0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 10

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Определение 1. *Линией второго порядка на плоскости называется геометрическое место точек* $M(x, y)$, *заданных своими координатами в некоторой общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, *координаты которых удовлетворяют уравнению*:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,} \tag{1.1}$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ *и коэффициенты* a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c — *это вещественные числа.*

Определение 2. *Центром кривой второго порядка называется такая точка* M, *что если точка* M_1 *лежит на этой кривой, то точка* M_2 *симметричная точке* M_1 *относительно точки* M *тоже лежит на кривой.*

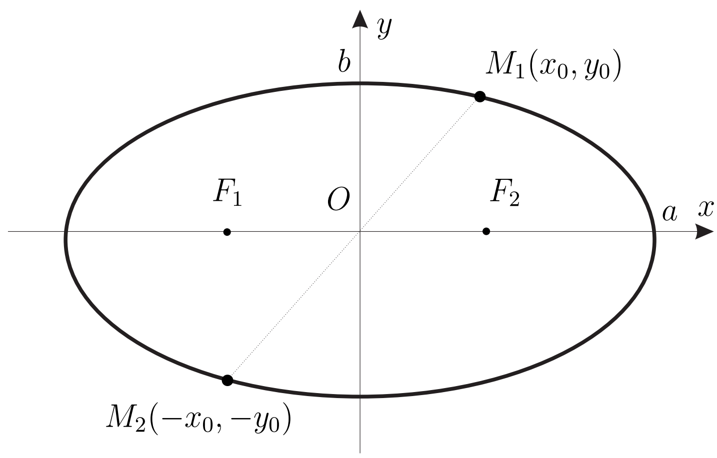

Рис. 1. Эллипс — центральная линия.

Определение 3. *Линия второго порядка называется центральной, если существует единственный центр.*

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнения эллипса и гиперболы в канонической системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Точка начала координат $O(0,0)$ является центром этих двух кривых второго порядка. Действительно, если $M(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе или одной из ветвей гиперболы, то и точка $M_0(-x_0, -y_0)$, которая симметрична точке $M_0(x_0, y_0)$ относительно точки $O(0,0)$, лежит на эллипсе или на другой ветви гиперболы.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *При переходе от одной общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ к другой общей декартовой системе координат $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ уравнение линии второго порядка переходит в уравнение линии второго порядка.*

Доказательство.

Рассмотрим следующий переход:

$$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \mapsto \{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}, \tag{1.2}$$

где базисы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ связаны следующим матричным равенством:

$$(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

При этом пусть в исходной системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ точка M плоскости имеет координаты $M(x, y)$, а в новой системе координат $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ имеет координаты $M(x', y')$. А точка O' имеет в исходной системе координат координаты $O'(x_0, y_0)$:

$$\overrightarrow{OO'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты одной и той же точки M в указанных системах координат связаны матричным равенством

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

или в развёрнутой форме

$$x = x_0 + c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = y_0 + c_{21}x' + c_{22}y'. \tag{1.5}$$

Если подставить равенства (1.5) в уравнение (1.1) линии второго порядка, то после приведения подобных слагаемых получим следующее уравнение не выше второго порядка:

$$\boxed{a_{11}'x^{2'} + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y^{2'} + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c' = 0.} \tag{1.6}$$

Предположим в этом месте, что порядок уравнения (1.6) меньше второго, т. е.

$$a_{11}^{'} = a_{12}^{'} = a_{22}^{'} = 0.$$

Тогда рассмотрим обратное преобразование

$$\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\} \mapsto \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

от новой системы координат $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ к старой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Такое преобразование задаётся аналогичным преобразованием вида

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}' & c_{12}' \\ c_{21}' & c_{22}' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Но при этом преобразовании порядок уравнения (1.6) повысится не может, а значит, с одной стороны, он останется меньше второго, а с другой стороны, после обратного преобразования мы получим исходное уравнение (1.1), которое является уравнением второго порядка.

Теорема доказана.

Теперь наша задача рассмотреть уравнение кривой второго порядка (1.1) в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. С этой целью заметим, что уравнение кривой второго порядка можно записать в следующем виде:

$$X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c = 0, \tag{1.8}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X^T = (x, y), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, b_2). \tag{1.9}$$

Если перемножить по правилу «строчка на столбец» мы из матричного равенства (1.9) получим равенство (1.1).

□ Действительно, имеем

$$X^T \cdot A \cdot X = (x, y) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= (x, y) \times \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

$$B \cdot X = (b_1, b_2) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b_1 x + b_2 y. \quad \boxtimes$$

Приведение к каноническому виду.

Шаг 1. Поворот. Если в уравнении (1.1) $a_{12} = 0$, то этот шаг пропускается. Пусть $a_{12} \neq 0$, тогда сделаем поворот прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ на угол φ и получим новую прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}\}$. Тогда координаты точки M в этих двух системах координат

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

связаны равенством

$$X = A_\varphi \cdot X', \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Отметим, что при операции транспонирования матрицы выполняется равенство

$$X^T = X'^T \cdot A_\varphi^T, \quad A_\varphi^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Поэтому, с одной стороны, после подстановки равенств (1.10) и (1.11) вы уравнение (1.8) мы получим следующее равенство:

$$X'^T \cdot A_\varphi^T \cdot A \cdot A_\varphi \cdot X + 2B \cdot A_\varphi \cdot X^{'} + c = 0. \tag{1.12}$$

С другой стороны, уравнение кривой второго порядка в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}^{'}, \mathbf{j}^{'}\}$ можно записать в следующем общем виде:

$$\boxed{a'_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c' = 0.} \tag{1.13}$$

или в матричной форме записи

$$X'^T \cdot A' \cdot X + 2B' \cdot X' + c' = 0, \tag{1.14}$$

где

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}, \quad B' = (b'_1, b'_2). \tag{1.15}$$

Из сравнения равенств (1.12) и (1.14) мы получим следующие равенства:

$$A' := A_\varphi^T \cdot A \cdot A_\varphi, \quad B' = B \cdot A_\varphi, \quad c' = c. \tag{1.16}$$

Мы с толкнулись со следующими последовательными умножениями трёх матриц:

$$A_\varphi^T \cdot A \cdot A_\varphi. \tag{1.17}$$

Здесь мы введём операцию умножения квадратных матриц размера $2 \times \