times \tau_2,$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) : \; x_1 \in X_1, \; x_2 \in X_2\},$$

$$\tau = \tau_1 \times \tau_2 = \{(U_1, U_2) : \; U_1 \in \tau_1, \; U_2 \in \tau_2\}.$$

Требует расшифровки непрерывность отображения

$$F_1(x, y) : (X, \tau) \times (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{2.1}$$

задаваемое как $F_1(x, y) = x + y$, а также непрерывность отображения

$$F_2(\lambda, x) : \big(\mathbb{C}^1, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\big) \times (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{2.2}$$

задаваемое как $F_2(\lambda, x) = \lambda \cdot x$.

1. Непрерывность $F_1(x, y)$ означает, что для всякой окрестности V_{x+y} точки $x + y$ найдутся такие окрестности U_x и U_y, что $F_1(U_x, U_y) = U_x + U_y \subset V_{x+y}$.

2. Непрерывность отображения $F_2(\lambda, x)$ означает, что для любой окрестности $V_{\lambda \cdot x}$ точки $\lambda \cdot x \in X$ найдутся такие окрестности $U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ и U_x точек $\lambda \in \mathbb{C}^1$ и $x \in X$ соответственно, что $F_2(U_\lambda, U_x) = \mu \cdot U_x \subset V_{\lambda \cdot x}$ при всех $\mu \in U_\lambda$.

ПРИМЕР 1. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^1, d(x, y) = |x - y|)$ является векторным топологическим над полем $\mathbb{R}^1$. Докажем, что выполнены условия непрерывности отображений $F_1(x, y)$ и $F_2(\lambda, x)$.

□ Непрерывность $F_1(x, y)$. Действительно, непрерывность по Коши в данном случае эквивалентна непрерывности по Хайне. Пусть

$$x_n \xrightarrow{d} x, \quad y_m \xrightarrow{d} y,$$

$$d(F_1(x_n, y_m), F_1(x, y)) = |x_n - x - y + y_m| \leqslant |x - x_n| + |y - y_m| \to +0$$

при $n \to +\infty$ и при $m \to +\infty$. ⊠

□ Непрерывность $F_2(x, y)$. Действительно, пусть

$$\lambda_n \to \lambda, \quad x_m \xrightarrow{d} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_0(F_2(\lambda_n, x_m), F_2(\lambda, x)) \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda_n x_m - \lambda x| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_n - \lambda||x_m| + \lambda|x_m - x| \to +0$$

при $n \to +\infty$ и $m \to +\infty$. ⊠

ПРИМЕР 2. Метрическое пространство $L(X, \mu)$ классов интегрируемых по Лебегу измеримых функций относительно метрики

$$d(\{f\}, \{g\}) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\, d\mu$$

является векторным топологическим пространством над полем $\mathbb{R}^1$.

□ Непрерывность $F_1(\{f\}, \{g\})$. Действительно, пусть

$$\{f_n(x)\} \xrightarrow{d} \{f(x)\}, \quad \{g_m(x)\} \xrightarrow{d} \{g(x)\},$$

$$d(F_1(\{f\}, \{g\}), F_1(\{f_n\}, \{g_m\})) =$$
$$= d(\{f\} + \{g\} - \{f_n\} - \{g_m\}) =$$
$$= \int\limits_X |f(x) + g(x) - f_n(x) - g_m(x)|\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X |f(x) - f_n(x)|\, d\mu + \int\limits_X |g(x) - g_m(x)|\, d\mu \to +0$$

при $n, m \to +\infty$. $\boxtimes$

$\square$ Непрерывность $F_2(\lambda, \{f\})$. Действительно, пусть

$$\{f_m\} \xrightarrow{d} \{f(x)\}, \quad \lambda_n \to \lambda,$$

$$d_0(F_2(\lambda, \{f\}), F_2(\lambda_n, \{f_m\})) = \int\limits_X |\lambda_n f_m(x) - \lambda f(x)|\, d\mu \to +0$$

при $m \to +\infty$ и $n \to +\infty$. $\boxtimes$

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 1. *Топология $\tau_x := \tau \cap \{x\}$ окрестностей точки $x \in X$ ВТП (X, τ) может быть представлена в следующем виде*:

$$\tau_x = \{x + V_\vartheta, \quad V_\vartheta \in \tau_\vartheta\},$$

где τ_ϑ — это топология окрестностей нулевого элемента $\vartheta \in X$ [1]).

Доказательство.

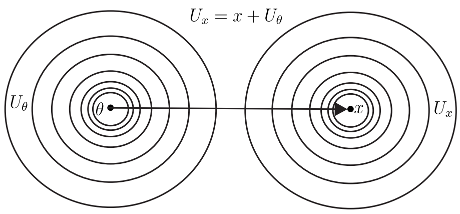

Рис. 32. Инвариантность топологии относительно сдвига.

Достаточно доказать, что для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки $x \in \in X$ найдется такая окрестность нуля $V_\vartheta \in \tau_\vartheta$, что

$$U_x = x + V_\vartheta.$$

$\square$ Действительно, пусть $U_x \in \tau_x$. Докажем, что

$$V_\vartheta \overset{\text{def}}{=} U_x - x \in \tau_\vartheta.$$

1. Прежде всего понятно, что $\vartheta \in V_\vartheta$, поскольку $x \in U_x$.

2. Пусть $y \in V_\vartheta$, тогда согласно определению этого множества найдется такое $z \in U_x$, что $y = z - x$. Согласно свойству топологии τ ВТП (X, τ) отображение

$$z \overset{\text{def}}{=} x + y$$

непрерывно в точке y. Тогда для этой окрестности $U_x \ni z$ найдется такая окрестность $W_y \in \tau_y$ точки y, что

$$x + W_y \subset U_x \Rightarrow W_y \subset U_x - x = V_\vartheta \Rightarrow V_\vartheta \in \tau_\vartheta. \quad \boxtimes$$

---

[1]) Т. е. $\tau_\vartheta = \tau \cap \{\vartheta\}$.

Здесь мы воспользовались эквивалентным определением непустого множества $U \in \tau$ как такого, что для каждого $y \in U$ найдется такая окрестность $V_y \in \tau$, что $V_y \subset U$.

Теорема доказана.

§ 3. Выпуклые, уравновешенные, ограниченные и поглощающие множества

Дадим определение выпуклого множества.

Определение 3. *Выпуклым множеством E в векторном пространстве X называется такое множество, что для всех пар точек $x, y \in E$ и для всякого $\lambda \in [0,1]$ имеем $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.*

ПРИМЕР 3. Примером выпуклого множества является, например, множество $\{x \in X : \|x - x_0\| < d_0\}$ в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

□ Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&\|\lambda x + (1-\lambda)y - (1-\lambda+\lambda)x_0\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|\lambda x - \lambda x_0\| + \|(1-\lambda)y - (1-\lambda)x_0\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)\|y - x_0\| < \lambda d_0 + (1-\lambda)d_0 = d_0. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

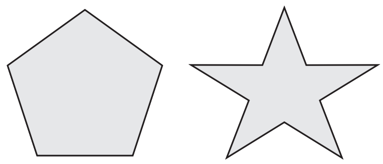

Рис. 33. Выпуклое и не выпуклое множества.

Дадим определение уравновешенного множества.

Определение 4. *Множество E в векторном пространстве X называется уравновешенным, если для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \leqslant 1$ имеем $\lambda E \subset E$.*

ПРИМЕР 4. Уравновешенным множеством в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ является множество $\{x \in X : \|x - x_0\| < d_0\}$, поскольку

$$\|\lambda(x - x_0)\| = |\lambda|\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| < d_0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \leqslant 1.$$

Замечание 1. Оба этих определения даны для произвольного линейного пространства. Следующие определения существенно используют понятие ВТП (векторного топологического пространства).

Определение 5. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется ограниченным, если для всякой окрестности нуля U_ϑ найдется такое $s > 0$, что $E \subset tU_\vartheta$ при $t > s$.*

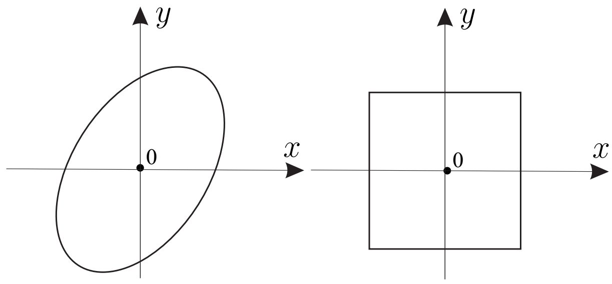

Рис. 34. Уравновешенные множества в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda \in [-1, 1]$.

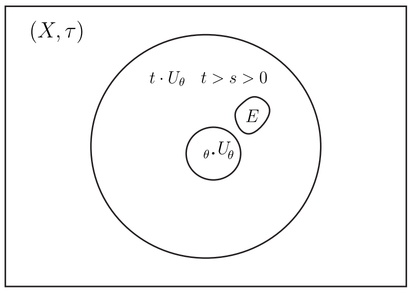

Рис. 35. Ограниченное множество E.

Замечание 2. Иначе говоря, любая окрестность нуля в ВТП *поглощает ограниченное множество.*

Лемма 2. *Множество* $\{x\} \in X$ *является ограниченным множеством в любом векторном топологическом пространстве* (X, τ).

Доказательство.

Заметим, что по определению ВТП (X, τ) функция

$$F_2(\lambda, x) = \lambda \cdot x : \mathbb{C} \times (X, \tau) \to (X, \tau)$$

непрерывна, в частности, в точке $(0, x)$. Заметим, что

$$F_2(0, x) = 0 \cdot x = \vartheta \in X.$$

Поэтому согласно определению по Коши для любой окрестности $U_\vartheta \in \in \tau$ точки ϑ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 < \lambda < \varepsilon$ имеем

$$\lambda \cdot x \in U_\vartheta \Rightarrow x \in \frac{1}{\lambda} \cdot U_\vartheta.$$

Теперь введем обозначения

$$s = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow t > s.$$

Лемма доказана.

П Р И М Е Р 5. Конечное семейство точек $\{x_1,...,x_n\}\subset X$ тоже является ограниченным множеством.

☐ Действительно, для каждой окрестности нуля $U_\vartheta\in\tau$ найдутся такие $s_i>0$, что для всех $t>s_i$ имеем $x_i\in tU_\vartheta$. Поэтому при $t>s:=$ $=\max\{s_1,...,s_n\}$ справедливо вложение

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\subset tU_\vartheta. \quad \boxtimes$$

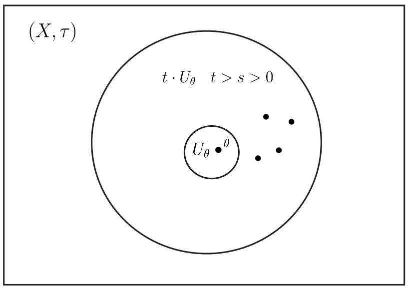

Рис. 36. Конечное число точек — ограниченное множество.

Дадим определение поглощающего множества.

О п р е д е л е н и е 6. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X,τ) называется поглощающим, если для всякой точки $x\in X$ найдется такое $t=t(x)>0$, что $x\in t\cdot E$.*

П Р И М Е Р 6. Например, каждая окрестность нуля является поглощающим множеством, поскольку по доказанному точка ограниченное множество.

Дадим определение абсолютно выпуклого множества.

О п р е д е л е н и е 7. *Выпуклое и уравновешенное множество E векторного топологического пространства (X,τ) называется абсолютно выпуклым.*

П Р И М Е Р 7. Окрестность $\|x-x_0\|<\varepsilon$ является абсолютно выпуклым множеством в нормированном пространстве $(X,\|\cdot\|)$.

§ 4. Пространство линейных и непрерывных функционалов над ВТП (X,τ)

Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 8. *Множество всех линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X,τ) называется сопряженным пространством и обозначается как X^*.*

З а м е ч а н и е 3. Напомним, что это означает. Пусть $f\in X^{\#}$, тогда непрерывность этого функционала в точке $x\in X$ определяется следующим образом: *для всякой окрестности* $U(f(x)) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$ *найдется такая окрестность* $U(x) \in \tau_x$ *точки* $x \in X$, *что имеет место вложение* $f(U(x)) \subset U(f(x))$. *При этом линейный функционал* $f(x)$ *должен быть непрерывен в каждой точке векторного топологического пространства* (X, τ).

ПРИМЕР 8. Рассмотрим следующий функционал

$$\langle I, f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_X f(x)\, d\mu : L(X, \mu) \to \mathbb{R}^1.$$

Докажем, что он принадлежит $L^*(X, \mu)$.

1. Линейность функционала I следует из линейности интеграла Лебега.

2. Непрерывность в топологии нормированного пространства $L(X, \mu)$ вытекает из оценки

$$|\langle I, f\rangle - \langle I, f_0\rangle| \leqslant \int\limits_X |f(x) - f_0(x)|\, d\mu < \varepsilon$$

для любой ε-окрестности точки $\{f_0(x)\}$, которая имеет следующий вид:

$$\left\{\{f(x)\} \in L(X, \mu) : \|\{f(x)\} - \{f_0(x)\}\| = \int\limits_X |f(x) - f_0(x)|\, d\mu < \varepsilon\right\}.$$

§ 5. Локально выпуклые пространства

Дадим определение *локально выпуклого пространства*.

Определение 3. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется локально выпуклым, если его базис окрестностей нуля* $\mathfrak{B}_\vartheta$ *может быть выбран, состоящим из выпуклых множеств.*

Важным свойством локально выпуклого векторного топологического пространства является то, что базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ может быть выбран состоящим из абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

Теорема 2. *В топологическом векторном пространстве* (X, τ):

(i) *каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля*;

(ii) *каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем свойство (i).

□ Действительно, пусть $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$. Согласно определению топологии отображение

$$F_2(\lambda, \vartheta) = \lambda \cdot \vartheta = \vartheta \text{ — непрерывно.}$$

Поэтому для указанной окрестности нуля U_ϑ найдется такая окрестность нуля $V_\vartheta \in \tau_\vartheta$ и такое $\varepsilon > 0$, что

$$\mu \cdot V_\vartheta \subset U_\vartheta \quad \text{при} \quad |\mu| < \varepsilon.$$

Тогда множество

$$W := \bigcup_{|\mu|<\varepsilon} \mu \cdot V_\vartheta \in \tau_\vartheta.$$

Докажем, что W уравновешенно. Действительно, при $|\lambda| \leqslant 1$ имеет место цепочка выражений

$$\lambda \cdot W = \bigcup_{|\mu|<\varepsilon} \lambda\mu \cdot V_\vartheta = \bigcup_{|\mu_1|<\varepsilon|\lambda|} \mu_1 \cdot V_\vartheta \subset \bigcup_{|\mu_1|<\varepsilon} \mu_1 \cdot V_\vartheta = W \in \tau_\vartheta,$$

так как имеет место следующее вложение

$$\{\mu_1 \in \mathbb{C} : \ |\mu_1| < \varepsilon|\lambda|\} \subset \{\mu_1 \in \mathbb{C} : \ |\mu_1| < \varepsilon\}$$

для каждого фиксированного $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leqslant 1\}$. Поэтому в объединении

$$\bigcup_{|\mu_1|<\varepsilon} \mu_1 \cdot V_\vartheta$$

не меньше множеств, чем в объединении

$$\bigcup_{|\mu_1|<\varepsilon|\lambda|} \mu_1 \cdot V_\vartheta. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Докажем свойство (ii). Пусть $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$ выпукло.

1. Введем множество

$$A := \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U_\vartheta,$$

причем пусть в соответствии с результатом шага 1

$$\exists\, \varepsilon > 0, \ \exists\, V_\vartheta \in \tau_\vartheta \Rightarrow \mu \cdot V_\vartheta \subset U_\vartheta, \ |\mu| < \varepsilon \Rightarrow \ W = \bigcup_{|\mu|<\varepsilon} \mu \cdot V_\vartheta \in \tau_\vartheta,$$

причем окрестность нуля $W \in \tau_\vartheta$ уравновешенна.

2. Имеет место вложение $W \subset A \Rightarrow W \subset \operatorname{int} A$.

$\square$ Прежде всего заметим, что в силу уравновешенности W

$$\lambda \cdot W \subset W \quad \text{при} \quad |\lambda| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot W \subset W \quad \text{т. к.} \quad |1/\lambda| = 1/|\lambda| = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\lambda} \cdot W \subset W \subset U_\vartheta \Rightarrow W \subset \lambda \cdot U_\vartheta \Rightarrow W \subset \bigcap_{|\lambda|=1} \lambda \cdot U_\vartheta = A. \quad \boxtimes$$

Следовательно, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ и является окрестностью нуля:

$$\varnothing \neq \operatorname{int} A \in \tau_\vartheta.$$

3. Имеет место вложение $\operatorname{int} A \subset U_\vartheta$.

□ Действительно,

$$\operatorname{int} A = \operatorname{int} \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U_\vartheta \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot \operatorname{int} U_\vartheta = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U_\vartheta \subset U_\vartheta,$$

поскольку при $\alpha = 1$ имеет место равенство $\alpha \cdot U_\vartheta = U_\vartheta$ и поэтому имеет место последнее вложение. ⊠

4. Множество A выпукло и множество $\operatorname{int} A$ выпукло.

□ Действительно, пусть $x, y \in A$, тогда

$$x, y \in \alpha \cdot U_\vartheta \quad \text{для всех} \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, x_1, y_1 \in U_\vartheta,\ x = \alpha x_1,\ y = \alpha y_1,\ tx_1 + (1-t)y_1 \in U_\vartheta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow tx + (1-t)y \in \alpha \cdot U_\vartheta \quad \text{для всех} \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow tx + (1-t)y \in A. \quad ⊠$$

Кроме того, *со всяким выпуклым множеством A его внутренность $\operatorname{int} A$ тоже выпукла.*

□ Действительно, пусть $x, y \in \operatorname{int} A \subset A$, тогда

$$tx + (1-t)y \in A \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

В силу непрерывности функции $f(x,y) = tx + (1-t)y$ (по определению топологии ВТП) найдутся такие окрестности $U_x \in \tau_x$ и $U_y \in \tau_y$, что

$$t \cdot U_x + (1-t) \cdot U_y \subset \operatorname{int} A \Rightarrow tx + (1-t)y \in \operatorname{int} A \quad \text{при} \quad t \in [0,1]. \quad ⊠$$

5. Множество A уравновешенно.

□ Действительно, пусть $\lambda = r\beta$ при $r \in [0,1]$ и $|\beta| = 1$. Тогда

$$\lambda \cdot A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha \cdot U_\vartheta = \bigcap_{|\beta\alpha|=1} r\beta\alpha \cdot U_\vartheta = \bigcap_{|\gamma|=1} r\gamma \cdot U_\vartheta.$$

С другой стороны, имеем $\vartheta \in \gamma \cdot U_\vartheta$ — выпуклое множество и поэтому

$$(1-r)\vartheta + r\gamma \cdot U_\vartheta \subset \gamma \cdot U_\vartheta \Rightarrow \bigcap_{|\gamma|=1} r\gamma \cdot U_\vartheta \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma \cdot U_\vartheta = A.$$

Итак,

$$\lambda \cdot A \subset A \quad \text{при} \quad |\lambda| = r|\beta| = r \leqslant 1. \quad ⊠$$

6. Со множеством A его внутренность $\operatorname{int} A$ тоже уравновешенна.

□ Действительно,

$$\lambda \cdot A \subset A \quad \text{при} \quad |\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \operatorname{int}(\lambda \cdot A) \subset \operatorname{int} A \Rightarrow \lambda \cdot \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} A. \quad ⊠$$

7. Итак, построенная окрестность $\operatorname{int} A \in \tau_\vartheta$ является выпуклой и уравновешенной.

Теорема доказана.

Лекция 11

ПОЛУНОРМЫ

§ 1. Полунормы и функционал Минковского

Топологию векторного топологического пространства (X, τ) можно задавать различными способами, но нас будет интересовать один частный, но важный случай, когда топология задается при помощи *полунорм*.

Прежде всего дадим определение полунормы.

Определение 1. *Вещественная функция* $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, *определенная на векторном пространстве* X, *называется полунормой, если выполнены следующие два условия*:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in X$;

(ii) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x, y \in X$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующую вещественную функцию на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0, 1])$:

$$p(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| .$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям полунормы. Однако, из условия, что $p(f) = 0$ вытекает всего лишь на всего, что $f(x) = \text{const}$. Следовательно, указанная функция $p(f)$ не является нормой.

Определение 2. *Функционалом Минковского* $p_{\mathrm{A}}(x)$ *абсолютно выпуклого и поглощающего множества* $\mathrm{A} \subset X$ *в векторном топологическом пространстве* (X, τ) *называется следующая функция*:

$$p_{\mathrm{A}}(x) := \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^1_+ : x \in \lambda \cdot \mathrm{A} \right\} . \tag{1.1}$$

Теорема 1. *Функционал Минковского — полунорма.*

Доказательство.

Шаг 1. Докажем свойство (i).

□ Действительно, пусть $\alpha > 0$, тогда имеют место следующие соотношения:

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf \{ \lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A} \} =$$

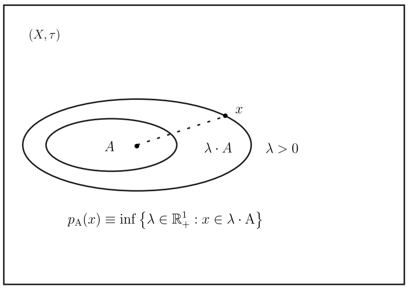

Рис. 37. Функционал Минковского.

$$= \alpha \inf\left\{\alpha^{-1}\lambda :\ \lambda > 0,\ x \in \alpha^{-1}\lambda\mathrm{A}\right\} = \alpha \inf\left\{\overline{\lambda} :\ \overline{\lambda} > 0,\ x \in \overline{\lambda}\mathrm{A}\right\} = \\ = \alpha p_{\mathrm{A}}(x). \quad \boxtimes$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$.

$\square$ В этом случае справедливы аналогичные соотношения в силу уравновешенности множества A

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf\{\lambda :\ \lambda > 0,\ \alpha x \in \lambda\mathrm{A}\} = \\ = -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda :\ \lambda > 0,\ x \in -\alpha^{-1}\lambda\mathrm{A}\right\} = \\ = -\alpha \inf\left\{\overline{\lambda} :\ \overline{\lambda} > 0,\ x \in \overline{\lambda}\mathrm{A}\right\} = -\alpha p_{\mathrm{A}}(x). \quad \boxtimes$$

Случай $\alpha = 0$ очевиден.

2. Докажем теперь справедливость свойства (ii). Пусть $x, y \in \mathrm{X}$, тогда выберем числа a и b следующим образом:

$$p_{\mathrm{A}}(x) < a < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon, \quad p_{\mathrm{A}}(y) < b < p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \qquad (1.2)$$

Докажем теперь, что

$$\frac{x}{a},\ \frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

$\square$ Действительно, по определению чисел a, b и в силу результата шага 1 имеем

$$a > p_A(x) \Rightarrow 1 > p_{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\left\{\lambda :\ \lambda > 0, \quad \frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A}\right\},$$

значит, при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$\frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

в силу уравновешенности множества A ($\lambda A \subset A$ при $|\lambda| \leqslant 1$).

Аналогично доказывается, что

$$\frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Но множество A выпуклое поэтому оно вместе с точками

$$\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}$$

содержит и отрезок, их соединяющий, т. е., в частности, точку

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in \mathrm{A}. \tag{1.3}$$

Значит, в силу определения функционала Минковского из (1.3) имеем

$$x + y \in (a+b)\cdot A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_{\mathrm{A}}(x+y) = \inf\{\lambda:\ \lambda > 0,\ x+y \in \lambda\mathrm{A}\} \quad \text{при} \quad \lambda \leqslant a+b.$$

Стало быть, отсюда и из (1.2) имеем неравенство

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) \leqslant a + b = p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon + p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon.$$

Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу о справедливости свойства (ii). ⊠

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Теперь мы можем доказать теорему о связи функционала Минковского и абсолютно выпуклых поглощающих множеств из ВТП.

Т е о р е м а 2. *Пусть $p(x)$ — это полунорма на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда следующие множества являются абсолютно выпуклыми и поглощающими*:

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathrm{X}:\ p(x) < \alpha\} \quad \textit{и} \quad B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathrm{X}:\ p(x) \leqslant \alpha\} \quad \textit{при} \quad \alpha > 0.$$

Обратно, пусть $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ — это абсолютно выпуклое и поглощающее множество, тогда справедливы вложения

$$\{x:\ p_{\mathrm{A}}(x) < 1\} \subset \mathrm{A} \subset \{x:\ p_{\mathrm{A}}(x) \leqslant 1\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Докажем, что множества A и B абсолютно выпуклые и поглощающие.

□ Действительно, рассмотрим, например, множество A. Проверим его *выпуклость*: пусть $x, y \in \mathrm{A}$, тогда в силу свойства (ii) имеет место следующее неравенство:

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Уравновешенность этого множества следует из свойства (i). Действительно, имеем

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leqslant p(x) < \alpha.$$

Таким образом, приходим к выводу, что A абсолютно выпуклое множество.

Докажем теперь, что это множество является *поглощающим*. Действительно, пусть $y \in$ X. Введем обозначение

$$\lambda(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(y)}{\alpha},$$

тогда получим, что для всех $\lambda > \lambda(y)$ имеют место неравенства

$$\lambda > \lambda(y) = \frac{p(y)}{\alpha} \Rightarrow p(y) < \lambda\alpha \Rightarrow p\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \alpha \Rightarrow \frac{y}{\lambda} \in \mathrm{A} \Rightarrow y \in \lambda\mathrm{A}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для множества B. ⊠

Шаг 2. Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Пусть

$$x \in \left\{x \in X : \ p_{\mathrm{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\right\} < 1\right\},$$

значит, $x \in \lambda$A при некотором $\lambda \in (0, 1)$, тогда из уравновешенности множества A получаем

$$x \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \Rightarrow \{x : \ p_A(x) < 1\} \subset \mathrm{A}.$$

Стало быть, первое вложение доказано.

Пусть теперь $x \in$ A. Тогда имеем $x \in \lambda$A при некотором $\lambda \in (0, 1]$, а именно по меньшей мере при $\lambda = 1$. Значит,

$$x \in A \Rightarrow x \in \left\{x \in X : \ p_{\mathrm{A}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\right\} \leqslant 1\right\}.$$

Теорема доказана.

§ 2. Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм

Начнем с процедуры построения базы топологии на основе произвольного семейства полунорм $\mathrm{P}(X)$ на произвольном линейном пространстве X.

1. Введем окрестности нуля $\vartheta \in X$.

$$V_\vartheta(p, n) = \left\{x : \ p(x) < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathrm{P}(X) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.1)$$

Действительно, $\vartheta \in V(p, n)$, поскольку $p(\vartheta) = 0$. Кроме того, определим следующее семейство множеств:

$$\nu_\vartheta := \left\{V_\vartheta(p, n) : \ n \in \mathbb{N}, \ p \in \mathrm{P}(X)\right\}.$$

2. Произвольный элемент топологии τ_ϑ на линейном пространстве X определим следующим образом: *множество* $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$, *если для любого* $x \in U_\vartheta$ *найдется такая окрестность* $V_\vartheta(p,n) \in \nu_\vartheta$, *что*

$$x + V_\vartheta(p,n) \subset U_\vartheta.$$

В этом случае $\tau_x = x + \tau_\vartheta$ по построению.

Свойства окрестностей $V(p,n)$.

1. Заметим, что построенные окрестности нуля $V(p,n)$ являются *выпуклыми множествами*, т. е.

$$tV(p,n) + (1-t)V(p,n) \subset V(p,n) \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

□ Действительно, в силу свойств (i)–(ii) полунормы имеет место неравенство

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < \\ < \frac{t}{n} + \frac{1-t}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall\, x, y \in V(p,n). \quad \boxtimes$$

2. Кроме того, окрестности $V(p,n)$ являются *уравновешенными множествами*, т. е. $\alpha V(p,n) \subset V(p,n)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Это также следствие свойства (ii) полунормы.

□ Действительно, имеем при $0 < |\alpha| \leqslant 1$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < \frac{|\alpha|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in V(p,n). \quad \boxtimes$$

§ 3. Теорема о непрерывности полунорм

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве X, непрерывна в топологии τ тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле.*

Функционал Минковского $p_U(x)$ абсолютно выпуклого поглощающего множества $U \in X$ является непрерывным в топологии τ тогда и только тогда, когда U — окрестность нуля.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем первую часть теоремы.

□ Пусть полунорма $p(x)$ непрерывна в нуле векторного топологического пространства (X, τ). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $U_\varepsilon \in \tau_\vartheta$, что имеют место выражения [1])

$$|p(x) - p(\vartheta)| = p(x) < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon.$$

[1]) Заметим, что $p(x) \geqslant 0$ и $p(\vartheta) = 0$.

В силу неравенства треугольника (ii) в определении полунормы для произвольного $a \in \mathrm{X}$ имеем неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a).$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ взяв указанное U_ε, получим неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a) < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in a + U_\varepsilon \backslash \{\vartheta\},$$

т. е. $p(x)$ непрерывна в произвольной точке $a \in X$. Утверждение в обратную сторону вытекает из того, что, в частности, полунорма непрерывна в нуле. ☒

Шаг 2. Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы.

1. Пусть $U \in X$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим соответствующий функционал Минковского

$$p_U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda U\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $x \in \varepsilon U \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon$ имеем $\lambda \leqslant \varepsilon$ и, значит,

$$p_U(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon,$$

т. е. функционал Минковского $p_U(x)$ непрерывен в нуле и из предыдущего утверждения — на всем X.

2. Докажем обратное утверждение.

□ Действительно, пусть функционал Минковского абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in \mathrm{X}$ непрерывен в нуле. Тогда множество

$$A = \{x \in X : \ p_U(x) \leqslant 1\}$$

замкнуто, т. е. принадлежит $X \backslash \tau$ как прообраз замкнутого множества $[0, 1]$. Граница ∂A этого множества имеет следующий вид:

$$\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \backslash A}) = \{x : \ p_U(x) = 1\} \Rightarrow \operatorname{int} A = \{x : \ p_U(x) < 1\} \in \tau.$$

причем ясно, что $\vartheta \in \operatorname{int} A$. ☒

Теорема доказана.

Имеет место следующее важное утверждение, вытекающее из этой теоремы.

Лемма 1. *Пусть $p(x)$ — это полунорма, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда если множество $\mathrm{A}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \ p(x) < 1\}$ содержит открытое множество $U \in \tau$ либо множество $\mathrm{B}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \ p(x) \leqslant 1\}$ содержит открытое множество $U \in \tau$, то $p(x)$ непрерывна в топологии τ.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$\tau \ni U \subset A_p = \{x: \ p(x) < 1\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что окрестность нуля U является уравновешенная. Как мы уже доказали, по свойству полунорм множество A_p является абсолютно выпуклым и поглощающим. Пусть $x \in U$. Поэтому

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U \subset A_p, \quad -x \in U \Rightarrow V \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U \subset A_p, \quad V \in \tau, \quad V \neq \varnothing.$$

Следовательно,

$$V \subset \operatorname{int} A_p \in \tau, \quad \operatorname{int} A_p \neq \varnothing.$$

Как мы ранее доказали, вместе с множеством его внутренность обладает свойством абсолютной выпуклости. Кроме того, всякая окрестность нуля является поглощающим множеством.

Итак, $\operatorname{int} A_p$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля.

Шаг 2. Прежде всего заметим, что если $A \subset B$ — это абсолютно выпуклые и поглощающие множества, то соответствующие функционалы Минковского связаны неравенством

$$p_B(x) \leqslant p_A(x) \quad \text{при} \quad A \subset B.$$

Шаг 3. Докажем теперь, что $p(x) \leqslant p_{A_p}(x)$.

□ Действительно, согласно определению функционала Минковского имеем

$$p_{A_p}(x) = \inf\{\lambda > 0: \ x \in \lambda A_p\} \Rightarrow \\ \Rightarrow p\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 1 \Rightarrow p(x) < \lambda \Rightarrow p(x) < p_{A_p}(x). \quad \boxtimes$$

Шаг 4. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$p(x) < p_{A_p}(x) \leqslant p_{\operatorname{int} A_p}(x).$$

Теперь согласно теореме 3 имеем функционал $p_{\operatorname{int} A_p}(x)$ является непрерывным в нуле, поскольку множество $\operatorname{int} A_p$ является абсолютно выпуклой окрестностью нуля. Стало быть, полунорма $p(x)$ тоже непрерывна в нуле, а значит, в силу теоремы 3 непрерывна на всем (X, τ).

Лемма доказана.

Теорема 4. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), непрерывна в топологии τ, порожденной счетным семейством полунорм* P, *тогда и только тогда, когда найдется такие конечное семейство полунорм $p_i(x)$ из* P *при $i = \overline{1, n}$ и постоянная $\beta > 0$, что имеет место следующее неравенство*:

$$p(x) \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x). \tag{3.1}$$

Доказательство.

Докажем только достаточность условия (3.1). Пусть для полунормы $p(x)$ выполнено неравенство (3.1) при некотором конечном семействе полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$. Поскольку топология τ порождена счетным семейством полунорм P, то множества

$$\{x:\ p_i(x) < 1\} \in \tau \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n},$$

$$\{x:\ p(x) < 1\} \supset \{x:\ \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) < 1\} \in \tau.$$

Значит, в силу леммы 1 полунорма $p(x)$ непрерывна в топологии τ.

Теорема доказана.

Дополнительная лекция 4

ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ НА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Метризуемые ВТП

Векторное топологическое пространство при нашем его определении не является автоматически хаусдорфовым. Поэтому в дальнейшем мы будем строить только хаусдорфовы топологии. Заметим теперь, что, как мы уже говорили, из условия $p(x) = 0$ вовсе не вытекает, что $x = \vartheta$, однако есть одно свойство системы полунорм Р, которое роднит семейство полунорм с нормой. Именно, относительно системы полунорм Р мы будем требовать, чтобы она была *разделяющей*, т.е. для всякой точки $x \in X$ существует такая полунорма $p \in \mathrm{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Определение метризуемости. *ВТП (X, τ) называется метризуемым относительно некоторой метрики $d(x, y)$, если система множеств*

$$V_n(x) = \left\{ y \in X : \ d(x, y) < \frac{1}{n} \right\}$$

образуют ФСО ν_x исходной топологии τ_x.

Справедлива следующая теорема о метризуемости.

Теорема 1. *Пусть $\mathrm{P}(X)$ есть счетное и разделяющее семейство полунорм, тогда построенное по этой системе полунорм локально выпуклое векторное топологическое пространство является метризуемым пространством.*

Доказательство.

Шаг 1. Предположим теперь, что наше семейство полунорм $\mathrm{P}(X)$ счетное и разделяющее. Тогда на построенном топологическом пространстве (X, τ) можно ввести числовую функцию

$$d(x, y) = d(x - y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}. \tag{1.1}$$

Проверим, что это <u>метрика</u> на (X, τ).

□ Действительно, докажем, что $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

В силу того, что семейство полунорм является разделяющим, то $d(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку, если $d(x, y) = 0$, но $x - y \neq \vartheta$, то найдется такой номер $k = n_0$, что $p_{n_0}(x - y) > 0$, а значит, $d(x, y) > 0$. Противоречие.

Докажем неравенство треугольника

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y), \quad x,y,z \in X.$$

Прежде всего заметим, что

$$f(p) = \frac{p}{1+p} \Rightarrow f'(p) = \frac{1}{(1+p)^2} > 0 \Rightarrow f(p) \leqslant f(p_1+p_2) \text{ при } p \leqslant p_1+p_2,$$

$$\frac{p}{1+p} \leqslant \frac{p_1+p_2}{1+p_1+p_2} \leqslant \frac{p_1}{1+p_1+p_2} + \frac{p_2}{1+p_1+p_2} \leqslant \frac{p_1}{1+p_1} + \frac{p_2}{1+p_2}.$$

отсюда и следует неравенство треугольника. ⊠

Шаг 2. Докажем, что метрика $d(x,y)$ порождает исходную топологию τ. Достаточно доказать утверждение для любой окрестности нуля $W \in \tau$.

□ Действительно, если W — это окрестность нуля в исходной топологии τ, то по определению топологии τ эта окрестность содержит пересечение подходящим образом выбранных множеств

$$V(p_i,n_i) = \left\{x \in X : \, p_i(x) < \frac{1}{n_i}\right\}, \quad i = \overline{1,k}, \quad \bigcap_{i=1}^{k} V(p_i,n_i) \subset W.$$

Заметим, что в силу очевидной непрерывности всех полунорм $p_i(x)$ в топологии τ метрика $d(x,y) = d(x-y)$ непрерывна как функция из $(X \otimes X, \tau \otimes \tau)$ в $\mathbb{R}^1_+$. Следовательно, множество

$$O(\vartheta, r) := \{x \in X : \, d(x,\vartheta) < r\}, \quad r > 0$$

является открытым множеством в (X,τ). Если $x \in O(\vartheta,r)$, то, в частности,

$$\frac{1}{2^i}\frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < r \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Поэтому если мы выберем $r > 0$ достаточно малым, то из этих неравенств получим

$$p_i(x) < \frac{1}{n_i} \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in V(p_i,n_i) \Rightarrow x \in W. \quad ⊠$$

Т е о р е м а д о к а з а н а .

Дадим определение пространства Фреше.

О п р е д е л е н и е 1 . *Полное, метризуемое и локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.*

З а м е ч а н и е 1. Как видно из теоремы 1 — она не гарантирует того, что построенное по данной системе полунорм метрическое пространство является автоматически полным, т. е. пространством Фреше. Действительно, это не так и полноту построенного пространства надо проверять «вручную».

§ 2. Слабая, сильная и $*$-слабая топологии

Пусть $f \in X^{\#}$, а $x \in X$, где X — это векторное пространство. Рассмотрим следующую функцию на $x \in X$:

$$p(x) := |\langle f, x\rangle| \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad f \in X^{\#}. \tag{2.1}$$

Докажем, что функция $p(x)$ — это полунорма.

□ Действительно, имеют место следующие очевидные неравенства:

$$p(x_1 + x_2) = |\langle f, x_1 + x_2\rangle| = |\langle f, x_1\rangle + \langle f, x_2\rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle f, x_1\rangle| + |\langle f, x_2\rangle| = p(x_1) + p(x_2), \tag{2.2}$$

$$p(\lambda x) = |\langle f, \lambda x\rangle| = |\lambda\langle f, x\rangle| = |\lambda|\,|\langle f, x\rangle| = |\lambda| p(x). \quad \boxtimes \tag{2.3}$$

Таким образом, в силу (2.2) и (2.3) функция (2.1) является полунормой.

Пока у нас нет топологии в векторном пространстве $X^{\#}$, поэтому мы не можем сказать, что такое *ограниченное множество* в $X^{\#}$. Мы можем говорить только о *конечных множествах* из $X^{\#}$, т. е. о множествах, состоящих из конечного числа элементов из $X^{\#}$.

Таким образом, будем рассматривать произвольные конечные множества $A_n = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset X^{\#}$. Тогда определено семейство полунорм

$$\mathrm{P} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{p(x; A_n) :\; A_n \subset X^{\#}\right\}, \tag{2.4}$$

где

$$p(x; A_n) = \sup_{f \in A_n} |\langle f, x\rangle|.$$

Введем соответствующую ФСО точки $\vartheta \in X$

$$\nu_\vartheta = \{V_{nm} :\; n, m \in \mathbb{N}\}, \quad V_{nm} = \left\{x \in X :\; p(x; A_n) < \frac{1}{m}\right\}.$$

Это семейство порождает топологию τ_w на векторном пространстве X, которая называется *слабой топологией*.

Замечание 2. Заметим теперь, что выражение, которое стоит в левой части равенства (2.1) можно рассматривать как функцию от аргумента $f \in X^{\#}$ при фиксированном $x \in X$. Но тогда эта функция тоже полунорма, но уже на линейном пространстве $X^{\#}$.

Введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \{p(f; B_n); B_n \subset X\}, \tag{2.5}$$

где

$$p(f; B_n) = \sup_{x \in B_n} |\langle f, x\rangle|, \quad B_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X.$$

Введем соответствующее ФСО точки $\vartheta^* \in X^\#$

$$\nu_{\vartheta^*} = \{V^*_{nm} :\ n, m \in \mathbb{N}\}, \quad V^*_{nm} = \left\{x \in X :\ p(f; B_n) < \frac{1}{m}\right\}.$$

Это семейство порождает топологию $\tau^*_{w^*}$, но уже на сопряженном векторном пространстве $X^\#$. Эта топология носит название $*-$*слабой топологии*.

Возникает вопрос: почему мы в данном случае говорим не о слабой топологии, а о $*-$слабой топологии?

А вот почему — потому что на векторном пространстве $X^\#$ может быть еще задана и слабая топология следующим образом.

Поскольку множество $X^\#$ является векторным пространством, то на нем в свою очередь однозначно определено векторное пространство $X^{\#\#}$ линейных функционалов, но уже над $X^\#$. Определим соответствующие скобки двойственности между $X^\#$ и $X^{\#\#}$ следующим образом:

$$\left\langle x^\#, f\right\rangle_\# : X^{\#\#} \otimes X^\# \to \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

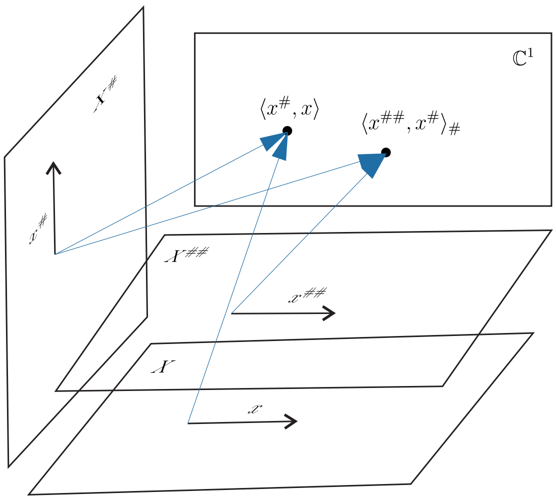

Рис. 38. Векторные пространства X, $X^\#$ и $X^{\#\#}$.

Но тогда рассмотрим топологию на $X^\#$ при помощи следующего семейства полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#\#} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{p^\#(f; A^\#_n); A^\#_n \subset X^{\#\#}\right\}, \tag{2.7}$$

где

$$p^\#(f; A^\#_n) := \sup_{x^\# \in A^\#_n} \left|\langle x^\#, f\rangle_\#\right|,$$

где $A_n^{\#}$ — это произвольное конечное подмножество из $X^{\#\#}$. Введем соответствующее ФСО точки $\vartheta^* \in X^{\#}$

$$\nu_{\vartheta^*} = \left\{V_{nm}^{\#} : \, n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad V_{nm}^{\#} = \left\{x \in X : \, p^{\#}(f; A_n^{\#}) < \frac{1}{m}\right\}.$$

Топология τ_w^* является по своему смыслу слабой топологией на $X^{\#}$, и эти две топологии τ_w^* и $\tau_{w^*}^*$, вообще говоря, не совпадают.

Рассмотрим вопрос о том, когда эти две топологии совпадают (состоят из одних и тех же множеств). Заметим, что имеет место вложение (инъективное отображение)

$$J : X \to X^{\#\#}.$$

$\square$ Действительно, это следствие того, что каждый элемент $x \in X$ порождает линейный функционал на $X^{\#}$ по формуле

$$\langle Jx, f\rangle_{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, x\rangle.$$

Докажем линейность. Действительно,

$$\langle J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), f\rangle_{\#} = \langle f, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle = \\ = \alpha_1 \langle f, x_1\rangle + \alpha_2 \langle f, x_2\rangle = \alpha_1 \langle Jx_1, f\rangle_{\#} + \alpha_2 \langle Jx_2, f\rangle_{\#}.$$

Докажем инъективность. Действительно, пусть

$$Jx = x_1^{\#\#}, \quad Jx = x_2^{\#\#} \Rightarrow \langle x_1^{\#\#} - x_2^{\#\#}, f\rangle_{\#} = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in X^{\#} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1^{\#\#} = x_2^{\#\#}. \quad \boxtimes$$

Но вложение J может не быть сюръекцией, т. е. $J(X) = X^{\#\#}$. Однако тот случай, когда все-таки такое вложение имеет место очень важен. В этом случае линейное пространство X называется *рефлексивным*.

И в этом случае имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle f, x\rangle = \langle x^{\#}, f\rangle_{\#},$$

причем каждому элементу $x \in X$ взаимно однозначно соответствует элемент $x^{\#} \in X^{\#\#}$. Поэтому из сравнения формул (2.8) и (2.7) мы приходим к выводу о том, что топологии τ_w и τ_w^* совпадают на $X^{\#}$. В общем случае, как нетрудно убедиться, топология τ_w^* состоит из большего числа множеств, чем топология $\tau_{w^*}^*$ и, значит, топология τ_w^* *сильнее* топологии $\tau_{w^*}^*$ на $X^{\#}$.

Теорема 2. *Топология τ_w^* сильнее топологии $\tau_{w^*}^*$.*

Доказательство.

Рассмотрим стандартную окрестность нуля в ФСО ν_{ϑ^*} в $*$-слабой топологии $\tau_{w^*}^*$.

$$V_{n,m} = \left\{f \in X^{\#} : \quad p(f, B_n) < \frac{1}{m}\right\},$$

$$p(f;B_n) = \sup_{x\in B_n} |\langle f,x\rangle|, \quad B_n = \{x_1,x_2,...,x_n\} \subset X.$$

Но в силу естественного вложения

$$J(X) \subset X^{\#\#}, \quad J(B_n) = \{x_1^{\#\#} = Jx_1,...,x_n^{\#\#} = Jx_n\}.$$

Поэтому имеет место равенство

$$V_{nm} = V_{nm}^{\#} = \left\{x \in X : \ p^{\#}(f;J(B_n)) < \frac{1}{m}\right\} \in \tau_w^*,$$

где

$$p^{\#}(f;J(B_n)) := \sup_{x^{\#\#}\in J(B_n)} \left|\left\langle x^{\#\#}, f\right\rangle_{\#}\right| = \sup_{x\in B_n} |\langle f,x\rangle| =: p(f;B_n),$$

поскольку по определению отображения J ($Jx = x^{\#\#}$)

$$\langle f,x\rangle = \langle Jx,f\rangle_{\#} \quad \text{для всех} \quad x\in X, \quad f\in X^{\#}.$$

Теорема доказана.

Теперь мы займемся введением *сильной топологии* на пространстве X^* — линейном пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X,τ). Заметим, что для введения сильной топологии на X^* нам нужно понятие ограниченного множества в X и поэтому, естественно, нужна какая-то топология на векторном пространстве X.

Пусть $B \subset X$ — это произвольное ограниченное множество (т. е. поглощается любой окрестностью нуля) в векторном топологическом пространстве (X,τ).

Поскольку всякое конечное множество, в частности, точка поглощается всякой окрестностью нуля, то конечное множество — это пример ограниченного множества, однако, естественно, существуют ограниченные множества, не сводящиеся к конечным. Введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \{p(f;B); B \subset X\}, \tag{2.8}$$

где

$$p(f;B) := \sup_{x\in B} |\langle f,x\rangle|, \quad B\subset X,$$

где B — это произвольное ограниченное множество в (X,τ).

Тогда топология, порожденная этой системой множеств, называется *сильной топологией* пространства X^* и обозначается как τ_s^*. Ясно, что поскольку всякое конечное множество — это ограниченное множество, то слабая топология τ_w^* и уж тем более $*$—слабая топология пространства X^* *слабее* топологии τ_s^*.

Таким образом, сильная топология τ_s является *сильнейшей* топологией на сопряженном пространстве X^* среди указанных «топологизаций».

Полученное локально выпуклое векторное топологическое пространство обозначается как (X^*_s, τ^*_s). Локально выпуклое векторное топологическое пространство, порожденное $*-$слабой топологией, обозначается как $(X^*_{w^*}, \tau^*_{w^*})$.

§ 3. Нормируемые векторные топологические пространства

Важное свойство ВТП заключается в возможности введения на нем нормы, относительно которой топология нормы совпадает с исходной топологией.

Определение 2. *Векторное топологическое пространство (X, τ) называется нормируемым, если на нем можно ввести такую норму, что топология нормы и исходная топология τ являются эквивалентными.*

Теорема о нормируемости. *Локально выпуклое пространство, содержащее ограниченную окрестность нуля, является банаховым относительно функционала Минковского этой окрестности с топологией, эквивалентной исходной и обратное верно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть V — есть выпуклая ограниченная окрестность нуля в локально выпуклом векторном топологическом пространстве (X, τ).

1. Тогда как известно найдется открытая в топологии τ абсолютно выпуклая, окрестность нуля $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, которая, естественно, тоже ограничена.

2. Тогда это пространство можно представить в виде

$$X = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \mathrm{U},$$

поскольку множество U является окрестностью нуля и, следовательно, является поглощающим множеством, т. е. для всех $x \in X$ найдется такое $\alpha > 0$, что $x \in \alpha U$.

3. Рассмотрим функционал Минковского множества U :

$$p_{\mathrm{U}}(x) = \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{U}\}.$$

Поскольку U есть выпуклое, поглощающее и уравновешенное множество (как окрестность нуля), то функционал Минковского этого множества является полунормой на этом пространстве.

4. Осталось проверить только свойство, что

$$p_{\mathrm{U}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta.$$

□ Действительно, пусть $x \neq \vartheta$ и $x \notin \lambda_0 \mathrm{U}$ при $\lambda_0 > 0$. Такое $\lambda_0 > 0$ существует, поскольку в противном случае $x \in 0 \cdot \mathrm{U} = \vartheta$.

Поэтому для всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ в силу ограниченности U множество U поглощается окрестностью $\lambda_0 \mathrm{U}$

$$x \notin \lambda \mathrm{U} \subset \lambda_0 \mathrm{U}.$$

Тогда по определению функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{U}}(x) \geqslant \lambda_0 > 0. \quad \boxtimes$$

Таким образом, $p_{\mathrm{U}}(x)$ есть норма на (X, τ).

5. Осталось доказать, что $p_{\mathrm{U}}(x)$ порождает ту же топологию на X, что и исходная топология τ. Это есть следствие ранее установленного нами равенства множеств

$$\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \ p_{\mathrm{U}}(x) < 1\} \Rightarrow \alpha \mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \ p_{\mathrm{U}}(x) < \alpha\}.$$

Шаг 2. Обратное утверждение вытекает из того, что

$$U = \{x \in X : \ \|x\| < 1\}$$

— это ограниченная абсолютно выпуклая окрестность нуля.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 4. Строгие индуктивные пределы и полнота

В дальнейшем мы будем рассматривать следующую общую ситуацию — имеется счетное семейство локально выпуклых векторных топологических пространств (X_n, τ_n) таких, что

$$(X_n, \tau_n) \subset (X_{n+1}, \tau_{n+1})$$

и топология τ_{n+1} порождает на X_n исходную топологию τ_n.

Индуктивная топология τ на

$$X \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n,$$

порожденная семейством (X_n, τ_n), определяется как сильнейшая (т. е. максимальная по включению всех таких топологий) топология τ, для которой все операторы канонического вложения

$$g_n : X_n \to X$$

непрерывны.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 3. *Индуктивная топология τ на каждом из X_n совпадает с τ_n.*

§ 5. Полнота

Дадим определение фундаментальной направленности.

Определение 3. *Фундаментальной направленностью или направленностью Коши называется такая направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *что для всякой окрестности нуля* U *найдется такое* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, *что для всех таких* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$, *для которых* $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ *и* $\alpha_0 \leqslant \alpha_2$ *имеет место выражение*

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U.$$

Дадим определение полного ВТП.

Определение 4. *Полным ВТП* (X, τ) *называется пространство, в котором всякая фундаментальная направленность сходится.*

Теперь дадим определение пополнения ВТП.

Определение 5. *Пополнением ВТП* (X, τ) *называется полное отделимое ВТП* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, *в котором* (X, τ) *является и топологическим и векторным подпространством*, *причем*

$$(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (\widehat{X}, \widehat{\tau}).$$

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 4. *Всякое отделимое ВТП* (X, τ) *обладает единственным с точностью до изоморфизма пополнением* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Теорема 5. *Справедливы следующие свойства строгих индуктивных пределов*:

(i) *Строгий индуктивный предел полных локально выпуклых пространств полон*;

(ii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n). *Множество* $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ *ограничено в* (X, τ) *тогда и только тогда*, *когда оно содержится в некотором* (X_n, τ_n) *и ограничено в нем*;

(iii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n), *причем* (X_n, τ_n) *замкнуто в* $(\mathrm{X}_{n+1}, \tau_{n+1})$. *Тогда* (X, τ) *не метризуемо.*

Тематическая лекция V

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 12

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Определение и примеры

Определение 1. *Нормой называется неотрицательная вещественная функция* $\|\cdot\|$ *на линейном пространстве* L *над полем* $\mathbb{K}$ (*где* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), *удовлетворяющая следующим условиям*:
(i) *из равенства* $\|x\|=0$ *следует, что* $x=\vartheta$;
(ii) *для любых* $x,y\in L$ *верно* $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;
(iii) *для любых* $x\in L$, $\lambda\in\mathbb{K}$ *верно* $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ [1].

Определение 2. *Линейное пространство, снабжённое нормой, называется нормированным пространством*: $N=(L,\|\cdot\|)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно — задача 1 семинара-лекции 9), что в нормированном пространстве величина
$$d(x,y)=\|x-y\| \tag{1.1}$$
удовлетворяет всем аксиомам метрики. Таким образом, всякое нормированное пространство N становится метрическим пространством, если ввести в N метрику по формуле (1.1). Отметим также, что частным случаем известного неравенства
$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y) \tag{1.2}$$
является неравенство
$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x-y\|: \tag{1.3}$$
достаточно положить $z=\vartheta$ в (1.2). В свою очередь, из (1.3) следует, в частности, что
$$\text{если } \|x_n-x\|\to 0, \text{ то } \|x_n\|\to\|x\|. \tag{1.4}$$

Теперь мы готовы дать определение банахова пространства.

[1] Отсюда, в частности, следует, что условие $x=\vartheta$ не только необходимо, но и достаточно для равенства $\|x\|=0$.

Определение 3. *Банаховым пространством* $\mathbb{B}$ *называется нормированное пространство, которое является полным как метрическое пространство относительно метрики* (1.1), *где* $\|\cdot\|$ *— это норма данного нормированного пространства.*

ПРИМЕР 1. Пространство Лебега $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(t)|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Это будет доказано в части II (семинар-лекция 5).

ПРИМЕР 2. Пространство l^p при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Замечание 2. Можно заметить, что этот пример является частным случаем предыдущего, поскольку пространство l^p можно рассматривать как $L^p(\mathbb{N},\mu)$, где $\mu(\{k\}) = 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 3. Докажем теперь, что пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

$\square$ Действительно, докажем это утверждение за несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ — фундаментальная последовательность. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех натуральных $n, m \geqslant N$ имеет место следующее неравенство:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Шаг 2. Таким образом, для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^1$. Поэтому для каждого $x \in [0,1]$ определена функция $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Переходя в (1.5) к пределу при $m \to +\infty$, получим следующее неравенство:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

Выбирая по любому $\varepsilon > 0$ соответствущее $N(\varepsilon)$, убеждаемся, что

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [0,1]. \tag{1.7}$$

Шаг 3. Докажем, что $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$. Действительно, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Далее, согласно (1.7) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем это n_0 и выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, что для всех $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда получаем неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \quad \boxtimes$$

ПРИМЕР 4. Пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

$\square$ Действительно, пусть последовательность $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ фундаментальна, тогда $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ и $\{f'_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ обе фундаментальны. Следовательно,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \in \mathbb{C}[0,1], \quad f'_n(x) \rightrightarrows g(x) \in \mathbb{C}[0,1]. \tag{1.8}$$

Тем самым выполнены (даже «с запасом») условия теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности. Следовательно, $g(x) = f'(x)$ и согласно (1.8) имеем $\|f - f_n\|_1 \to 0$. $\boxtimes$

§ 2. Эквивалентные нормы

Определение 4. *Норма $\|\cdot\|_1$ на нормированном пространстве $\mathbb{B}, \|\cdot\|$ называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что имеет место неравенство*

$$c_1\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant c_2\|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что $c_1 \leqslant c_2$.

Замечание 3. Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство $\mathbb{B}$ будет банаховым и относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|_1$.

Пример эквивалентных норм. Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.

□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ также является банаховым. ⊠

Пример неэквивалентных норм. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$, на котором введём следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму:

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Относительно этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$.

§ 3. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах

Пусть $(N_1, \|\cdot\|_1)$ и $(N_2, \|\cdot\|_2)$ — это два нормированных пространства, причём

$$A : N_1 \to N_2$$

— это линейный непрерывный оператор. (Определение линейного оператора известно из курса линейной алгебры; будем считать, что областью определения оператора является всё пространство N_1; непрерывность понимается как непрерывность функции, действующей из одного метрического пространства в другое.) Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Напомним, что если A — линейный оператор, то $A\vartheta = \vartheta$ (здесь и далее мы, как правило, будем обозначать нулевые элементы разных пространств одним символом ϑ).

Введём норму на $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ следующим образом:

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}. \tag{3.1}$$

Сразу отметим, что для любого $x \in N_1$ верно неравенство

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_1. \tag{3.2}$$

В самом деле, при $x = \vartheta$ имеем $0 = \|\vartheta\|_2 = \|A\vartheta\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|\vartheta\|_1$; при $x \neq \vartheta$ неравенство (3.2) следует из (3.1).

Лемма 1. *Норма линейного оператора конечна тогда и только тогда, когда оператор непрерывен.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\|A\| < +\infty$. Тогда при $x_n \to x$ имеем

$$\|Ax_n - Ax\|_2 = \|A(x_n - x)\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x\|_1 \to 0.$$

Шаг 2. Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что $\|A\| = +\infty$. Тогда, в частности, согласно определению нормы оператора (3.1)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in N_1,\ \ x_n \neq \vartheta_1 : \ \frac{\|Ax_n\|_2}{\|x_n\|_1} \geqslant n;$$

тогда $\|Ax_n\|_2 \geqslant n\|x_n\|_1 > 0$. Положим

$$y_n = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} x_n.$$

Тогда

$$\|y_n\|_1 = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} \cdot \|x_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n} \to 0, \quad \|Ay_n\|_2 = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} \cdot \|Ax_n\|_2 = 1.$$

Итак, $y_n \to \vartheta_1$, $Ay_n \not\to \vartheta_2 = A\vartheta_1$, что противоречит условию непрерывности оператора.

Лемма доказана.

Поэтому непрерывные линейные операторы называют также *ограниченными* линейными операторами.

Лемма 2. *На линейном пространстве $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ непрерывных операторов величина $\|\cdot\|$ является нормой в смысле определения* 1.

Доказательство.

Шаг 1. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|\lambda Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{|\lambda|\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \\ = |\lambda| \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = |\lambda|\|A\|.$$

Шаг 2. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|(A_1 + A_2)x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|A_1x\|_2 + \|A_2x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|A_1x\|_2}{\|x\|_1} + \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|A_2x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Шаг 3. Докажем, что если $\|A\| = 0$, то отсюда следует, что $A = \vartheta$.

$$0 = \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \Rightarrow \|Ax\|_2 = 0 \quad \text{для всех} \quad \|x\|_1 \neq 0 \Rightarrow A = \vartheta.$$

Лемма доказана.

Замечание 4. На линейном пространстве $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ можно ввести и другие нормы (подробнее об этом см. в лекции-семинаре 11). Однако, если не оговорено иное, под нормой оператора мы всегда будем понимать норму (3.1), называемую *операторной нормой*.

Заметим, что в силу свойств линейного оператора и нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \left\| A\frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос: при каких условиях линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ является банаховым относительно введённой операторной нормы?

Теорема 1. *Пусть* $(N_2, \|\cdot\|_2)$ *является банаховым пространством, тогда* $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ *банахово.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Докажем, что существует такой оператор

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

что
$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Для всякого $x \in N_1$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(N_2, \|\cdot\|_2)$. Действительно,

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

В силу полноты $(N_2, \|\cdot\|_2)$ имеем

$$A_n x \to y[x] \quad \text{в} \quad (N_2, \|\cdot\|_2).$$

Введём оператор
$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} y[x].$$

Докажем его линейность.

□ Действительно, заметим прежде всего, что если

$$y_n \to y \quad \text{и} \quad z_n \to z,$$

то
$$\alpha_1 y_n + \alpha_2 z_n \to \alpha_1 y + \alpha_2 z. \tag{3.3}$$

Далее, по определению оператора A имеем

$$A_n x_1 \to A x_1, \quad A_n x_2 \to A x_2, \tag{3.4}$$
$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2). \tag{3.5}$$

В силу линейности операторов A_n верны равенства

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$ с учётом (3.4), (3.5) и (3.3), получаем

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to +\infty} (\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2,$$

что и требовалось. ⊠

Шаг 3. Докажем теперь ограниченность оператора A. В силу (1.3) имеем
$$\big| \|A_n\| - \|A_m\| \big| \leqslant \|A_n - A_m\|.$$

Следовательно, из фундаментальности $\{A_n\}$ вытекает фундаментальность $\{\|A_n\|\}$. Значит,

$$\|A_n\| \to c_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак,
$$\|Ax\|_2 = \lim_{n \to +\infty} \|A_n x\|_2 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \|A_n\| \|x\|_1 = c_1 \|x\|_1.$$

Тогда
$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \leqslant c_1.$$

Шаг 4. Нам осталось доказать, что
$$\|A - A_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

□ Действительно, при $\|x\|_1 = 1$ имеет место цепочка выражений
$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m\to+\infty} \|(A_m - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,
$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности $\{A_n\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших n. ⊠

Теорема доказана.

§ 4. Линейные функционалы

Прежде всего будем называть сходимость по норме,
$$\|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

сильной сходимостью. Обозначается сильная сходимость следующим образом:
$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:
$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to \mathbb{K} \tag{4.1}$$

(где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — то поле, над которым рассматривается банахово пространство $\mathbb{B}$), причём
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

Прежде всего условимся действие линейного функционала $f(\cdot)$ на элементе $x \in \mathbb{B}$ обозначать с помощью скобок двойственности:
$$\langle f, x\rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Как для любых операторов, множество линейных функционалов само образует линейное пространство.

Определение 5. *Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством* $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, *непрерывных в том смысле, что*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

для всех

$$x_n \to x \quad \textit{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем называть пространством, сопряжённым к $\mathbb{B}$, *и обозначать символом* $\mathbb{B}^*$.

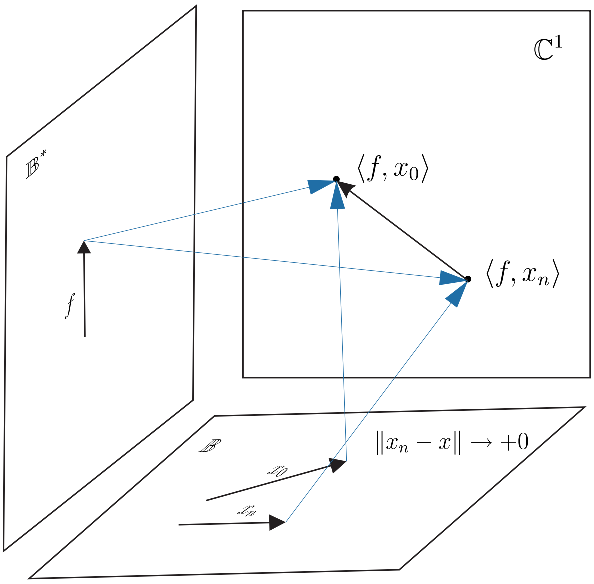

Рис. 39. Непрерывные функционалы.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, а

$$\mathbb{C}, \mathbb{R} \text{ — полные (банаховы) пространства,}$$

то в силу доказанной выше теоремы 1 пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

является в наших обозначениях сильной сходимостью.

§ 5. Слабая и $*$-слабая сходимость

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, то должна существовать и слабая сходимость.

Определение 6. *Говорят, что последовательность* $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ *слабо сходится к элементу* $x \in \mathbb{B}$*, если*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \textit{для каждого фиксированного } f \in \mathbb{B}^*.$$

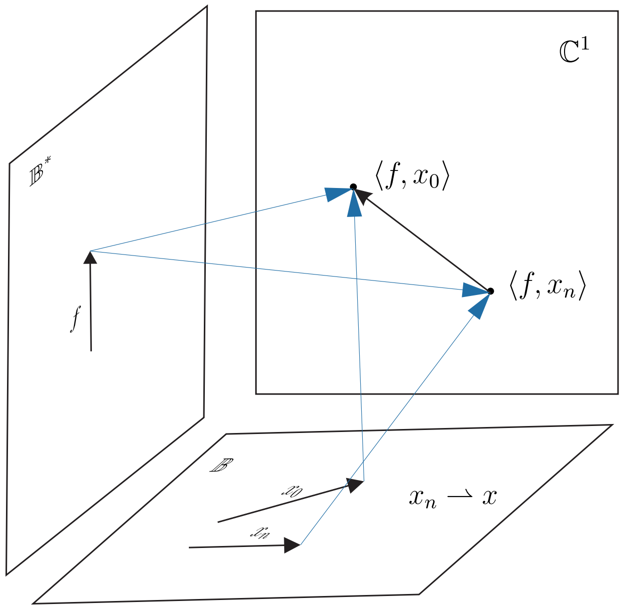

Рис. 40. Слабая сходимость.

Более того, на $\mathbb{B}^*$ можно ввести ещё одну сходимость — $*$-слабую.

Определение 7. *Говорят, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$*-слабо сходится к элементу* $f \in \mathbb{B}^*$*, если*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \textit{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{B}.$$

1. Сильную сходимость мы обозначаем как

$$x_n \to x.$$

2. Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

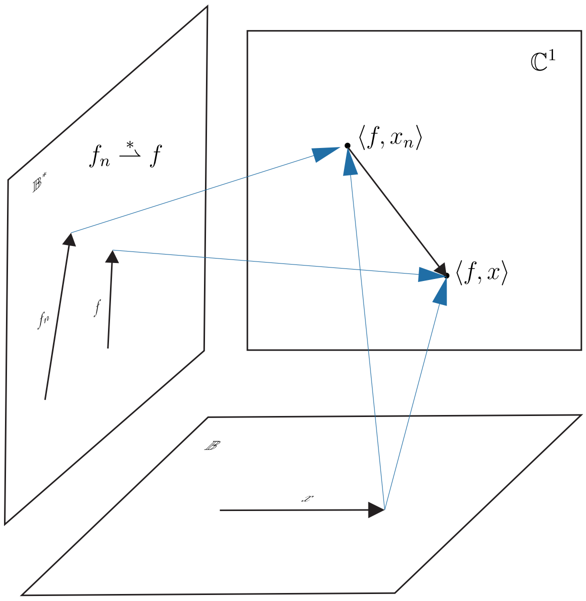

Рис. 41. ∗–слабая сходимость.

3. ∗-слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Теперь мы проиллюстрируем введённые в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и ∗-слабой сходимостей для пространств $L^p(X, \mu)$, где X — область евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1, +\infty]$.

Определение 8. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(X, \mu)$ *называется сильно сходящейся к элементу* $u \in L^p(X, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 9. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(X, \mu)$ *называется слабо сходящейся к элементу* $u \in L^p(X, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *если для каждого* $f \in (L^p(X, \mu))^*$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f, u_n\rangle_p = \langle f, u\rangle_p \,,$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle_p$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^p(X, \mu)$ *и* $(L^p(X, \mu))^*$ *при* $p \in [1, +\infty)$.

Определение 10. *Последовательность* $\{f_n\} \subset L^\infty(X,\mu)$ *называется* $*$*-слабо сходящейся к функции* $f \in L^\infty(X,\mu)$, *если для каждого* $u \in L^1(X,\mu)$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, u\rangle_\infty = \langle f, u\rangle_\infty,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(X,\mu)$ *и* $L^1(X,\mu)$.

Позже (в следующем семестре) мы докажем следующую важную теорему:

Теорема 2. *Банахово пространство* $(L^p(X,\mu))^*$ *при* $p \in (1,+ +\infty)$ *совпадает с банаховым пространством* $L^q(X,\mu)$ *при* $q = p/(p- -1)$, *а в случае* $p = 1$ *банахово пространство* $\left(L^1(X,\mu)\right)^*$ *совпадает с пространством* $L^\infty(X,\mu)$.

Лекция 13

ТЕОРЕМА ХАНА–БАНАХА

§ 1. «Вещественный» вариант теоремы Хана–Банаха

В этом параграфе мы докажем важную в приложениях теорему Хана—Банаха.

Теорема Хана—Банаха. *Пусть X — вещественное векторное пространство, а $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, на котором задан линейный функционал $\langle \lambda, x \rangle$, причём*

$$\langle \lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in X_0, \tag{1.1}$$

где функция $p(x) : X \to \mathbb{R}^1$ обладает следующими свойствами:

1) *ослабленное свойство выпуклости*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in X. \tag{1.2}$$

2) *свойство положительной однородности*

$$p(tx) = tp(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in X \ \textit{и} \ t > 0.$$

Тогда существует линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, определённый на X и обладающий свойствами

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \textit{на} \quad X_0, \tag{1.3}$$

$$\langle \Lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in X. \tag{1.4}$$

Замечание 1. В качестве функции $p(x)$ можно взять полунорму.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть выбрано фиксированное

$$\{x_0\} \in X \backslash X_0 \neq \varnothing,$$

поскольку в случае $X = X_0$ доказывать нечего. Пусть $x, y \in X_0$. Тогда

$$\langle \lambda, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle = \langle \lambda, x+y \rangle \leqslant p(x+y) =$$

$$= p(x - x_0 + x_0 + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle, \tag{1.5}$$

Заметим, что (при фиксированном x_0) левая часть неравенства зависит только от x, правая — только от y. Следовательно,

$$\sup_{x \in X_0} \bigl(\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0)\bigr) \leqslant \inf_{y \in X_0} \bigl(p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle\bigr),$$

поскольку в противном случае нашлись бы такие $x, y \in X_0$, при которых неравенство (1.5) было бы нарушено.

Следовательно, существует такое число $a = a(\lambda, x_0)$, что

$$a)\ \langle \lambda, x \rangle - a \leqslant p(x - x_0), \quad b)\ \langle \lambda, y \rangle + a \leqslant p(y + x_0). \tag{1.6}$$

Шаг 2. Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus tx_0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на X_1 функционал

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda, x \rangle + ta, \quad x \in X_0$$

и докажем, что он обладает нужными свойствами.

□ Действительно,

1. Докажем линейность.

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0 \rangle = \\
&\qquad = \langle \lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle + (\alpha_1 + \alpha_2) a = \\
&\qquad = \alpha_1 \langle \lambda, x_1 \rangle + \alpha_1 a + \alpha_2 \langle \lambda, x_2 \rangle + \alpha_2 a = \\
&\qquad = \alpha_1 \left(\langle \lambda, x_1 \rangle + a\right) + \alpha_2 \left(\langle \lambda, x_2 \rangle + a\right) = \\
&\qquad\qquad = \alpha_1 \langle \Lambda, x_1 + x_0 \rangle + \alpha_2 \langle \Lambda, x_2 + x_0 \rangle.
\end{aligned}$$

2. Очевидно, функционал Λ обладает свойством (1.3).

3. Докажем, что функционал Λ удовлетворяет неравенству (1.4).

Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \leqslant p(x + tx_0) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (1.6).

Пусть $t > 0$. Тогда из неравенства (1.6) *b)* вытекает, что

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle + ta = t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle + a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0);$$

если же $t < 0$, положим $t_1 = -t > 0$ и из неравенства (1.6) *а)* получим

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle = \langle \Lambda, x - t_1 x_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle - t_1 a =$$
$$= t_1 \left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t_1} \right\rangle - a \right) \leqslant t_1 p \left(\frac{x}{t_1} - x_0 \right) = p(x - t_1 x_0) = p(x + tx_0).$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала λ получено. ⊠

Шаг 3. Продолжение на всё пространство X осуществляется с помощью так называемой *трансфинитной индукции*, рассмотрение которой несложно, но выходит за рамки настоящего курса лекций.

Теорема доказана.

Замечание 2. Прежде всего отметим, что если $p(x) = p(-x)$, тогда при условиях теоремы имеет место следующее неравенство:

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

□ Действительно, доказываемое неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$-p(x) \leqslant \langle \Lambda, x \rangle \leqslant p(x),$$

поэтому осталось доказать неравенство

$$\langle \Lambda, -x \rangle \leqslant p(x),$$

но это следствие неравенства

$$\langle \Lambda, -x \rangle \leqslant p(-x) = p(x). \quad ⊠$$

Замечание 3. Отметим, что продолжение функционала с некоторого подпространства линейного пространство не единственно и существенно зависит от функции $p(x)$, заданной на всём линейном пространстве X. Даже при одной и той же функции $p(x)$ продолженных функционалов может быть достаточно много.

§ 2. «Комплексный вариант» теоремы Хана–Банаха

Теперь мы рассмотрим комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

Теорема 1. *Пусть X — комплексное линейное пространство, а $X_0 \subset X$ — его подпространство. Пусть для линейного функционала $\langle \lambda, x \rangle$, определённого на X_0, выполнено неравенство*

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0, \tag{2.1}$$

где $p(x)$ — полунорма, определённая на X. Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, что

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X \tag{2.2}$$

и

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{для} \quad x \in X_0. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим вещественное линейное пространство с тем же множеством-носителем, что у пространства X (для краткости будем называть его пространством $X_{\mathbb{R}}$). Это означает, что мы сужаем операцию умножения на число, разрешая умножать лишь на вещественные числа. Полученное пространство, как нетрудно проверить, дествительно является линейным пространством (естественно, теперь уже над полем $\mathbb{R}$), а X_0 является его подпространством. На этом подпространстве функционал

$$\operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle$$

является линейным функционалом. (Проверьте! В частности, существенно, что он принимает лишь вещественные значения.)

Шаг 2. Согласно условию (2.1) для функционала $\operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle$ выполнено следующее неравенство:

$$|\operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle| \leqslant |\langle\lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \Rightarrow \operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle \leqslant p(x).$$

Следовательно, согласно предыдущей теореме, на пространстве $X_{\mathbb{R}}$ существует вещественный линейный функционал $\widetilde{\Lambda}$ — продолжение функционала $\operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle$, удовлетворяющее условию

$$\langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

Шаг 3. Возвращаясь от пространства $X_{\mathbb{R}}$ к X, определим функционал

$$\langle\Lambda, x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle - i\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle.$$

Отметим, что, поскольку при всех $x \in X$ величина $\langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle$ вещественна, то

$$\operatorname{Re}\langle\Lambda, x\rangle = \langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle. \tag{2.4}$$

Шаг 4. Проверим, что функционал Λ удовлетворяет следующим условиям:

1) это линейный функционал на исходном комплексном пространстве X,

2) он является продолжением линейного функционала λ, т. е. выполнено (2.3),

3) он подчинён полунорме $p(x)$, т. е. выполнено (2.2).

□ Действительно, справедливы следующие рассуждения.

1) Достаточно (почему?) проверить, что он однороден относительно умножения на i. Имеем

$$\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle = i(-i)\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle, \quad -i\langle\widetilde{\Lambda}, -x\rangle = i\langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle,$$

$$\langle \Lambda, ix\rangle = \langle \widetilde{\Lambda}, ix\rangle - i\langle \widetilde{\Lambda}, -x\rangle = \\ = i(-i)\langle \widetilde{\Lambda}, ix\rangle + i\langle \widetilde{\Lambda}, x\rangle = i\left(\langle \widetilde{\Lambda}, x\rangle - i\langle \widetilde{\Lambda}, ix\rangle\right) = i\langle \Lambda, x\rangle.$$

2) Заметим, что для любого комплексного числа z верно равенство $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re}(iz)$, а поэтому при $x \in X_0$ имеем

$$\langle \lambda, x\rangle = \operatorname{Re}\langle \lambda, x\rangle + i\operatorname{Im}\langle \lambda, x\rangle = \\ = \operatorname{Re}\langle \lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}(i\langle \lambda, x\rangle) = \operatorname{Re}\langle \lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}\langle \lambda, ix\rangle = \\ = \langle \widetilde{\Lambda}, x\rangle - i\langle \widetilde{\Lambda}, ix\rangle = \langle \Lambda, x\rangle.$$

3) Пусть

$$\langle \Lambda, x\rangle = |\langle \Lambda, x\rangle|\, e^{i\varphi} \Rightarrow |\langle \Lambda, x\rangle| = e^{-i\varphi}\langle \Lambda, x\rangle = \langle \Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle.$$

Тогда

$$|\langle \Lambda, x\rangle| = \langle \Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle = \{(2.4)\} = \operatorname{Re}\langle \Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle = \\ = \langle \widetilde{\Lambda}, xe^{-i\varphi}\rangle \leqslant p(xe^{-i\varphi}) = p(x). \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 3. Следствия из теоремы Хана–Банаха

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые следствия из теоремы Хана–Банаха.

Теорема 2. *Пусть X — это нормированное линейное пространство, причём*

$$Y \subset X \quad \text{и} \quad \lambda \in Y^*,$$

где Y — линейное подпространство X. Тогда найдётся такое продолжение Λ функционала λ, что имеет место равенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Возьмём в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y. \tag{3.1}$$

□ Действительно, согласно определению нормы линейного функционала имеем

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{y\in Y, \|y\|=1} |\langle \lambda, y\rangle| \Rightarrow |\langle \lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Если $x = \vartheta$, то неравенство (3.1) имеет место. Пусть $x \neq \vartheta$. Положим

$$y = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow |\langle \lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*} \Rightarrow |\langle \lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| = p(x). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал Λ такой, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмём *supremum* по $\|x\| = 1$ от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Шаг 3. С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x\rangle| = |\langle \Lambda, x\rangle| \quad \text{для} \quad x \in Y,$$

поэтому, взяв *supremum* по $x \in Y$, получим неравенство

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \lambda, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|x\|=1, x\in X} |\langle \Lambda, x\rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}.$$

Итак, первое следствие доказано.

Теорема доказана.

Рассмотрим ещё одно следствие из теоремы Хана–Банаха:

Теорема 3. *Пусть $y \in X$, где X — нормированное пространство (нетривиальное, т. е. содержащее не только нулевой элемент) над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда существует функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что*

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|y\|, \quad \|\Lambda\|_{X^*} = 1.$$

Доказательство.

Прежде рассмотрим случай $y \neq \vartheta$. Положим

$$Y = \{ay \mid a \in \mathbb{K}\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\|.$$

Очевидно, λ — это линейный функционал над $Y \subset X$. Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдётся линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|z\|=1,\, z\in Y} |\langle \lambda, z\rangle| = \sup_{\|z\|=1, z\in Y} \|z\| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причём на Y

$$\langle \Lambda, ay\rangle = \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|y\|.$$

Теперь рассмотрим случай $y = \vartheta$. Очевидно, достаточно провести описанное выше построение для произвольно фиксированного $y_1 \neq \vartheta$ и выбрать соответствующий функционал. Он и будет требуемым, ибо $\|\Lambda\|_{X^*} = 1$ в силу вышесказанного, а $\langle \Lambda, \vartheta\rangle = 0 = \|\vartheta\|$ для любого линейного функционала.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $y \in X$, X — нормированное пространство. Верна формула

$$\|y\| = \sup_{f \in X^*,\, \|f\|_{X^*}=1} |\langle f, y\rangle|. \tag{3.2}$$

□ Действительно, с одной стороны, при $\|f\|_{X^*} = 1$ имеем

$$|\langle f, y\rangle| \leqslant \|f\|_{X^*}\|y\| \Rightarrow |\langle f, y\rangle| \leqslant \|y\| \Rightarrow \|y\| \geqslant \sup_{f \in X^*,\, \|f\|_{X^*}=1} |\langle f, y\rangle|.$$

С другой стороны, в силу теоремы 5 существует такой функционал f, что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $\langle f, y\rangle = \|y\|$. Это и доказывает требуемое утверждение.

Замечание 4. Полезно сравнить представление (3.2) с определением

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|.$$

Без доказательства сформулируем ещё одно следствие.

Теорема 4. *Пусть Z — замкнутое подпространство нормированного пространства X и пусть $y \in X \backslash Z$, причём*

$$\mathrm{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, что

$$\langle \Lambda, z\rangle = 0 \quad \text{для всех } z \in Z, \quad \langle \Lambda, y\rangle = d, \quad \|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1.$$

Из этого следствия вытекает следующая важная теорема:

Теорема 5. *Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Если $\mathbb{B}^*$ сепарабельно, то $\mathbb{B}$ также сепарабельно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — счётное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Выберем $\{x_n\} \in \mathbb{B}$ таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n\rangle| \geqslant \|\lambda_n\|_*/2.$$

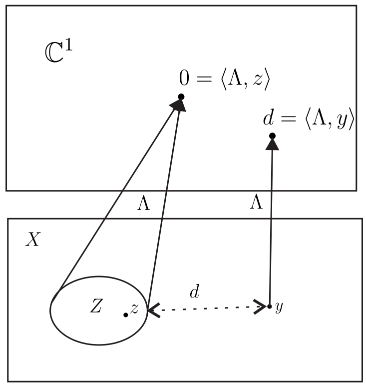

Рис. 42. Разделяющий функционал Λ.

□ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle|,$$

то такая последовательность $\{x_n\}$ существует. ⊠

Шаг 2. Пусть

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, \alpha_k \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$. Пусть нет. Тогда существуют такие

$$y \in \mathbb{B} \backslash \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

С одной стороны, в силу плотности $\{\lambda_n\}$ в $\mathbb{B}^*$ найдётся такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, что

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*. \tag{3.3}$$

С другой стороны, имеет место цепочка неравенств

$$\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \geqslant |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|_*/2. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\lambda_{n_k} \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*,$$

а значит,

$$\lambda = \vartheta.$$

Шаг 3. Итак, предположение о том, что $\overline{\mathcal{D}} \subsetneq \mathbb{B}$, привело нас к противоречию. Значит, $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{B}$ и пространство $\mathbb{B}$ сепарабельно.

Теорема доказана.

Лекция 14

ТЕОРЕМА БАНАХА–ШТЕЙНГАУЗА

§ 1. Дважды сопряжённое пространство

Итак, ранее мы построили сопряжённое банахово пространство $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$. Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством:

$$\langle x^{**}, f\rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**} := (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle_*$ — это скобки двойственности между $\mathbb{B}^{**}$ и $\mathbb{B}^*$.

Определение 1. *Линейное пространство всех линейных функционалов x^{**} над банаховым пространством $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$, непрерывных в том смысле, что*

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle_*,$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

будем называть дважды сопряжённым и обозначать как $\mathbb{B}^{**}$.

Поскольку каждый элемент $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$ — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*) \to \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

то, как и ранее, приходим к выводу, что $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|_*=1} |\langle x^{**}, f\rangle_*| .$$

Сходимость последовательности $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$ по введённой норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в наших обозначениях является *сильной сходимостью*.

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$ мы можем ввести на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ обычную слабую сходимость.

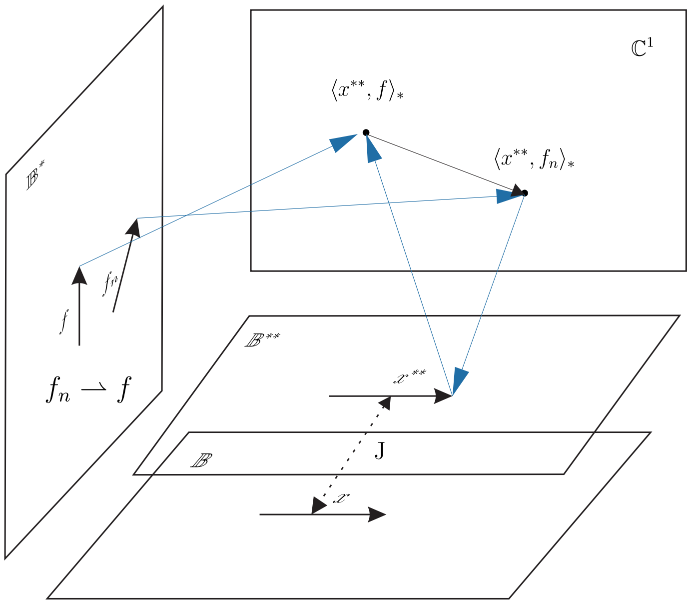

Рис. 43. Слабая сходимость в $\mathbb{B}^*$.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ *слабо сходится к элементу* $f_n \in \mathbb{B}^*$, *и писать*

$$f_n \rightharpoonup f \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

если

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle \quad \textit{для каждого} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

Таким образом, на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*),$$

которое является сопряжённым к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

мы построили три типа сходимости: это сильная, слабая и $*$-слабая. Вопрос: как они связаны.

Лемма 1. *Сильная сходимость влечёт за собой слабую, а слабая сходимость влечёт за собой $*$-слабую.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{x_n\} \subset (\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ и

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Воспользуемся следующим неравенством, вытекающим из определения нормы $\|\cdot\|_*$:

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leqslant \|f\|_* \|x_n - x\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Стало быть,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В частности, $f_n \rightharpoonup f$ слабо в $\mathbb{B}^*$, если $\|f_n - f\|_* \to 0$ при $n \to +\infty$.

Шаг 2. Докажем теперь, что из слабой сходимости в $\mathbb{B}^*$ вытекает $*$-слабая сходимость.

Прежде всего заметим, что между $\mathbb{B}$ и подмножеством в $\mathbb{B}^{**}$ существует линейная изометрия

$$J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}, \quad \|Ju\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}.$$

$\square$ Действительно, определим функционал $Jx \in \mathbb{B}^{**}$ над $\mathbb{B}^*$ следующей формулой:

$$\langle Ju, f\rangle_* \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, u\rangle, \quad u \in \mathbb{B},\ f \in \mathbb{B}^*.$$

1. Согласно определению имеем

$$\langle J(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), f\rangle_* = \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle = \\ = \alpha_1 \langle f, u_1\rangle + \alpha_2 \langle f, u_2\rangle = \alpha_1 \langle Ju_1, f\rangle_* + \alpha_2 \langle Ju_2, f\rangle_*.$$

Линейность доказана.

2. Согласно определению нормы на $\mathbb{B}^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{B}^*)^*$ и следствию из теоремы 5 имеем

$$\|Ju\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle Ju, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u\rangle| = \|u\|. \quad \boxtimes$$

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$, причём

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \Rightarrow \langle x^*, f_n - f\rangle \to 0 \quad \forall x^* \in \mathbb{B}^{**}.$$

Поскольку линейная изометрия J является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{B}$ и $J(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}^{**}$, то приходим к выводу о том, что

$$\forall x \in \mathbb{B} \quad \langle Jx, f_n - f\rangle_* = \langle f_n - f, x\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Дадим следующее определение:

Определение 3. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется рефлексивным, если $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$.*

Если банахово пространство является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle x^{**}, f\rangle_* = \langle f, x\rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B},$$

причём

$$x^{**} = Jx.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{B}$ слабая и $*$-слабая сходимости на банаховом пространстве $\mathbb{B}^*$ совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее» $*$-слабой сходимости.

Теорема 1. *Если $\mathbb{B}$ — рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.*

Доказательство.

Пусть $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbb{B}^*$. Тогда $\mathbb{B}^{**}$ полно как всякое сопряжённое пространство.

Поэтому если $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ — это фундаментальная последовательность, то

$$\|x_n - x_m\| \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \|Jx_n - Jx_m\|_{**} = \|x_n - x_m\| \to +0. \quad (1.1)$$

Следовательно, найдётся такой $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$, что

$$Jx_n \to x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

Положим $x = J^{-1}x^{**}$, тогда

$$\|x_n - x\| = \|Jx_n - x^{**}\|_{**} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 2. Теоремы Банаха–Штейнгауза

Пусть

$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I,$$

— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

В этом параграфе мы рассмотрим две теоремы, каждую из которых принято называть теоремой Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем, обе эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Точнее, они следуют из теоремы о равномерной ограниченности, вытекающей, в свою очередь, из теоремы Бэра.

Теорема 2. (*о равномерной ограниченности*). *Пусть*

(i) *отображение* F_α *непрерывно для каждого* $\alpha \in I$;

(ii) *отображение* F_α *для каждого* $\alpha \in I$ *удовлетворяет неравенствам*

$$1)\ \|F_\alpha(x+y)\|_2 \leqslant \|F_\alpha(x)+F_\alpha(y)\|_2, \quad 2)\ \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda|\|F_\alpha(x)\|_2$$

для всех $x, y \in \mathbb{B}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *и* $\alpha \in I$;

(iii) *для каждого* $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений $\{F_\alpha\}$ *равномерно по* $\alpha \in I$ *непрерывно в нуле*: $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что для каждого F_α множество

$$b_n(\alpha) = \{x \in \mathbb{B}_1 :\ \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$

замкнуто как прообраз замкнутого множества $[0, n]$ при непрерывном отображении.

Шаг 2. Поэтому множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha\in I} b_n(\alpha) = \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\}$$

замкнуто.

Докажем, что

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

□ Действительно, согласно условию (iii)

$$\sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

а поэтому для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{B}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $c(x) \leqslant n$. Имеем

$$X_n = \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент $x \in \mathbb{B}_1$ принадлежит какому-то X_n. ⊠

Шаг 3. Каждое X_n замкнуто в $\mathbb{B}_1$, а $\mathbb{B}_1$ является банаховым, т. е. полным, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдётся такое $n \in \mathbb{N}$ и такой открытый шар $O(x_0, \varepsilon)$, что

$$O(x_0,\varepsilon) \subset X_n \Rightarrow \{x \in \mathbb{B} :\ \|x - x_0\|_1 < \varepsilon\} \subset \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\}.$$

Отсюда после замены $y = x - x_0$ получим вложение

$$\{y:\ \|y\|_1 < \varepsilon\} \subset \left\{y \in \mathbb{B}:\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x_0+y)\|_2 \leqslant n\right\}.$$

В свою очередь, из свойства (ii)-1) вытекает неравенство

$$\forall\|y\|_1 < \varepsilon \quad \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y+x_0)\|_2 + \\ + \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

Шаг 4. Итак,

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon \quad \text{верно} \quad \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii)-2) при всех $\|x\|_1 < \delta$, положив $y = \frac{\varepsilon}{\delta}x$, имеем $\|y\|_1 < \varepsilon$ и

$$\|F_\alpha(x)\|_2 = \left\|F_\alpha\left(\frac{\delta}{\varepsilon}y\right)\right\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n + c(x_0)).$$

Отсюда легко видеть, что

$$\sup_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n + c(x_0)) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы о равномерной ограниченности вытекает следующая первая теорема Банаха–Штейнгауза:

Теорема 3. *Пусть $\{T_\alpha\}$ — это семейство линейных и непрерывных операторов*

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in I.$$

Пусть для каждого $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|_{1\to2} < +\infty.$$

Доказательство.

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta}\|T_\alpha x\|_2 \leqslant 1,$$

но отсюда в силу линейности операторов получим, что

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|_{1\to 2} = \sup_{\alpha\in I,\ \|z\|_1\leqslant 1}\|T_\alpha z\|_2 = \frac{1}{\delta}\sup_{\alpha\in I,\ \|x\|_1\leqslant\delta}\|T_\alpha x\|_2 \leqslant 1/\delta, \quad z=\frac{x}{\delta}.$$

Теорема доказана.

Справедлива вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема 4. *Пусть $\{T_n\}$ — это последовательность линейных непрерывных операторов, причём*

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x \ \textit{сильно в}\ \mathbb{B}_2\ \textit{для каждого}\ x\in\mathbb{B}_1.$$

Тогда T_0 — линейный и непрерывный оператор.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем прежде всего, что оператор T_0 является линейным.

☐ Действительно, в силу линейности T_n имеем

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2. \tag{2.1}$$

Поскольку по условию

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad T_n x_1 \to T_0 x_1, \quad T_n x_2 \to T_0 x_2,$$

то, перейдя в (2.1) к пределу при $n\to+\infty$, получим

$$T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_0 x_1 + \alpha_2 T_0 x_2.$$

Шаг 2. Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\|_2 \leqslant c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{1\to 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\|T_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\|T_n\|_{1\to 2}\|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_1.$$

Значит, T_0 — это ограниченный оператор.

Теорема доказана.

§ 3. Операторные топологии

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимости операторов из пространства

$$\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_1=1} \|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Наконец, ещё один тип операторной сходимости — это слабая сходимость

$$\langle f, (A_n - A)x\rangle \to 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{B}_1 \text{ и } f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2^*$.

Разумеется, у пространства $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ есть и «обычные» типы сходимостей, как и у всякого банахова пространства. С точки зрения этих сходимостей равномерную следовало бы называть сильной, сильную — поточечной, однако устоялись термины «равномерная», «сильная» и «слабая», описывающие сходимость операторов с точки зрения сходимости их значений. Введённая только что слабая операторная сходимость, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости в $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$.

Лекция 15

ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

§ 1. Открытые отображения

Пусть $(\mathbb{B}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{B}_2, \|\cdot\|_2)$ — банаховы пространства.

Определение 1. *Отображение* $T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *называется открытым, если образ всякого открытого множества в* $\mathbb{B}_1$ *открыт в* $\mathbb{B}_2$.

ПРИМЕР 1. Примером не открытого отображения является следующее:

$$T: \quad \forall x \in \mathbb{B}_1 \quad Tx = \vartheta.$$

В самом деле, ведь $\{\vartheta\}$ — замкнутое множество.

Образом отображения T называется множество

$$\operatorname{Im} T \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{B}_2 : \ y = T(x), \ \forall \, x \in \mathbb{B}_1\}.$$

Справедлива следующая теорема об открытом отображении:

Теорема 1. *Пусть* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и* $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$, *тогда* T *— открытое отображение.*

Доказательство.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Символом $O_i(x_0, r)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x_0 и радиуса $r > 0$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}_i$ при $i = \overline{1, 2}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon))}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$, то

$$\mathbb{B}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(O_1(\vartheta, n))}.$$

В силу теоремы Бэра о категориях (теорема 7 лекции 4) найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{B}_1$ и $r > 0$, что

$$O_2(x_0, r) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, n_0))}.$$

Заметим, что множество
$$\overline{T(b_1(\vartheta, n_0))}$$
симметрично относительно нуля и выпукло, что следует из абсолютной выпуклости $O_1(\vartheta, n_0)$ и линейности оператора T.

Шаг 2. Имеет место вложение при $\alpha \in [0,1]$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{y: \ y = \alpha z + (1-\alpha)(-z) = (2\alpha - 1)z, \ z \in O_2(x_0, r)\} \subset \subset \overline{T(O_1(\vartheta, n_0))},$$

поскольку $O_2(x_0, r) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, n_0))}$, а множество $\overline{T(O_1(\vartheta, n_0))}$ уравновешенно и выпукло.

Но M — открытое множество, содержащее ϑ, поскольку при $\alpha = 1/2$ имеем $\vartheta \in M$. Следовательно, найдётся такая окрестность нуля $O_2(\vartheta, \varepsilon)$, что
$$O_2(\vartheta, \varepsilon) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, n_0))},$$
но тогда и

$$\lambda O_2(\vartheta, \varepsilon) = O_2(\vartheta, \lambda\varepsilon) \subset \lambda \overline{T(O_1(\vartheta, n_0))} = \overline{T(O_1(\vartheta, \lambda n_0))}. \tag{1.1}$$

Шаг 3. Пусть

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{n_0}, \quad \delta = \frac{\varepsilon^2}{n_0} \Rightarrow \lambda\varepsilon = \delta, \quad \lambda n_0 = \varepsilon,$$

тогда из (1.1) получим

$$O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon))}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Легко видеть по ходу доказательства этой леммы, что n_0 не зависит от ε, а зависит только от пространств $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ и отображения T.

Докажем теперь вторую вспомогательную лемму

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении, тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно вложение*

$$O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset T(O_1(\vartheta, 3\varepsilon)),$$

где ε и $\delta(\varepsilon)$ связаны соотношением предыдущей леммы.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и при всех $n \geqslant 2$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}} \Rightarrow \delta(\varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_n^2}{n_0} = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0} \frac{1}{2^{2n-2}} \leqslant \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0} \frac{1}{2} = \frac{\delta(\varepsilon_{n-1})}{2},$$

где для каждого ε_n величина $\delta(\varepsilon_n)$ — соответствующая величина в смысле предыдущей леммы и, напомним, n_0 не зависит от ε.

Шаг 2. Итак,

$$O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon_1))}.$$

Пусть

$$y \in O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_1)) \Rightarrow y \in \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon_1))}$$

— произвольное фиксированное. Докажем, что найдётся $x \in O_1(\vartheta, 3\varepsilon)$ такое, что

$$y = Tx.$$

□ Действительно, рассмотрим шар

$$O_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2).$$

Поскольку

$$y \in \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon_1))},$$

то в силу определения замыкания множества

$$O_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap T(O_1(\vartheta, \varepsilon_1)) \neq \varnothing.$$

Следовательно, найдётся такое $x_1 \in O_1(\vartheta, \varepsilon_1)$, что

$$\|y - Tx_1\|_2 < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_2).$$

Следовательно,

$$z \stackrel{\text{def}}{=} y - Tx_1 \in O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_2)/2) \subset O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_2)) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon_2))}.$$

Значит, в силу определения замыкания множества

$$O_2(z, \delta(\varepsilon_3)/2) \bigcap T(O_1(\vartheta, \varepsilon_2)) \neq \varnothing.$$

Следовательно, найдётся такое $x_2 \in O_1(\vartheta, \varepsilon_2)$, что

$$z - Tx_2 = y - Tx_1 - Tx_2 \in O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_3)/2) \subset O_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_3)) \subset \overline{T(O_1(\vartheta, \varepsilon_3))}.$$

И так далее по индукции.

Шаг 3. Итак, в итоге получим

$$\|x_n\|_1 \leqslant \varepsilon_n, \quad \|y - T(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Пусть

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

тогда

$$y = T(x), \quad \|x\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) < 3\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Пусть $A \subset \mathbb{B}_1$ — открыто.

$$x_0 \in A, \quad y_0 = T(x_0).$$

Поскольку A открыто, то найдётся такой шар с центром в нуле

$$O_1(\vartheta, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_1,$$

что

$$x_0 + O_1(\vartheta, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} O_1(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

По предыдущей лемме найдётся такое $\widetilde{\delta}(\varepsilon) := \delta(\varepsilon/3) > 0$, что

$$O_2(\vartheta, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \subset T(O_1(\vartheta, \varepsilon)).$$

Но тогда

$$O_2(y_0, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + O_2(\vartheta, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \subset$$
$$\subset Tx_0 + T(O_1(\vartheta, \varepsilon)) = T(x_0 + O_1(\vartheta, \varepsilon)) \subset T(A).$$

Стало быть, множество $T(A)$ вместе с каждой своей точкой содержит некоторый шар. Следовательно, это множество открыто.

Теорема доказана.

§ 2. Обратное отображение

Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения — это

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2, \quad \operatorname{Ker} T = \{\vartheta\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и выполнены указанные условия. Тогда обратное отображение $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1)$.*

Доказательство.

Прежде всего заметим, что условия (2.1) гарантируют существования (некоторого) обратного отображения. Нетрудно проверить, что оно является линейным (сделайте это самостоятельно!). Осталось проверить его непрерывность.

Пусть A — произвольное открытое множество в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу теоремы об открытом отображении

$$T(A) \quad \text{открыто в } \mathbb{B}_2,$$

или

$$(T^{-1})^{-1}(A) = T(A) \quad \text{открыто в } \mathbb{B}_2.$$

Таким образом, при отображении $T^{-1} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1$ прообраз $T(A)$ всякого открытого множества $A \in \mathbb{B}_1$ открыт в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, отображение T^{-1} непрерывно по теореме об открытом отображении метрических пространств (см. второй параграф шестой лекции).

Теорема доказана.

§ 3. Замкнутый график

Пусть $\mathbb{B}_i$, $i = 1, 2$, — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_i$ соответственно и дано линейное отображение

$$T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2. \tag{3.1}$$

Полезно ввести понятие графика отображения (3.1). Для этого введём в рассмотрение линейное пространство

$$\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{B}_1, x_2 \in \mathbb{B}_2\}. \tag{3.2}$$

На этом пространстве можно ввести норму

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2. \tag{3.3}$$

При этом пространство (3.2) станет нормированным (проверьте, что это действительно норма!) и, более того, банаховым (тоже проверьте!).

Определение 2. *Графиком линейного отображения* (3.1) *называется множество*

$$Gr(T) := \{(x, Tx) : \ x \in \mathbb{B}_1\} \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2.$$

Утверждение 1. *Если отображение T непрерывно, то $Gr(T)$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$.*

Доказательство.

Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{B}_1$ и $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ в $Gr(T)$ при $n \to +\infty$. Это означает:

$$\|x_n - x\|_1 + \|Tx_n - y\|_2 \to 0,$$

откуда

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \tag{3.4}$$

и

$$\|Tx_n - y\|_2 \to 0. \tag{3.5}$$

Но оператор T непрерывен, поэтому из (3.4) следует, что

$$\|Tx_n - Tx\|_2 \to 0. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) в силу отделимости банахова пространства получаем: $y = Tx$. Следовательно, $(x, y) \in Gr(T)$ и множество $Gr(T)$ замкнуто.

Утверждение доказано.

Теорема 3. *Если график линейного отображения*

$$T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

замкнут, то T — непрерывное отображение.

Доказательство.

Если подмножество

$$Gr(T) \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$$

замкнуто, то оно есть банахово пространство относительно введённой ранее нормы (3.3). Отображения

$$P_1 : (x, Tx) \mapsto x, \quad P_2 : (x, Tx) \mapsto Tx$$

есть линейные непрерывные отображения банахова пространства $Gr(T)$ на банаховы пространства $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$, соответственно, причём

$$\operatorname{Im} P_1 = \mathbb{B}_1, \quad \operatorname{Ker} P_1 = (\vartheta_1, \vartheta_2).$$

$\square$ Действительно, пусть $y = (x, Tx)$.

$$P_1 y = x = \vartheta_1 \Rightarrow Tx = T\vartheta_1 = \vartheta_2 \Rightarrow y = (\vartheta_1, \vartheta_2). \quad \boxtimes$$

В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$P_1^{-1} : \mathbb{B}_1 \to Gr(T) : x \mapsto (x, Tx)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$T = P_2 P_1^{-1} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 : x \mapsto (x, Tx) \mapsto Tx$$

как композиция непрерывных отображений P_1^{-1} и P_2 является непрерывным отображением.

Теорема доказана.

Лекция 16

СЛАБАЯ И $*$–СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

§ 1. Свойства слабой и $*$-слабой сходимостей

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства слабой и $*$-слабой сходимостей.

Теорема 1. *Справедливы следующие два утверждения*:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причём*

$$\textit{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая $*$-слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причём*

$$\textit{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \quad \textit{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что случай (i) полностью сводится к случаю (ii). В самом деле, рассмотрим (см. § 7 лекции 7) оператор вложения

$$J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**},$$

ставящий в соответствие каждому элементу $u \in \mathbb{B}$ функционал $Ju \in \in J\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ по закону

$$\langle Ju, f\rangle_* \overset{\text{def}}{=} \langle f, u\rangle \quad \forall f \in \mathbb{B}^*.$$

Как мы знаем, $\|Ju\|_{**} = \|u\|$. Тогда вместо последовательности $u_n \rightharpoonup u_\infty$ в $\mathbb{B}$ можно рассмотреть последовательность $\{Ju_n\} \subset \mathbb{B}^{**}$, которая, очевидно, $*$-слабо сходится к Ju_∞.

Шаг 2. Докажем п. (ii). Очевидно, последовательность $\{f_n\} \subset \subset \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — поле, над которым рассматривается пространство $\mathbb{B}$) удовлетворяет условиям первой теоремы Банаха—Штейнгауза. В самом деле, если для любого $u \in \mathbb{B}$ последовательность $\langle f_n, u\rangle$ сходится, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, u\rangle| \leqslant c(u) < +\infty.$$

Тогда из указанной теоремы получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_* < +\infty.$$

Шаг 3. Итак, доказана ограниченность норм $\|f_n\|$ в совокупности. Однако требуется дать конкретную оценку:

$$\|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*. \tag{1.1}$$

С этой целью вспомним, что

$$\|f\|_* = \sup_{u\in\mathbb{B},\, \|u\|=1} |\langle f, u\rangle|, \tag{1.2}$$

а поэтому для каждого $u \in \mathbb{B}$ с $\|u\| = 1$ верно

$$\|f_n\|_* \geqslant |\langle f_n, u\rangle|.$$

Перейдя в левой части этого неравенства к нижнему пределу (см. замечание 1 ниже), а в правой — к обычному пределу (ведь $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty$!), получаем

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_* \geqslant |\langle f_\infty, u\rangle|.$$

Взяв теперь в последнем неравенстве точную верхнюю грань по $u \in \mathbb{B}$, $\|u\| = 1$, с учётом (1.2) имеем окончательно оценку (1.1).

Теорема доказана.

Замечание 1. В вышеприведённом доказательстве мы применили операцию перехода к нижнему пределу в неравенстве, не описанную в прослушанном вами курсе математического анализа. Остановимся на её обосновании подробно.

Лемма 1. *Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная, $b_n \to b$ — сходящаяся последовательности и*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant b_n.$$

Тогда существует $a = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ и верно неравенство

$$a \geqslant b. \tag{1.3}$$

Доказательство.

Существование верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности известно из курса математического анализа. Более того, известно, что нижний предел есть наименьшая предельная точка последовательности и поэтому существует подпоследовательность $a_{n_k} \to \to a$. Теперь для получения (1.3) достаточно перейти к обычному пределу в неравенстве

$$a_{n_k} \geqslant b_{n_k}.$$

Лемма доказана.

Прежде чем переходить к следующей теореме, необходимо обсудить следующий вопрос. Для этого напомним определения слабой и $*$-слабой сходимости:

$$u_n \rightharpoonup u \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in \mathbb{B}^* \;\; \langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle,$$
$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{B} \;\; \langle f_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle,$$

Возникает вопрос: а может быть так, что для каждого $f \in \mathbb{B}^*$ в первом случае и для каждого $u \in \mathbb{B}$ во втором пределы

$$u_n \rightharpoonup u \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in \mathbb{B}^* \;\; \langle f, u_n \rangle \to a(f) \tag{1.4}$$
$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{B} \;\; \langle f_n, u \rangle \to b(u) \tag{1.5}$$

существуют (в этом случае последовательности $\{u_n\}$ и $\{f_n\}$ естественно называть слабо и $*$-слабо фундаментальными соответственно), но таких элементов $u \in \mathbb{B}$ (соответственно $f \in \mathbb{B}^*$), что

$$a(f) = \langle f, u \rangle \quad (\text{соответственно } b(u) = \langle f, u \rangle),$$

нет?

Оказывается, это невозможно во втором случае и, вообще говоря, возможно в первом. Пространства, для которых невозможно и первое, называются слабо полными. Почему во втором случае такое f всегда существует? Легко видеть, что это непосредственное следствие второй теоремы Банаха—Штейнгауза (теорема 11 лекции 7). В самом деле, достаточно положить $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$, $\mathbb{B} = \mathbb{K}$, $T_n = f_n$. Далее, отсюда получаем важное следствие, которое понадобится нам ниже:

Лемма 2. *Всякое рефлексивное банахово пространство является слабо полным.*

Доказательство.

В самом деле, слабой фундаментельности элементов $\{u_n\}$ соответствует $*$-слабая фундаментальность последовательности $\{Ju_n\}$. Пусть $v \in \mathbb{B}^{**}$ — $*$-слабый предел последовательности $\{Ju_n\}$. Тогда $u_n \rightharpoonup J^{-1}v$.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать следующую важную теорему, которую можно называть в некотором смысле достаточным условием слабой сходимости (точнее следовало бы говорить о слабой секвенциальной предкомпактности ограниченных множеств).

Теорема 2. *Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства $\mathbb{B}$. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $\mathbb{B}$ подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства $\mathbb{B}$.

Шаг 1. Поскольку пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, мы можем отождествить пространство $\mathbb{B}$ с дважды сопряжённым $\mathbb{B}^{**}$. Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{J}(\mathbb{B})$, а так как $\mathbb{B}$ сепарабельно, то сепарабельно и пространство $\mathbb{B}^{**}$, но это пространство является сопряжённым к банахову пространству $\mathbb{B}^{*}$. Значит, в силу леммы 4 пространство $\mathbb{B}^{*}$ является сепарабельным.

Шаг 2. Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^{*}$ — это счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^{*}$ множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, и поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle .$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle .$$

Продолжая таким образом этот процесс, мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, для которой последовательности $\{\langle f_j, u_{n_{k+1}} \rangle\}$ сходятся при $j = 1, ..., k+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность [1] $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счётном всюду плотном в $\mathbb{B}^{*}$ множестве $\{f_n\}$.

Шаг 3. Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$.

Пусть $f \in \mathbb{B}^{*}$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| \leqslant {} & |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| + \\ & + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leqslant \\ & \leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}^{*}$ относительно сильной сходимости и ограниченности

[1] См. § 10 семинара-лекции 13.

подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$.

Шаг 4. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n}\rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, в силу леммы 2 найдётся некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь сформулируем без доказательства достаточное условие $*$-слабой сходимости.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{B}$ — сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$-слабо сходящуюся в $\mathbb{B}^*$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:*

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

§ 2. Равномерная выпуклость банаховых пространств

Определение 1. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{2.1}$$

Теперь приведём важное в приложениях к нелинейным краевым задачам достаточное условие сильной сходимости.

Теорема 4. *Если $\mathbb{B}$ — равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\| \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. Обозначим

$$\varepsilon_n = \|v_n - u\|,$$

Шаг 2. Наша ближайшая цель — доказать, что $\varepsilon_n \to 0$. Предположим, что это неверно. Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$ с $\varepsilon_{n_k} \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Выбросив при необходимости лишние члены, можем считать, что неравенство $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 > 0$ выполняется для исходной последовательности. Тогда, поскольку

$$\|v_n - u\| \geqslant \varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

согласно (2.1) имеем

$$\|v_n + u\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) =: C < 2. \tag{2.2}$$

Шаг 3. В силу определения нормы линейного функционала для любого $f \in \mathbb{B}$ с $\|f\|_* \leqslant 1$ верно неравенство

$$|\langle f, v_n + u\rangle| \leqslant \|v_n + u\|,$$

или, с учётом (2.2),

$$|\langle f, v_n + u\rangle| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) = C < 2.$$

Шаг 4. Поскольку $v_n \rightharpoonup u$, можно перейти к пределу при $n \to +\infty$:

$$|\langle f, 2u\rangle| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) = C < 2,$$

или

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant C/2 < 1.$$

Беря точную верхнюю грань по всем $f \in \mathbb{B}^*$, $\|f\|_* \leqslant 1$, получаем

$$\|u\| = \sup_{f \in \mathbb{B}^*,\, \|f\|_{\mathbb{B}^*} = 1} |\langle f, u\rangle| \leqslant C/2 < 1,$$

что противоречит равенству $\|u\| = 1$ (см. начало доказательства). Значит, наше предположение неверно и $\varepsilon_n \to 0$, т. е. $v_n \to u$. Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\| v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1$.

Теорема доказана.

Дополнительная лекция 5

ТРАНСПОНИРОВАННЫЙ ОПЕРАТОР

В этой лекции мы рассмотрим важное понятие транспонированного оператора и докажем важную теорему о равенстве скобок двойственности.

§ 1. Обозначения

Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\|\cdot\|_e \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_f$$

и с соответствующими сопряжёнными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введём стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e^*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и

$$\langle f^{**}, f^*\rangle_{f^*} \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^* \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

§ 2. Транспонированный оператор и его норма

Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Это пространство является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|T\|_{e\to f} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1} \|Te\|_f\,.$$

Напомним следующее утверждение:

Лемма 1. *Для произвольного оператора* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:

$$\|Te\|_f \leqslant \|T\|_{e\to f}\|e\|_e \quad \textit{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

З а м е ч а н и е 1. В силу леммы 1 имеем, в частности

$$|\langle e^*, e\rangle_e| \leqslant \|e^*\|_{e^*}\|e\|_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}, e^* \in \mathbb{E}^*.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Оператором, транспонированным к T, называется оператор*

$$T^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*, \tag{2.1}$$

определяемый следующим образом:

$$\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, Te\rangle_f \quad \forall e \in \mathbb{E}, \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{2.2}$$

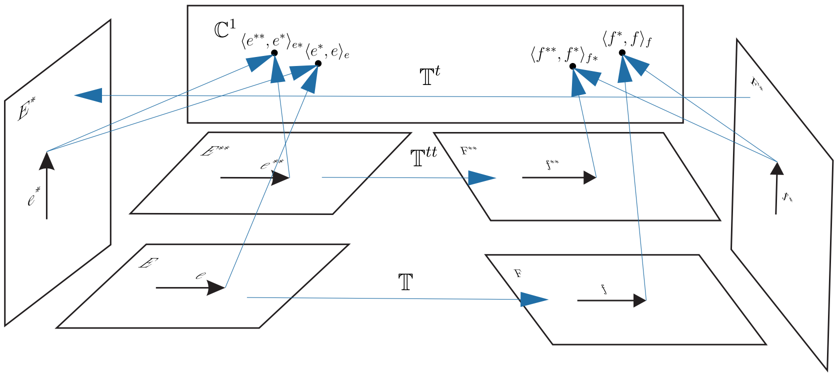

Рис. 44. Транспонированный и дважды транспонированный оператор.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Если* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *то* $T^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. *Причём*

$$\|T\|_{e\to f} = \|T^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего опишем, как определяется норма в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$ — очевидно, банаховом, поскольку $\mathbb{E}^*$ — это банахово пространство.

Шаг 1. Имеем

$$\|T^t\|_{f^*\to e^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1} \|T^t f^*\|_{e^*},$$

где нормы в сопряжённых пространствах $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ определяются стандартным образом:

$$\|e^*\|_{e^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1} |\langle e^*, e\rangle_e| \quad \text{и} \quad \|f^*\|_{f^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|_f=1} |\langle f^*, f\rangle_f|.$$

Докажем сначала линейность оператора T^t. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left\langle T^t\left(\alpha_1 f_1^*+\alpha_2 f_2^*\right), e\right\rangle_e \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle\left(\alpha_1 f_1^*+\alpha_2 f_2^*\right), Te\right\rangle_f = \\
&\quad = \alpha_1\left\langle f_1^*, Te\right\rangle_f+\alpha_2\left\langle f_2^*, Te\right\rangle_f = \alpha_1\left\langle T^t f_1^*, e\right\rangle_e+\alpha_2\left\langle T^t f_2^*, e\right\rangle_e = \\
&\quad = \left\langle \alpha_1 T^t f_1^*+\alpha_2 T^t f_2^*, e\right\rangle_e \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad f_1^*, f_2^* \in \mathbb{F}.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Докажем теперь ограниченность оператора T^t. В силу леммы 1 и замечания после неё имеем

$$\left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right| = \left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f^*}\|Te\|_f \leqslant \|f^*\|_{f^*}\|T\|_{e\to f}\|e\|_e. \qquad (2.3)$$

Из определения нормы линейного оператора (в частности, линейного функционала) следует, что

$$\|T^t\|_{f^*\to e^*} = \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\|T^t f^*\|_{e^*} = \sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\sup_{\|e\|_e=1}\left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right|. \qquad (2.4)$$

Без ограничения общности можно считать, что в неравенстве (2.3) $f^* \neq \vartheta$ и $e \neq \vartheta$. Тогда из (2.3) получим неравенство

$$\left|\left\langle T^t\frac{f^*}{\|f^*\|_{f^*}}, \frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_e\right| \leqslant \|T\|_{e\to f}.$$

Отсюда и из (2.4) вытекает неравенство

$$\|T^t\|_{f^*\to e^*} \leqslant \|T\|_{e\to f}. \qquad (2.5)$$

Следовательно, оператор T^t ограничен, $T^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$.

Шаг 3. Докажем теперь, что имеет место неравенство

$$\|T\|_{e\to f} \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}. \qquad (2.6)$$

Поскольку $T^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$, то в силу леммы 1 и замечания после неё имеет место цепочка выражений

$$\left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right| = \left|\left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e\right| \leqslant \|T^t f^*\|_{e^*}\|e\|_e \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}\|f^*\|_{f^*}\|e\|_e. \qquad (2.7)$$

Теперь по определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ с учётом следствия из теоремы 5 лекции 7 имеем цепочку равенств

$$\|T\|_{e\to f} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|e\|_e=1}\|Te\|_f = \sup_{\|e\|_e=1}\sup_{\|f^*\|_{f^*}=1}\left|\left\langle f^*, Te\right\rangle_f\right|. \qquad (2.8)$$

Без ограничения общности можно считать, что $e \neq \vartheta$ и $f^* \neq \vartheta$.

Тогда из (2.7) получим неравенство

$$\left|\left\langle \frac{f^*}{\|f^*\|_{f^*}}, T\frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_f\right| \leqslant \|T^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Отсюда и из равенства (2.8) получим неравенство (2.6), из которого и из (2.5) получаем второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Утверждение 1. Если

$$\mathbb{E} \xrightarrow{T_1} \mathbb{F} \xrightarrow{T_2} \mathbb{G},$$

то для соответствующих транспонированных операторов верно

$$(T_2 T_1)^t = T_1^t T_2^t.$$

(Доказать самостоятельно!)

§ 3. Операторы топологического вложения

Определение 2. *Оператор $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ называется инъективным, если из условия $Te = \vartheta_f$ вытекает, что $e = \vartheta_e$.*

Оператор T является неинъективным в том случае, если существует такой элемент $\overline{e} \neq \vartheta_e$, что $T\overline{e} = \vartheta_f$. По определению оператора T^t в этом случае имеет место равенство

$$\left\langle T^t f^*, \overline{e} \right\rangle_e = \langle f^*, T\overline{e} \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{3.1}$$

Определение 3. *Множество $\mathrm{A}^* \subset \mathbb{E}^*$ называется ортогональным ко множеству $\mathrm{A} \subset \mathbb{E}$ относительно скобок двойственности между этими банаховыми пространствами, если*

$$\langle a^*, a \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad a^* \in \mathrm{A}^*.$$

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор

$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}.$$

Во-первых, этот оператор линейный, т. е.

$$J_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 J_{ef} e_1 + \alpha_2 J_{ef} e_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } \forall e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный

$$\|J_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Далее мы будем использовать следующее обозначение, когда банахово пространство $\mathbb{E}$ плотно в банаховом пространстве $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) $T(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow T^t$ *является инъективным*;

(ii) $T^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow T$ *является инъективным, причём имеет место обратное утверждение при условии, что* $\mathbb{E}$ *рефлексивно.*

Доказательство.

Шаг 1. Доказательство (i).

1. Надо доказать, что если $T^t f^* = \vartheta^*_e$, то $f^* = \vartheta^*_f$.

Итак, пусть $T^t f^* = \vartheta^*_e$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства

$$0 = \left\langle T^t f^*, e\right\rangle_e = \langle f^*, Te\rangle_f \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Поскольку $T(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, то для любого $f \in \mathbb{F}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $e_\varepsilon \in \mathbb{E}$, что

$$\|f - Te_\varepsilon\|_f \leqslant \varepsilon,$$

поэтому

$$\langle f^*, Te_\varepsilon\rangle_f = 0 \Rightarrow \langle f^*, f\rangle_f + \langle f^*, Te_\varepsilon - f\rangle_f = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка:

$$|\langle f^*, f\rangle_f| = |-\langle f^*, Te_\varepsilon - f\rangle_f| \leqslant \|f^*\|_* \|Te_\varepsilon - f\|_f \leqslant \varepsilon \|f^*\|_{f^*},$$

но число $\varepsilon > 0$ не зависит от $f \in \mathbb{F}$ и от $f^* \in \mathbb{F}^*$. Поэтому в пределе при $\varepsilon \to +0$ получим, что

$$|\langle f^*, f\rangle_f| = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \Rightarrow f^* = \vartheta^*_f.$$

2. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Пусть T^t инъективен, но предположим, что $T(\mathbb{E})$ не плотно в $\mathbb{F}$. Значит, найдётся элемент

$$f \in \mathbb{F} \backslash \overline{T(\mathbb{E})}.$$

По следствию к теореме Хана—Банаха о разделяющем функционале (теорема 6 лекции 7) найдётся функционал $f^* \in \mathbb{F}^*$ такой, что

$$\langle f^*, Te\rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad \langle f^*, f\rangle_f \neq 0.$$

Но тогда

$$0 = \langle f^*, Te\rangle_f = \langle T^t f^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Следовательно,

$$T^t f^* = \vartheta^*_e \Rightarrow f^* = \vartheta^*_f,$$

но последнее равенство противоречит свойству $\langle f^*, f\rangle_f \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает вторую часть (i).

Шаг 2. Доказательство (ii).

1. Первая часть утверждения (ii) уже фактически доказана на первом шаге.

2. Пусть теперь T является инъективным. Попробуем доказать требуемое утверждение как и в случае (i). Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$, равный нулю на $T^t\mathbb{F}^*$, равен нулю и на всём $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат.

Пусть имеет место равенство

$$\langle e^{**}, e^* \rangle_{e^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^* \in T^t\mathbb{F}^*,$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, T^t f^* \right\rangle_{e^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Но последнее выражение равно

$$\left\langle T^{tt} e^{**}, f^* \right\rangle_{f^*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

где T^{tt} — транспонированный к T^t оператор. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$T^{tt} e^{**} = \vartheta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора T, вообще говоря, не следует инъективность оператора T^{tt}.**

Поэтому нужно изучить явное представление оператора T^{tt} через оператор T.

Рассмотрим транспонированный оператор T^{tt} к оператору T^t. По определению имеем

$$\left\langle T^{tt} e^{**}, f^* \right\rangle_{f^*} = \left\langle e^{**}, T^t f^* \right\rangle_{e^*} \quad \forall e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{3.2}$$

С учётом того, что имеют место изометрические вложения

$$J_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad J_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**},$$

причём $J_e\mathbb{E} = \mathbb{E}^{**}$ в силу рефлексивности $\mathbb{E}$, мы можем переписать (3.2) в следующем виде:

$$\left\langle T^{tt} J_e e, f^* \right\rangle_{f^*} = \left\langle J_e e, T^t f^* \right\rangle_{e^*} \quad \forall e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*. \tag{3.3}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle J_e e, T^t f^* \right\rangle_{e^*} = \left\langle T^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, Te \rangle_f = \langle J_f Te, f^* \rangle_{f^*} \quad \forall e \in \mathbb{E}, \quad \forall f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Отсюда и из (3.3) получим равенство

$$T^{tt} J_e = J_f T.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор J_e^{-1} и поэтому получаем равенство

$$T^{tt} = J_f T J_e^{-1}.$$

Отсюда и из инъективности T вытекает инъективность оператора T^{tt}, а стало быть, получаем, что

$$T^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Т е о р е м а   д о к а з а н а.

Теперь можно применить общий результат теоремы к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$J_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow J_{ef}^t$ *является инъективным*;

(ii) $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow J_{ef}$ *является инъективным, причём имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

§ 4. Теорема о равенстве скобок двойственности

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причём $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$J_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

что $J_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$. Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = J_{ef}u$. С другой стороны, для оператора J_{ef} определен транспонированный оператор

$$J_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причём в силу теоремы 3 оператор J_{ef}^t является линейным, непрерывным, инъективным, причём $J_{ef}^t\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$.

Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $J_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$. По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle J_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \langle f, J_{ef}u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{4.1}$$

Однако если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $J_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $J_{ef}^t\mathbb{F}^*$, то (4.1) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \tag{4.2}$$

причём имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \tag{4.3}$$

Итак, справедлива теорема о равенстве скобок двойственности.

Теорема 1. *Пусть рефлексивное банахово пространство $\mathbb{E}$ непрерывно и плотно вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$, тогда имеет место равенство*

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \textit{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{4.4}$$

Лекция 17

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой лекции мы изучим банаховы алгебры и рассмотрим спектральную теорию операторов, действующих в банаховом пространстве, которое в данной лекции всюду считается комплексным.

§ 1. Банаховы алгебры

Определение 1. *Банаховой алгеброй с единицей $\mathcal{A}$ называется такое линейное пространство над полем $\mathbb{C}^1$, в котором определена бинарная операция умножения*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}: \quad a \times b \overset{\text{def}}{=} ab,$$

которая является ассоциативной и билинейной операцией:

$$(ab)c = a(bc),$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)b = \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b, \quad a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 ab_1 + \beta_2 ab_2;$$

кроме того, векторное пространство $\mathcal{A}$ является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причём

$$\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\| \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Наконец, существует единица id: $\mathrm{id} \cdot a = a \cdot \mathrm{id} = a$, *причём* $\|\mathrm{id}\| = 1$.

Из неравенства $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ вытекает непрерывность умножения.

□ Действительно, пусть

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad \text{сильно в} \quad \mathcal{A},$$

тогда

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n\|\|b_n - b\| + \|a - a_n\|\|b\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad ⊠$$

ПРИМЕР 1. Банаховой алгеброй с единицей является, в частности, пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$ относительно нормы

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Это наиболее существенный для нас пример. Единственное, что нужно проверить, — это неравенство

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\| \quad \text{для всех} \quad T_1,\, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{B},\mathbb{B}).$$

$\square$ Действительно, согласно определению операторной нормы имеет место неравенство

$$\|T_1T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(T_2x)\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1\|\|T_2x\| = \|T_1\|\|T_2\|. \quad \boxtimes$$

§ 2. Интеграл Бохнера

Везде далее $\mathcal{A}$ — это банахова алгебра с единицей.

Пусть
$$f(z) : D \subset \mathbb{C}^1 \to \mathcal{A}$$
— это банаховозначная функция комплексного переменного, изменяющегося в области D. Пусть $l \in \mathbb{C}^1$ — кусочно гладкий контур. Если строить, как и в случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}^1$, интеграл Римана через интегральные суммы, а предельный переход осуществлять в смысле сильной сходимости в банаховом пространстве, мы получим интеграл Бохнера

$$\int\limits_l f(z)\,dz \in \mathcal{A}.$$

Аналитичность в области определяется так же, как и в ТФКП, — как существование производной во всей области, причём определение производной аналогично ТФКП:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z, z+\Delta z \in D \subset \mathbb{C}^1,$$

только предел понимается не в смысле нормы $|\cdot|$ банахова пространства $\mathbb{C}^1$, а в смысле нормы $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathcal{A}$.

Для интеграла Бохнера справедливы многие свойства интегралов обычных $\mathbb{C}$-значных функций. В частности, теорема Коши об обращении в ноль интеграла от аналитической функции по контуру, целиком лежащему в области аналитичности, и вытекающая из неё формула Коши.

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B},\mathbb{B})$. Оказывается, что аналитичность $\mathcal{A}$-значной функции $f(z)$ эквивалентна аналитичности следующей $\mathbb{C}^1$-значной функции

$$\varphi(z) = \langle w^*, f(z)u \rangle \quad \text{для всех} \quad w^* \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$.

§ 3. Обратимые элементы банаховой алгебры

Определение 2. *Элемент* $a \in \mathcal{A}$ *называется обратимым, если существует такой элемент* $a^{-1} \in \mathcal{A}$, *что имеют место следующие равенства*:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = \mathrm{id}.$$

Лемма 1. *Если элементы* $a, b \in \mathcal{A}$ *обратимы, то элемент* $ab \in \in \mathcal{A}$ *тоже обратим, причём обратным является элемент* $b^{-1}a^{-1}$.

Доказательство.

Действительно,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = \mathrm{id},$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = \mathrm{id}.$$

Лемма доказана.

Нетрудно доказать единственность обратного элемента. Попробуйте сделать это сами, а в случае неудачи обратитесь к лекции-семинару 11, § 3.

Лемма 2. *Пусть* $a \in \mathcal{A}$. *Если* $\|a\| < 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n, \tag{3.1}$$

где по определению положено $a^0 = \mathrm{id}$, *сходится в* $\mathcal{A}$ *и его сумма является элементом, обратным к* $(\mathrm{id} - a)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (\mathrm{id} - a)^{-1}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Сходимость ряда (3.1) следует из его абсолютной сходимости (см. семинар-лекцию 9, § 2), которая, в свою очередь, вытекает из оценки

$$\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$$

и условия $\|a\| < 1$.

Шаг 2. Итак, ряд (3.1) представляет некоторый элемент b банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Осталось показать, что

$$(\mathrm{id} - a)b = b(a - \mathrm{id}) = \mathrm{id}.$$

С этой целью заметим, что сходящийся ряд можно умножать (слева или справа) на произвольный постоянный элемент $c \in \mathcal{A}$. (Доказательство аналогично случаю числовых рядов, причём ключевую роль играет неравенство (1.1); проведите доказательство самостоятельно.) Поэтому имеем

$$(\mathrm{id}-a)b = (\mathrm{id}-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{m\to+\infty}(\mathrm{id}-a)\sum_{n=0}^{m} a^n =$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}(a^n - a^{n+1}) = \lim_{m\to+\infty}(\mathrm{id}-a^{m+1}) = \mathrm{id},$$

причём для $b(\mathrm{id}-a)$ мы приходим к тому же результату.

Лемма доказана.

Справедлива ещё одна лемма о множестве обратимых элементов.

Лемма 3. *Пусть элемент $a \in \mathcal{A}$ обратим. Тогда при условии*

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1} \tag{3.2}$$

обратим и элемент $a+b$, причём

$$(a+b)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-a^{-1}b)^{-n}\right)a^{-1}. \tag{3.3}$$

Доказательство.

При условии (3.2) верно

$$\|a^{-1}b\| \leqslant \|a^{-1}\|\|b\| < 1,$$

и поэтому в силу лемм 1 и 2 имеем

$$(a+b) = a(\mathrm{id}+a^{-1}b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a+b)^{-1} = (\mathrm{id}+a^{-1}b)^{-1}a^{-1} =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-a^{-1}b)^{n}\right)a^{-1}.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема об открытости подмножества обратимых элементов.

Теорема 1. *Подмножество всех обратимых элементов банаховой алгебры $\mathcal{A}$ открыто, а отображение $T : a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в каждой точке своей области определения (т. е. в каждом обратимой элементе).*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $a \in \mathcal{A}$ обратим и a^{-1} — обратный к нему элемент, тогда в силу предыдущей леммы элемент $(a+b)$ обратим при

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}.$$

Значит, подмножество всех обратимых элементов с каждым своим элементом содержит некоторую его окрестность, т. е. открыто.

Шаг 2. Пусть элемент a обратим. Рассмотрим всевозможные элементы $b \in \mathcal{A}$, удовлетворяющие условию

$$q \overset{\text{def}}{=} \|a^{-1}\|\|b\| < 1.$$

Для каждого такого b по ранее доказанному существует элемент $T(a + b)$, причём в силу (3.3) можем записать:

$$\|T(a+b) - T(a)\| = \left\| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n \right) a^{-1} - a^{-1} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n \right\| \|a^{-1}\| \leqslant \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|a^{-1}b\|^n \leqslant \|a^{-1}\| \frac{q}{1-q}. \quad (3.4)$$

Поскольку при $\|b\| \to 0$ имеем $q \to 0$, соотношение (3.4) завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

§ 4. Резольвента

Определение 3. *Если для элемента $a \in \mathcal{A}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}^1$ элемент*

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - a$$

является обратимым, т. е. существует элемент

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1} \in \mathcal{A}, \quad (4.1)$$

то элемент (4.1) *называется резольвентой элемента a и обозначается*

$$R(\lambda, a) \overset{\text{def}}{=} (\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1}.$$

(*Единственность следует из единственности обратного элемента.*)

Для удобства мы будем иногда писать 1 вместо id и использовать упрощённое обозначение для резольвенты

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Определение 4. *Множество*

$$\mathrm{res}(a) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^1 : \exists\, R(\lambda, a) \right\}$$

называется резольвентным множеством элемента a.

Пусть

$$\|a\| < |\lambda|,$$

тогда в силу леммы 2 имеет место следующая цепочка равенств:

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n. \tag{4.2}$$

Значит,

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 \middle| \, |\lambda| > \|a\|\right\} \subset \operatorname{res}(a).$$

Утверждение 1. *Множество* $\operatorname{res}(a)$ *открыто в* $\mathbb{C}^1$.

Доказательство.

Пусть элемент $\lambda_0 \mathrm{id} - a$ обратим, тогда в силу результата теоремы 1 элемент $(\lambda_0 + \lambda)\mathrm{id} - a$ тоже обратим, если

$$|\lambda| < \|(\lambda_0 \mathrm{id} - a)^{-1}\|^{-1}.$$

Утверждение доказано.

§ 5. О непрерывности резольвенты

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Резольвента* $R(\lambda, a)$ *непрерывна по совокупности переменных* (λ, a) *в области ее существования.*

Доказательство.

Доказательство проведём в несколько шагов, имеющих и самостоятельный интерес.

Шаг 1. Пусть $a \in \mathcal{A}$ — произвольный элемент банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Тогда отображение

$$\lambda \mapsto \lambda a$$

непрерывно как отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathcal{A}$ со стандартными топологиями.

□ В самом деле, поскольку в силу свойства нормы имеем

$$\|\lambda a - \lambda_0 a\| = |\lambda - \lambda_0| \|a\|,$$

то при $a = \vartheta$ можно брать в определении непрерывности любое $\delta(\varepsilon)$, а в противном случае $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \|a\|$. ⊠

Шаг 2. Отображение

$$(a, b) \mapsto a + b$$

непрерывно по совокупности переменных в стандартной топологии $\mathcal{A}$.

□ Действительно, из неравенства треугольника следует, что

$$\|(a + b) - (a_0 + b_0)\| = \|(a - a_0) + (b - b_0)\| \leqslant \|a - a_0\| + \|b - b_0\|,$$

и поэтому

$$\|(a + b) - (a_0 + b_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|a - a_0\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|b - b_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Шаг 3. Теперь непрерывность резольвенты по совокупности переменных следует их результатов шагов 1 и 2 в силу непрывности композиции непрерывных отображений.

Теорема доказана.

§ 6. Свойства резольвенты. Спектр элемента

Лемма 4. *Пусть $U \in \mathcal{A}$ — обратимый элемент. Тогда имеет место следующее равенство*:

$$UR(\lambda, a)U^{-1} = R(\lambda, UaU^{-1}).$$

Доказательство.

$$(\lambda\mathrm{id} - UaU^{-1})UR(\lambda, a)U^{-1} = \lambda UR(\lambda, a)U^{-1} - UaR(\lambda, a)U^{-1} = \\ = U(\lambda\mathrm{id} - a)R(\lambda, a)U^{-1} = UU^{-1} = \mathrm{id}.$$

Аналогичные преобразования показывают, что $UR(\lambda, a)U^{-1}(\lambda\mathrm{id} - - UaU^{-1}) = \mathrm{id}$.

В силу единственности резольвенты лемма доказана.

Лемма доказана.

Определение 5. *Спектром элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество, дополнительное к резольвентному множеству этого элемента:*

$$\sigma(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}^1 \backslash \mathrm{res}(a).$$

В силу последней леммы если $U \in \mathcal{A}$ — обратимый элемент, то

$$\sigma(UaU^{-1}) = \sigma(a).$$

Поскольку, как мы доказали, резольвентное множество $\mathrm{res}(a)$ является открытым, то спектр $\sigma(a)$ является замкнутым.

Докажем тождество Гильберта (также называемое первым резольвентным уравнением):

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, a)R(\mu, a). \tag{6.1}$$

□ Для доказательства достаточно умножить тождество

$$(\mu \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = -(\lambda - \mu),$$

на

$$R(\lambda, a)R(\mu, a). \quad \boxtimes$$

Рассмотрим второе резольвентное уравнение.

Их два. Они имеют следующий вид:

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a)$$

и

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, a)(b - a)R(\lambda, b).$$

□ Докажем, например, первое из них. Имеет место тождество

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - b) = (b - a).$$

Умножим это тождество справа на $R(\lambda, a)$, а слева на $R(\lambda, b)$, получим

$$R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)R(\lambda, a) - R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - b)R(\lambda, a) = \\ = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a). \quad \boxtimes$$

Теперь докажем аналитичность резольвенты на резольвентном множестве.

Заметим, что если $\lambda \in \mathrm{res}(a)$, то для всех μ, достаточно близких к λ, резольвента $R(\mu, a)$ в силу леммы 3 существует, а в силу тождества Гильберта (6.1) верно равенство

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

Пользуясь непрерывностью резольвенты $R(\lambda, a)$ по переменной λ, вытекающей из доказанной в § 5 ее непрерывности по совокупности переменных, можем перейти к сильному пределу при $\mu \to \lambda$ и получить равенство

$$\frac{dR(\lambda, a)}{d\lambda} = -R(\lambda, a)^2.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda, a)$ является $\mathcal{A}$-значной аналитической функцией на резольвентном множестве.

Теорема 3. *Спектр $\sigma(a)$ непуст и замкнут.*

Доказательство.

Замкнутость спектра уже доказана выше в этом же параграфе. Докажем его непустоту.

Действительно, предположим противное. Тогда резольвента аналитична на всей комплексной плоскости. В частности, функция

$$\varphi(\lambda) = \langle w^*, R(\lambda, a)u \rangle$$

для всех $w^* \in \mathcal{A}^*$ и всех $u \in \mathcal{A}$ аналитична на всей комплексной плоскости. Тогда она — константа. Но тогда, как нетрудно заметить, при каждом фиксированном u элемент $R(\lambda, a)u$ не зависит от λ.

□ В противном случае мы бы выбрали такие λ_1 и λ_2, что $R(\lambda_1, a)u \neq = R(\lambda_2, a)u$, положили бы $y = R(\lambda_1, a)u - R(\lambda_2, a)u$ и нашли бы такое $w \stackrel{\mathrm{def}}{=} y$, что $\langle w^*, R(\lambda_1, a)u - R(\lambda_2, a)u \rangle \neq 0$. ⊠.

Но тогда, в свою очередь, и оператор $R(\lambda, a)u$ не зависит от λ, поскольку каждому фиксированному u он сопоставляет один и тот же элемент. Однако резольвента не может не зависеть от λ. Действительно, как легко заметить из представления (4.2) для резольвенты, ее норма стремится к нулю при $|\lambda| \to +\infty$, но сама резольвента всегда отлична от нулевого оператора.

Теорема доказана.

§ 7. Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра

Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\sigma(a)$ — спектр элемента a. Рассмотрим семейство всех функций $\mathcal{F}_a$, аналитических в некоторой (каждая в своей) окрестности спектра $\sigma(a)$.

Ясно, что относительно поточечного сложения и умножения на комплексные числа это семейство является линейным пространством. Добавив операцию поточечного умножения, мы превратим его в алгебру.

Пусть $f(\lambda)$ — это функция, аналитическая в окрестности $D_f \supset \sigma(a)$ спектра элемента a, причём $l_f = \partial D_f$ — это кусочно гладкий контур.

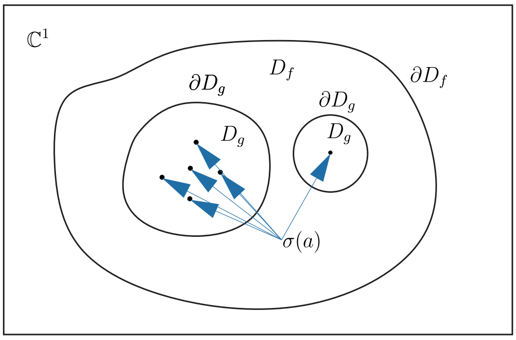

Рис. 45. Области D_g и D_f.

Рассмотрим следующий интеграл, понимаемый в смысле Бохнера:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Определим отображение

$$\mathcal{O}_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{A}$$

равенством

$$f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

(Интеграл в правой части называется интегралом Данфорда.)

Прежде всего заметим, что при этом отображении «единица переходит в единицу». Именно, справедлива следующая лемма:

Л е м м а 5. *Пусть $\sigma(a)$ содержится в области D с кусочно гладкой границей ∂D, тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} 1 \cdot R(\lambda, a)\, d\lambda = \mathrm{id}.$$

Доказательство.

Пользуясь теоремой Коши, можно продеформировать контур интегрирования ∂D, оставляя спектр внутри контура, так, чтобы всюду на контуре выполнялось $|\lambda| > \|a\|$. Тогда согласно ряду Неймана для резольвенты получим

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n .$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\lambda}\, d\lambda \cdot \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Указанное отображение является гомоморфизмом алгебр, причём унитальным (т. е. единица переходит в единицу).*

Доказательство.

Шаг 1. Линейность отображения $\mathcal{O}_a$ очевидна.

Шаг 2. Нам нужно доказать, что при этом отображении произведению двух функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ соответствует произведение элементов $f(a)$ и $g(a)$ из $\mathcal{A}$, определённых интегралами Данфорда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda, \quad g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

□ Действительно, пусть области аналитичности D_f и D_g как окрестности спектра $\sigma(a)$ выбраны. Причём $l_f = \partial D_f$ и $l_g = \partial D_g$ являются кусочно гладкими контурами и

$$D_g \cup \partial D_g \subset D_f, \quad \mathrm{distance}\{\partial D_g, \partial D_f\} > 0.$$

$$f(a)g(a) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) R(\lambda, a) R(\mu, a)\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda.$$

Поскольку $\lambda \notin \overline{D}_g$, то согласно теореме Коши имеем

$$\int\limits_{l_g} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu = 0,$$

а поскольку $\mu \in D_f$, то согласно формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda = f(\mu).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} f(\mu) g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Тот факт, что гомоморфизм унитальный, составляет утверждение доказанной выше леммы 5.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A}$ матриц 2×2 с единицей. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = (\lambda + 1)(\lambda - 3), \quad \sigma(a) = \{-1, 3\},$$

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda + 1} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda - 3} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\lambda)}{\lambda + 1}\, d\lambda = f(-1), \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\lambda)}{\lambda - 3}\, d\lambda = f(3),$$

$l = \{\lambda \in \mathbb{C}^1, |\lambda| = 4\}$, поэтому

$$f(a) = f(-1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + f(3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

§ 8. О существовании обратной операторной функции

Прежде всего заметим, что если функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит $\mathcal{F}_a$ и не имеет нулей в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$, то функция $1/\varphi(\lambda)$ также аналитична в окрестности спектра.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathcal{F}_a$. Для существования $\varphi(a)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\lambda)$ не имела нулей на спектре $\sigma(a)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Достаточность. Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathcal{F}_a$ не имеет нулей в некоторой окрестности D спектра $\sigma(a)$. Тогда в этой окрестности

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \in \mathcal{F}_a,$$

$$\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda) = 1$$

в D. С одной стороны, в силу леммы 5 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda,a)\,d\lambda = \mathrm{id}.$$

С другой стороны, если положить

$$b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda,$$

то по теореме 4

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda = \varphi(a)\cdot b,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda = b\cdot\varphi(a).$$

Значит,

$$\varphi(a)\cdot b = b\cdot\varphi(a) = \mathrm{id}$$

и $b = \varphi(a)^{-1}$.

Шаг 2. Необходимость. Пусть функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит $\mathcal{F}_a$ и имеет ноль в точке $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Тогда функцию $\varphi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)h(\lambda), \quad h(\lambda) \in \mathcal{F}_a.$$

Разумеется, функция $h(\lambda)$ тоже может обращаться в ноль в той же точке, но для дальнейшего это несущественно. Тогда в силу операторного исчисления имеем

$$\varphi(a) = (a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})h(a).$$

Если бы существовал обратный элемент $\varphi(a)^{-1}$ для $\varphi(a)$, то имело бы место равенство

$$(a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})h(a)\varphi(a)^{-1} = \mathrm{id},$$

но это означает, что элемент

$$a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}$$

обратим и его обратный равен $h(a)\varphi(a)^{-1}$, что противоречит тому, что $\lambda_0 \in \sigma(a)$.

Теорема доказана.

§ 9. Лемма об отображении спектра

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6.

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Доказательство.

Пусть $\mu \in \mathbb{C}^1$ фиксировано.Применим теорему 5 к функции

$$\varphi(\lambda) = \mu - f(\lambda)$$

и получим, что элемент

$$\varphi(a) = \mu \cdot \mathrm{id} - f(a)$$

обратим тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей на спектре $\sigma(a)$.

В силу этого

$$\mu_0 \in \sigma(f(a))$$

тогда и только тогда, когда найдется $\lambda_0 \in \sigma(a)$ такое, что

$$\mu_0 = f(\lambda_0).$$

Итак, утверждение доказано.

Лемма доказана.

§ 10. Степенные ряды

Следующая важная теорема будет доказана в семинаре-лекции 11:

Теорема 6. *Пусть*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $r > \|a\|$. *Тогда*

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n.$$

Определение 6. *Спектральным радиусом* $r(a)$ *элемента* a *банаховой алгебры называется число*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Спектральный радиус элемента может быть вычислен по формуле*

$$r(a) = \lim_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего напомним вид ряда Неймана для резольвенты:

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

Шаг 2. Точно так же, как и в ТФКП, можно доказать, что для радиуса сходимости этого степенного ряда имеет место формула

$$r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Причём при $|\lambda| > r_0$ ряд сходится, а при $|\lambda| < r_0$ расходится и на границе $|\lambda| = r_0$ имеет особенности. Поэтому

$$r(a) = r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Шаг 3. Теперь докажем, что

$$r(a) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Имеют место вложения

$$(\sigma(a))^n = \{\text{лемма } 6\} = \sigma(a^n) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| \leqslant \|a^n\|\right\}.$$

Значит,

$$r(a)^n \leqslant \|a^n\|,$$
$$r(a) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Следовательно,

$$r(a) = \lim_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Теорема доказана.

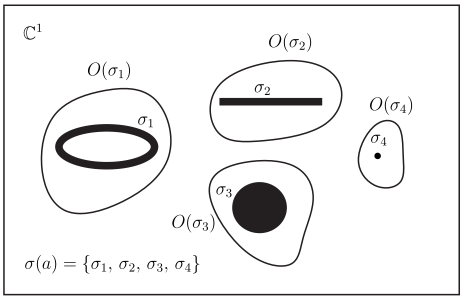

Рис. 46. Спектр $\sigma(a)$.

Пусть спектр $\sigma(a)$ можно разбить на замкнутые компоненты

$$\sigma(a) = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \text{distance}\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \quad j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причём

$$O(\sigma_j) \bigcap (\sigma \backslash \sigma_j) = \varnothing.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j \subset D_j \subset O(\sigma_j)$, и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P(\sigma_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Оказывается, если $\mathcal{A}$ — банахова алгебра линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$, то банахово пространство $\mathbb{B}$ разлагается в прямую сумму (см. семинар-лекцию 11, § 4)

$$\mathbb{B} = \oplus \sum_j P(\sigma_j)\mathbb{B}, \quad P(\sigma_j)P(\sigma_k) = 0, \quad j \neq k, \quad P(\sigma_j)^2 = P(\sigma_j).$$

Тематическая лекция VI

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Лекция 18

СВОЙСТВА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Определение гильбертова пространства и его свойства

Определение 1. *Предгильбертовым (или комплексным евклидовым) пространством называется линейное пространство* $\mathcal{H}$ *(над полем комплексных чисел), в котором введено скалярное произведение, т. е. числовая функция* (x, y), *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $(x, \alpha y) = \alpha\,(x, y)$;
2) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) > 0$ *при* $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ *при* $x = \vartheta$.

Справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)\,(y, y)\,. \tag{1.1}$$

□ Для доказательства этого утверждения рассмотрим выражение

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \overline{\alpha}\,(x, y) + \alpha\,(y, x) + |\alpha|^2\,(y, y)\,.$$

По условию 4) это выражение неотрицательно, каково бы ни было число α. Предполагая, что $(y, y) > 0$, положим

$$\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

На основе сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

т. е.

$$(x, x)\,(y, y) - |(x, y)|^2 \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

Проверим, что выражение

$$\|a\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a, a)^{1/2}$$

— действительно норма в предгильбертовом пространстве.

□ Действительно, осталось проверить лишь то, что имеет место неравенство

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|.$$

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a,b) + (b,a) \leqslant \\ \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|(a,b)| \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| = \\ = (\|a\| + \|b\|)^2. \quad \boxtimes$$

Это позволяет рассматривать предгильбертово пространство как метрическое. Естественно возникает вопрос о его полноте, и мы приходим к важнейшему понятию гильбертова пространства.

Определение 2. *Гильбертовым пространством* $\mathbb{H}$ *называется всякое полное по введённой выше норме предгильбертово пространство* $\mathcal{H}$.

Замечание 1. Как вам известно, метрические пространства можно пополнить. Как можно показать, при пополнении предгильбертова пространства линейные операции и скалярное произведение распространяются на пополненное пространство, и мы получаем гильбертово пространство.

При изучении гильбертовых пространств важным оказывается понятие ортогональности элементов. Дадим серию определений.

Определение 3. *Элементы* x *и* y *гильбертова пространства* $\mathbb{H}$ *называются ортогональными, если* $(x,y) = 0$. *При этом пишут* $x \perp y$.

Определение 4. *Если* x *ортогонален каждому элементу множества* $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}$, *то пишут, что* $x \perp \mathcal{A}$.

Определение 5. *Если каждый элемент множества* $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{H}$ *ортогонален каждому элементу множества* $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{H}$, *то пишут, что* $\mathcal{A}_1 \perp \mathcal{A}_2$.

Определение 6. *Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству* $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, *называется ортогональным дополнением множества* $\mathcal{E}$ *и обозначается* $\mathcal{E}^\perp$.

Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что ортогональное дополнение любого множества $\mathcal{E}$ есть замкнутое линейное подпространство.

Докажем *равенство параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \tag{1.2}$$

□ Имеет место цепочка равенств

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + (x,y) + (y,x) - (x,y) - (y,x). \quad \boxtimes$$

Также важна теорема Пифагора.

Теорема Пифагора. Пусть $x \perp y$. Тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство. Имеем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Иногда рассматривают вещественные предгильбертово и гильбертово пространства. Они получаются, если исходное линейное пространство было над полем вещественных чисел и скалярное произведение принимает только вещественные значения. Основные результаты, полученные в данной лекции для комплексного гильбертова пространства, верны и для вещественного. Однако всюду далее, если не указано иное, под гильбертовым пространством понимается именно комплексное.

§ 2. Теорема Беппо Леви

Теорема Беппо Леви. *Пусть $\mathbb{H}_1$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_2$ — его ортогональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in \mathbb{H}$, его можно единственным образом представить в форме*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathbb{H}_1, \quad x_2 \in \mathbb{H}_2.$$

При этом элемент x_1 реализует расстояние от x до $\mathbb{H}_1$, т. е.

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$

Доказательство.

Шаг 1. Обозначим

$$d = d(x, \mathbb{H}_1) := \inf_{y \in \mathbb{H}_1} \|x - y\|. \tag{2.1}$$

В силу определения infimum найдутся такие элементы $x_n \in \mathbb{H}_1$, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Из равенства параллелограмма

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2\left[\|X\|^2 + \|Y\|^2\right], \tag{2.3}$$

положив в нём

$$X = x - x_n, \quad Y = x - x_m,$$

получим

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = \\ = 2\left[\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\right]. \quad (2.4)$$

А так как

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in \mathbb{H},$$

то в силу (2.1)

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Следовательно, из (2.4) с помощью (2.2) и этой оценки получаем

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{H}$ и, значит, сходится в $\mathbb{H}$:

$$x_n \to x^* \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}.$$

При этом $x^* \in \mathbb{H}_1$ в силу замкнутости этого подпространства в $\mathbb{H}$.

Шаг 2. Переходя с учётом непрерывности нормы к пределу в неравенстве (2.2), получим

$$\|x - x^*\| \leqslant d,$$

а так как для любого элемента из $\mathbb{H}_1$, в том числе и для x^*, должно быть $\|x - x^*\| \geqslant d$, то

$$\|x - x^*\| = d. \quad (2.5)$$

Шаг 3. Докажем теперь, что элемент $x^{**} = x - x^*$ ортогонален $\mathbb{H}_1$ и поэтому принадлежит $\mathbb{H}_2$.

Возьмем произвольный отличный от нулевого элемент $y \in \mathbb{H}_1$. При любом $\lambda \in \mathbb{C}^1$ имеем

$$x^* + \lambda y \in \mathbb{H}_1,$$

так что

$$\|x^{**} - \lambda y\|^2 = \|x - (x^* + \lambda y)\|^2 \geqslant d^2,$$

что можно переписать в форме

$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2(y, y)^2 + (x^{**}, x^{**}) \geqslant d^2.$$

Поскольку $\|x^{**}\| = \|x - x^*\| = d$, то приходим к неравенству

$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2(y, y)^2 \geqslant 0,$$

где положим
$$\lambda = \frac{\overline{(x^{**}, y)}}{(y, y)}$$
и получим неравенство
$$-\frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x^{**}, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$
т. е.
$$|(x^{**}, y)|^2 \leqslant 0,$$
что может быть лишь в случае
$$(x^{**}, y) = 0 \Rightarrow x^{**} \perp y.$$

Итак, возможность представления x в форме $x = x_1 + x_2$ и соотношение $\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1)$ установлены.

Шаг 4. Докажем теперь единственность этого представления. В самом деле, если
$$x = x_1^* + x_2^*, \quad x_1^* \in \mathbb{H}_1, \quad x_2^* \in \mathbb{H}_2,$$
то, сопоставляя это с представлением $x = x_1 + x_2$, получим
$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2. \tag{2.6}$$

Элемент, стоящий в левой части равенства (2.6), принадлежит $\mathbb{H}_1$, а стоящий в правой части — $\mathbb{H}_2$, поэтому
$$x_1 - x_1^* \perp x_2^* - x_2 = x_1 - x_1^* \Rightarrow x_1 - x_1^* = \vartheta.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $\overline{\mathbb{H}}_1 = \mathbb{H}_1 \neq \mathbb{H}$, то найдется элемент $y \in \mathbb{H}_1^{\perp}$, $\|y\| = 1$.

□ Поскольку $\mathbb{H}_1 \neq \mathbb{H}$, существует $x \notin \mathbb{H}_1$. Построим для него разложение, о котором говорится в теореме. Имеем $x = x_1 + x_2$, $x_2 \neq \vartheta$ (иначе $x = x_1 \in \mathbb{H}_1$). Тогда $y = x_2/\|x_2\|$ — требуемый элемент. ⊠

§ 3. Разложение по базису

Рассмотрим вопрос о разложении элемента произвольного гильбертова пространства по его ортонормированному базису и о свойствах коэффициентов этого разложения.

Определение 7. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется полной в $\mathbb{H}$, если произвольный элемент $\mathbb{H}$ может быть сколь угодно точно* (*по норме*) *приближен линейными комбинациями элементов данной системы.*

Замечание 3. Особо отметим, что в данном определении, как и всюду, под линейными комбинациями понимаются конечные линейные комбинации, а не ряды.

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *В гильбертовом пространстве* $\mathbb{H}$ *всякая полная ортонормированная система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом, т. е. для любого* $f \in \mathbb{H}$ *имеет место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, f)\, \varphi_n, \tag{3.1}$$

причём

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, f)|^2 .$$

Доказательство.

Шаг 1. Обозначим: $\xi_n = (\varphi_n, f)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$s_p = \sum_{n=1}^{p} (\varphi_n, f)\varphi_n \equiv \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n .$$

Докажем, что при каждом фиксированном $p \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_p\| = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n \right\| .$$

□ Имеем

$$\left(f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n \right) =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 \|\varphi_n\|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n (\varphi_n, f) - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n (f, \varphi_n) =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \overline{\xi}_n =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} \overline{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \overline{\xi}_n + \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 =$$
$$= \{(\alpha_n - \xi_n)\overline{(\alpha_n - \xi_n)} = |\alpha_n|^2 + |\xi_n|^2 - \alpha_n \overline{\xi}_n - \overline{\alpha}_n \xi_n\} =$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n - \xi_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2. \tag{3.2}$$

Очевидно, что выражение в правой части минимально при

$$\alpha_n = \xi_n, \quad n = 1, \ldots, p. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Поскольку ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ полна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \exists \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{p_0} : \quad \left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \widetilde{\alpha}_n \varphi_n \right\| < \varepsilon.$$

По доказанному выше имеем в этом случае

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \xi_n \varphi_n \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{n=1}^{p_0(\varepsilon)} \widetilde{\alpha}_n \varphi_n \right\| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Более того, из (3.2) имеем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2, \tag{3.4}$$

откуда мы получаем два важных следствия:
1) величина $\|f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n\|$ не возрастает при увеличении p;
2) верно неравенство $\sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 \leqslant \|f\|^2$, а значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$$

сходится.

В силу п. 1) и неравенств (3.3) при произвольно выбранном $\varepsilon > 0$ имеем

$$\forall p \geqslant p_0(\varepsilon) \quad \|f - s_p\| < \varepsilon,$$

что и означает: $s_p \to f$ в $\mathbb{H}$ при $p \to +\infty$. Но тогда из (3.4) имеем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \right\| \to 0 \Longrightarrow \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 \to 0,$$

то есть (равенство Парсеваля)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \|f\|^2. \tag{3.5}$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В доказательстве теоремы мы не пользовались полнотой пространства $\mathbb{H}$, однако предполагали полноту системы $\{\varphi_n\}$.

Следовательно, данная теорема применима и к предгильбертову пространству. Примером предгильбертова пространства с полной ортонормированной системой является пространство $h[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, скалярное произведение в котором задано формулой

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt, \tag{3.6}$$

причём полная ортонормированная система образована функциями

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots \tag{3.7}$$

Замечание 5. Если система $\{\varphi_n\}$ не является полной, то тождество (3.2) выполняется, однако нельзя гарантировать, что $\|f - s_p\| \to \to 0$ при $p \to +\infty$, и вместо равенства Парсеваля (3.5) мы получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Иногда вместо понятия полноты ортонормированной системы удобно пользоваться понятием её замкнутости. Дадим соответствующее определение.

Определение 8. *Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется замкнутой, если единственным элементом пространства $\mathbb{H}$, ортогональным всем элементам системы $\{\varphi_n\}$, является нулевой, т. е.*

$$\forall f \in \mathbb{H} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}\,(f, \varphi_n) = 0 \ \Rightarrow \ f = \vartheta)\,.$$

Нетрудно показать, что в гильбертовом пространстве всякая полная ортонормированная система является замкнутой. В самом деле, если элемент f ортогонален всем элементам φ_n, $n \in \mathbb{N}$, то из (3.1) сразу получаем: $f = \vartheta$. В силу замечания 3 аналогичный факт верен и для предгильбертова пространства. В частности, единственной непрерывной функцией на отрезке $[0, 2\pi]$, ортогональной (в смысле скалярного произведения (3.6)) всем функциям тригонометрической системы (3.7), является функция, тождественно равная нулю.

Докажем, что в гильбертовом пространстве всякая замкнутая ортонормированная система является полной. Для этого нам потребуется лемма о замыкании подпространства.

Лемма о замыкании подпространства. *Пусть L — линейное подпространство банахова пространства $\mathbb{B}$ (не обязательно замкнутое). Тогда его замыкание $\overline{L}$ есть замкнутое линейное подпространство в $\mathbb{B}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\overline{L}$ замкнуто. Остаётся доказать, что
1) для любого $x \in \overline{L}$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ верно $\lambda x \in \overline{L}$,
2) для любых $x, y \in \overline{L}$ верно $x + y \in \overline{L}$.

В самом деле, если $x \in \overline{L}$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset \subset L$, $x_n \to x$. Но тогда и

$$\lambda x_n \to \lambda x, \;\; \lambda x_n \in L \;\; \Rightarrow \;\; \lambda x \in \overline{L}.$$

Аналогично имеем последовательность $\{y_n\} \subset L$, $y_n \to y$, и тогда

$$x_n + y_n \to x + y, \;\; x_n + y_n \in L \;\; \Rightarrow \;\; x + y \in \overline{L}.$$

Лемма доказана.

Утверждение. *В гильбертовом пространстве всякая замкнутая ортонормированная система является полной.*

Доказательство.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Очевидно, что множество L всевозможных (конечных) линейных комбинаций элементов этой системы образует в $\mathbb{H}$ линейное подпространство. В силу леммы о замыкании подпространства $\mathbb{H}_1 \equiv \overline{L}$ есть замкнутое подпространство в $\mathbb{H}$.

Пусть $f \in \mathbb{H}$ — произвольный элемент. Применим к нему и замкнутому подпространству $\mathbb{H}_1$ теорему Беппо Леви. Получим:

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathbb{H}_1, \quad f_2 \in \mathbb{H}^{\perp}.$$

Поскольку $f_2 \in \mathbb{H}^{\perp}$, то, в частности,

$$f_2 \perp \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Поскольку система $\{\varphi_n\}$ замкнутая, то из (3.8) следует, что $f_2 = \vartheta$, т. е. $f = f_1 \in \mathbb{H}_1 = \overline{L}$, что и означает, что элемент f может быть с любой наперёд заданной точностью приближен конечными линейными комбинациями элементов системы $\{\varphi_n\}$. В силу произвольности элемента f можно утверждать, что $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система.

Утверждение доказано.

Замечание 6. Можно показать, что в предгильбертовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы уже не следует её полнота и, таким образом, в отличие от случая гильбертова пространства, понятия полноты и замкнутости ортонормированной системы не эквивалентны. (См., например, замечание в конце § 3 гл. 11 книги [10].)

Вернёмся к понятию сепарабельного метрического пространства. Дадим определение.

Определение 9. *Гильбертово пространство $\mathbb{H}$ называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное мно-*

жество, *т. е. такое множество*, *замыкание которого по метрике* $\mathbb{H}$ *совпадает со всем пространством* $\mathbb{H}$.

Нетрудно заметить, что если в гильбертовом пространстве имеется счётная полная (или замкнутая) ортонормированная система, то такое пространство сепарабельно. В самом деле, счётной всюду плотной системой в сепарабельном гильбертовом пространстве является множество всех конечных линейных комбинаций этой системы с рациональными коэффициентами. (Доказать самостоятельно.)

Можно доказать ещё более сильное утверждение: всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изоморфно пространству l^2.

Лекция 19

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Теорема Рисса–Фреше

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство с сопряжённым $\mathbb{H}^*$. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема Рисса–Фреше. *Для всякого $t \in \mathbb{H}^*$ существует единственный элемент $y_t \in \mathbb{H}$ такой, что*

$$\langle t, x \rangle = (y_t, x)$$

для всех $x \in \mathbb{H}$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$. Кроме того, $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$.

Доказательство.

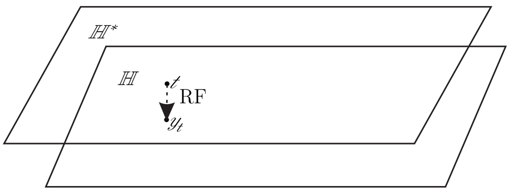

Рис. 47. Оператор Рисса–Фреше.

Шаг 0. Прежде всего докажем единственность. Действительно, пусть существуют два таких элемента $y_{1t}, y_{2t} \in \mathbb{H}$, что имеет место равенства

$$\langle t, x \rangle = (y_{1t}, x) = (y_{2t}, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_{1t} - y_{2t}, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H} \Rightarrow y_{1t} = y_{2t}.$$

Шаг 1. Пусть

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{H} : \langle t, x \rangle = 0\}.$$

В силу непрерывности t множество $\mathcal{N}$ есть замкнутое подпространство. Если $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, то

$$\langle t, x \rangle = 0 = (\vartheta, x)$$

для всех x и доказательство закончено.

Поэтому допустим, что
$$\mathcal{N} \neq \mathbb{H}.$$
Тогда в силу теоремы Беппо Леви существует $x_0 \neq \vartheta$:
$$x_0 \in \mathcal{N}^{\perp}.$$

Шаг 2. Положим
$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$
Покажем, что y_t обладает нужными свойствами. Заметим, что
$$(y_t, x) = \langle t, x_0 \rangle \frac{(x_0, x)}{\|x_0\|^2}. \tag{1.1}$$
Пусть $x \in \mathbb{H}$ произвольно. Введём вектор
$$z = \langle t, x \rangle x_0 - \langle t, x_0 \rangle x.$$
Докажем, что $z \in \mathcal{N}$. Имеем
$$\langle t, z \rangle = \langle t, x \rangle \langle t, x_0 \rangle - \langle t, x_0 \rangle \langle t, x \rangle = 0.$$
Поэтому
$$0 = (x_0, z) = \langle t, x \rangle (x_0, x_0) - \langle t, x_0 \rangle (x_0, x),$$
или
$$\langle t, x \rangle = \frac{\langle t, x_0 \rangle (x_0, x)}{\|x_0\|^2} = (y_t, x),$$
где в последнем равенстве мы использовали (1.1).

Шаг 3. Для доказательства равенства $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$ заметим, что
$$\|t\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle t, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(y_t, x)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|y_t\| \|x\| = \|y_t\|$$
и
$$\|t\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle t, x \rangle| \geqslant \left| \left\langle t, \frac{y_t}{\|y_t\|} \right\rangle \right| = \left(y_t, \frac{y_t}{\|y_t\|} \right) = \|y_t\|.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Рассмотрим отображение Рисса–Фреше
$$RF : t \in \mathbb{H}^* \mapsto y_t \in \mathbb{H},$$
определенное явной формулой
$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$
Из его вида ясно, что оно обладает свойством полулинейности

$$y_{\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2} = \overline{\langle \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} =$$

$$= \overline{\lambda_1}\overline{\langle t_1, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} + \overline{\lambda_2}\overline{\langle t_2, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} = \overline{\lambda_1}y_{t_1} + \overline{\lambda_2}y_{t_2}. \quad (1.2)$$

Внимание! Оператор RF является не линейным, а полулинейным (сопряжённо-линейным) оператором.

Замечание 2. Оператор Рисса–Фреше обратим. В самом деле, $\operatorname{Im} RF = \mathbb{H}$, поскольку любой элемент $y \in \mathbb{H}$ определяет по формуле

$$\langle t_y, x\rangle = (y, x)$$

непрерывный линейный функционал на $\mathbb{H}$ и отображение RF взаимно однозначно в силу оценки

$$\|y_t - y_s\|_{\mathbb{H}} = \{(1.2)\} = \|y_{t-s}\|_{\mathbb{H}} = \|t - s\|_{\mathbb{H}^*}.$$

Значит, существует обратный оператор $RF^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}^*$ и он также является изометричным.

§ 2. Полуторалинейные формы

Определение 1. *Полуторалинейной формой $B(x, y)$ называется функция двух переменных*

$$B(x, y) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}^1,$$

линейная по второму аргументу и полулинейная по первому аргументу:

$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2),$$
$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$

Справедлива следующая лемма о представлении полуторалинейной формы.

Лемма 1. *Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ является ограниченной, т. е. удовлетворяет неравенству*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Тогда существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, что имеет место представление

$$B(x, y) = (Ax, y).$$

Доказательство.

Шаг 1. В силу условия в лемме для всякого фиксированного $x \in \mathbb{H}$ отображение

$$y \to B(x, y)$$

является линейным и непрерывным функционалом. Значит, в силу леммы Рисса–Фреше найдется такой вектор $A(x)$, что

$$(A(x), y) = B(x, y),$$

причём отображение

$$A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является линейным в силу полулинейности формы $B(x, y)$ по x и полулинейности скалярного произведения (x, y) по x.

Шаг 2. Теперь имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|A(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |(A(x), y)| = \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)| \leqslant c \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|y\| \leqslant c\|x\|,$$

из которой вытекает ограниченность оператора A. Следовательно, в силу его линейности вытекает его непрерывность.

Значит, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма Лакса–Мильграма об обратимости оператора в представлении формы.

Лемма Лакса–Мильграма. *Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Пусть, кроме того, она коэрцитивна, т. е.

$$B(x, x) \geqslant m\|x\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H}. \tag{2.1}$$

Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ из предыдущей леммы обладает обратным A^{-1}, причём

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}. \tag{2.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Воспользуемся теоремой Банаха об обратном отображении. Для этого требуется доказать, что $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ (уже доказано в предыдущей лемме), что $\ker A = \{\vartheta\}$ и что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$.

Шаг 2. Равенство $\ker A = \{\vartheta\}$ вытекает из оценки снизу (2.1).

Шаг 3. Перейдём к доказательству того факта, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$. Заметим, что в силу свойств полуторалинейных форм и оценки снизу (2.1) полуторалинейная форма $B(x, y)$ удовлетворяет всем условиям 1)–4) из определения предгильбертова пространства. Следовательно, она определяет новое скалярное произведение на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$

$$(x, y)_1 \stackrel{\text{def}}{=} B(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Множество всех элементов пространства $\mathbb{H}$, на котором введено скалярное произведение $(x, y)_1$, образует новое предгильбертово пространство, которое мы обозначим $\mathcal{H}_1$. При этом из неравенств

$$m\|x\|^2 \leqslant B(x, x) \leqslant c\|x\|^2 \tag{2.3}$$

следует, что классы фундаментальных и сходящихся последовательностей и их пределы не меняются при переходе из $\mathbb{H}$ в $\mathcal{H}_1$, т. е.

$$\begin{aligned} \{x_n\} \text{ фундаментальна в } \mathbb{H} &\iff \{x_n\} \text{ фундаментальна в } \mathcal{H}_1, \\ x_n \to x \text{ в } \mathbb{H} &\iff x_n \to x \text{ в } \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

Это позволяет сделать вывод о том, что пространство $\mathcal{H}_1$ также гильбертово, и обозначить его $\mathbb{H}_1$.

Шаг 4. Старое скалярное произведение (x, y) можно рассматривать как полуторалинейную форму $B_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ в $\mathbb{H}_1$, причём в силу неравенств (2.3) она является ограниченной:

$$|B_1(x, y)| = |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\| \leqslant \frac{1}{m}\|x\|_1\|y\|_1,$$

где мы обозначили $\|x\|_1 = \sqrt{B(x, x)}$ — норма на $\mathbb{H}_1$.

В силу предыдущей леммы существует линейный оператор $\widehat{A} \in \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_1)$ такой, что

$$B_1(x, y) = (\widehat{A}x, y)_1 \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{H}_1.$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{H}$ с учётом того факта, что $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_1$ совпадают как множества, имеем

$$(x, y) = B_1(x, y) = (\widehat{A}x, y)_1 = B(\widehat{A}x, y) = (A(\widehat{A}x), y) \quad \text{при всех } y \in \mathbb{H}, \tag{2.4}$$

т. е. для любого элемента $x \in \mathbb{H}$ найдётся такой элемент $z = \widehat{A}x \in \mathbb{H}$, что $x = Az$.

Итак, мы показали, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{H}$, и можем применить теорему Банаха.

Шаг 5. Осталось лишь доказать неравенство (2.2). Пусть $x = A^{-1}y$. Тогда справедлива следующая цепочка:

$$\begin{aligned} &m\|A^{-1}y\|^2 \leqslant B(A^{-1}y, A^{-1}y) = (AA^{-1}y, A^{-1}y) = (y, A^{-1}y) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow m\|A^{-1}y\|^2 \leqslant \|y\|\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Транспонированный и сопряжённый операторы

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ — два гильбертовых пространства с сопряжёнными $\mathbb{H}_1^*$ и $\mathbb{H}_2^*$, со скобками двойственности и со скалярными произведениями

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_2 \quad \text{и} \quad (\cdot,\cdot)_1, \quad (\cdot,\cdot)_2.$$

Пусть задан оператор $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Напомним определение транспонированного оператора $T^t \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2^*, \mathbb{H}_1^*)$:

$$\langle T^t f, u\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, Tu\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2^*.$$

Теперь введём сопряжённый оператор $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$:

$$(T^* f, u)_1 \stackrel{\text{def}}{=} (f, Tu)_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2.$$

Докажите самостоятельно существование такого оператора T^* и его линейность, а также соотношение $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$, указав, в каких пространствах действуют операторы T_1^* и T_2^*.

ПРИМЕР 1. Пространство $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$ имеет вид

$$(f, g) = \int\limits_\Omega \overline{f(x)} g(x)\, dx,$$

а скобки двойственности имеют вид

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_\Omega f(x) g(x)\, dx.$$

Поэтому оператор Рисса–Фреше имеет вид

$$RF(f) = \overline{f}.$$

Ясно, что это полулинейное отображение.

Если ввести в соответствии с леммой Рисса–Фреше соответствующие операторы Рисса–Фреше:

$$RF_1 : \mathbb{H}_1^* \to \mathbb{H}_1, \quad RF_2 : \mathbb{H}_2^* \to \mathbb{H}_2,$$

то связь между транспонированным оператором T^t и сопряжённым оператором T^* будет следующая:

$$T^* = RF_1 T^t RF_2^{-1}.$$

Поскольку по доказанному в § 4 операторы Рисса–Фреше являются изометрическими, то согласно доказанному в § 2 лекции 9 равенству норм

$$\|T^t\| = \|T\|$$

получим, что
$$\|T^*\| = \|T\|,$$
где символом $\|\cdot\|$ мы обозначаем различные операторные нормы!!!

□ Итак, имеют место два равенства
$$T^* = RF_1 T^t RF_2^{-1}, \quad RF_1^{-1} T^* RF_2 = T^t.$$
Из первого равенства получим, что
$$\|T^*\| \leqslant \|T^t\| = \|T\|.$$
Из второго получим следующее неравенство:
$$\|T\| = \|T^t\| \leqslant \|T^*\|. \quad \boxtimes$$

Равенство нормы исходного оператора и сопряжённого оператора нами уже доказано. Кроме того, имеет место свойства полулинейности операции сопряжения
$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)^* = \overline{\alpha_1} T_1^* + \overline{\alpha_2} T_2^*.$$
Наконец, докажем, что $T^{**} = T$. Действительно,
$$(f, Tu)_2 = (T^* f, u)_1 = \overline{(u, T^* f)_1} = \overline{(T^{**} u, f)_2} = (f, T^{**} u)_2$$
при всех $u \in \mathbb{H}_1$, $f \in \mathbb{H}_2$.

§ 4. Самосопряжённый оператор

Определение 2. *Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ называется самосопряжённым, если имеет место равенство*
$$T^* = T.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ — это самосопряжённый и неотрицательный оператор, т. е. обладающий следующим свойством:*
$$(x, Tx) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{H}.$$
Тогда имеет место неравенство типа Коши–Буняковского
$$|(x, Ty)| \leqslant (x, Tx)^{1/2} (y, Ty)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Доказательство.

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$(x - \lambda y, T(x - \lambda y)) = (x, Tx) + |\lambda|^2 (y, Ty) - \lambda(x, Ty) - \overline{\lambda}(y, Tx).$$

Пусть

$$\lambda = \frac{\overline{(x, Ty)}}{(y, Ty)}.$$

После подстановки получим неравенство

$$(x, Tx) + \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} - \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} - \frac{(x, Ty)(y, Tx)}{(y, Ty)} \geqslant 0,$$

из которого с учётом самосопряжённости оператора T получим

$$(x, Tx) - \frac{|(x, Ty)|^2}{(y, Ty)} \geqslant 0.$$

Отсюда и вытекает неравенство.

Лемма доказана.

§ 5. Спектр самосопряжённого оператора

Справедлива следующая теорема о спектре самосопряжённого ограниченного оператора (на протяжении всей лекции мы рассматриваем только ограниченные операторы и иногда опускаем упоминание условия ограниченности).

Теорема 1. *Спектр самосопряжённого ограниченного оператора лежит на действительной оси.*

Доказательство.

Шаг 1. Для всех $x \in \mathbb{H}$ и $\beta \in \mathbb{R}^1$ имеет место цепочка выражений

$$\begin{aligned} \|(A + i\beta \cdot \mathrm{id})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 + \\ + i\beta(Ax, x) - i\beta(x, Ax) = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2, \end{aligned}$$

поскольку

$$(x, Ax) = (Ax, x)$$

в силу самосопряжённости оператора A. Отметим сразу, что по свойству скалярного произведения имеем

$$(x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

откуда следует, что

$$(Ax, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{H}. \tag{5.1}$$

Шаг 2. Пусть [1])

$$\mathbb{H}_0 = \mathrm{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}), \quad \mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}.$$

Докажем, что $\mathbb{H}_0$ замкнуто.

☐ Пусть $\{y_n\} \subset \mathbb{H}_0$ и

$$y_n \to y_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}.$$

Докажем, что $y_0 \in \mathbb{H}_0$. Действительно, имеем

$$y_n = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_n, \quad \|y_{n+m} - y_n\| \geqslant \beta \|x_{n+m} - x_n\|.$$

Значит,

$$x_n \to x_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}$$

и поэтому

$$y_0 = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_0 \Rightarrow y_0 \in \mathbb{H}_0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Докажем от противного, что если $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\beta \neq 0$, то $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$.

☐ Действительно, пусть $\mathbb{H}_0 \subsetneq \mathbb{H}$. Тогда в силу следствия из теоремы Беппо Леви найдётся

$$z \in \mathbb{H}_0^{\perp}, \quad \|z\| = 1.$$

Итак, имеет место цепочка равенств

$$0 = (z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = (z, Az) + i\beta \|z\|^2.$$

Тогда с учётом (5.1) имеем

$$0 = \mathrm{Im}(z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = \beta \|z\|^2 = \beta.$$

Противоречие. Значит, $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$. ⊠

Шаг 4. Итак, имеем

$$\mathrm{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = \mathbb{H}, \quad \mathrm{Ker}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = \{\vartheta\}.$$

Значит, для оператора $A + i\beta \cdot \mathrm{id}$ при $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\beta \neq 0$ в силу теоремы Банаха определён обратный. Заменой

$$A \to A + \lambda_0 \cdot \mathrm{id} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}^1$$

получим, что любой оператор вида

$$A + (\lambda_0 + i\beta) \cdot \mathrm{id}$$

обратим при $\beta \neq 0$ для всех $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$. Следовательно,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

---

[1]) Символ Im у нас используется для обозначения образа оператора и для обозначения мнимой части.

§ 6. Теорема о спектре

Введём обозначения.

$$m_- \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{(x, Ax) : \ \|x\| = 1\}, \quad m_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{(x, Ax) : \ \|x\| = 1\}.$$

Пусть оператор A является самосопряжённым.
Теорема 2. *Имеют место следующие свойства*: $\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$, $m_-, m_+ \in \sigma(A)$.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\lambda > m_+$. Тогда

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (\lambda - m_+)\|x\|^2. \tag{6.1}$$

Значит, форма

$$(y, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x)$$

коэрцитивна и поэтому оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим. Аналогично при $\lambda < m_-$ имеем

$$-(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (m_- - \lambda)\|x\|^2.$$

И, стало быть, оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим при $\lambda < m_-$.

Шаг 2. Докажем, что $m_\pm \in \sigma(A)$. Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность, что

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_-.$$

Положим

$$B = A - m_- \cdot \mathrm{id}, \quad y_n = Bx_n.$$

Оператор B самосопряжён (очевидно) и неотрицателен.

□ Действительно,

$$(x, Bx) = (x, Ax) - m_-(x, x).$$

Но

$$(x, Ax) \geqslant m_- \quad \text{при} \quad \|x\| = 1. \quad \boxtimes$$

Справедливо неравенство типа Коши–Буняковского (лемма 2 § 7).

$$|(x_n, By_n)|^2 \leqslant (x_n, Bx_n)(y_n, By_n). \tag{6.2}$$

С учётом тождества

$$(x_n, By_n) = (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) = \\ = ((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n) = \|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^2,$$

справедливого в случае самосопряжённого оператора A, получим неравенство [1])

$$\|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^4 \leqslant \\ \leqslant \big(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\big)\big((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n\big) \leqslant \\ \leqslant \big(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\big)\|A - m_- \cdot \mathrm{id}\|^3 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

при $n \to +\infty$.

Шаг 3. Итак, мы нашли такую последовательность $\{x_n\}$, что

$$\|x_n\| = 1, \quad y_n = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n \to 0$$

при $n \to +\infty$. Пусть при этом

$$m_- \notin \sigma(A) \Rightarrow m_- \in \mathrm{res}(A)$$

$$x_n = R(m_-, A)y_n \Rightarrow 1 = \|x_n\| \leqslant \|R(m_-, A)\|\|y_n\| \to 0.$$

Противоречие. Значит, $m_- \in \sigma(A)$. Аналогичным образом рассмотрим

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_+, \quad B = m_+ \cdot \mathrm{id} - A.$$

Теорема доказана.

§ 7. О норме самосопряжённого оператора

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 3. *Пусть оператор A является самосопряжённым, тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$|(x, Ax)| \leqslant \|x\|\|Ax\| \leqslant \|x\|^2\|A\| \leqslant \|A\|, \quad \|x\| = 1.$$

[1]) Здесь мы воспользовались обобщенным неравенством Коши–Буняковского (6.2).

Значит,

$$M \leqslant \|A\|.$$

Шаг 2. Установим теперь обратное неравенство. Заметим, что

$$((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y)) = \\ = 2(x, Ay) + 2(y, Ax) = 2[(x, Ay) + \overline{(x, Ay)}] = 4\,\mathrm{Re}(x, Ay).$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}(x, Ay) = \frac{1}{4}\left[((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y))\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{M}{4}\left[\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].$$

Положим в этом неравенстве

$$x = \frac{Ay}{\|Ay\|}$$

и получим неравенство

$$\|Ay\| \leqslant \frac{M}{2}\left[1 + \|y\|^2\right] = M \quad \text{при} \quad \|y\| = 1.$$

Итак,

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leqslant M.$$

Поскольку обратное неравенство было установлено выше, получаем

$$\|A\| = M.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная лемма о норме квадрата самосопряжённого оператора:

Лемма 4. *Пусть A — самосопряжённый ограниченный оператор, тогда*

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$

Доказательство.

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, A^2x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| = \\ = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = (\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|)^2 = \|A\|^2.$$

Лемма доказана.

Теперь получим формулу вычисления спектрального радиуса самосопряжённого оператора.

Лемма 5. *Пусть A — самосопряжённый ограниченный оператор. Тогда*

$$r(A) = \|A\|.$$

Доказательство.

$$r(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{2^n \to +\infty} \|A^{2^n}\|^{1/(2^n)} = \lim_{2^n \to +\infty} \|A\| = \|A\|,$$

где мы пользовались предыдущей леммой и тем фактом, что любая степень самосопряжённого оператора — самосопряжённый оператор.

Лемма доказана.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Арсеньев А. А.* Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.— 512 с.
2. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
3. *Богачев В. И.* Основы теории меры.— М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.— Т. 1.— 554 с.
4. *Брудно А. Л.* Теория функций действительного переменного.— М.: Наука, 1971.— 120 с.
5. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1956. — 344 с.
6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе.— М.:Мир, 1967.— 252 с.
7. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.
8. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Интеграл и мера.— М.: Факториал, 1998.—159 с.
9. *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1980. — 448 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. *Канторович Л. В.*, *Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с. — М.: Мир, 1962. — 897 с.
13. *Келли Дж. Л.* Общая топология.—М.: Наука, 1981.—431 с.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1972, — 496 с.
15. *Морен К.* Методы Гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
16. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. Издание третье, исправленное. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»/ СПб.: Издательство «Лань», 1999.— 560 с.
17. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. — С.-П.: 2003. — 260 с.
18. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—Т. 1.—357 с.
19. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
20. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
21. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. — М.: Научный Мир, 2008. — 400 с.

22. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
23. *Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.
24. *Хатсон В., Пим Дж.*. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.
26. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. —1072 с.
27. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск.: Тамара Рожковская, 2003. — 563 с.
28. *Adams R.* Sobolev spaces. Academic press, 1975.

КОРПУСОВ Максим Олегович
ПАНИН Александр Анатольевич

Учебное издание

Лекции по линейному и нелинейному
функциональному анализу.
Том I. Общая теория. Часть I. Лекции

Подписано к печати 01.04.2016 г.
Формат А5. Объем 15,93 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в типографии
Физического Факультета МГУ им. М.В. Ломоносова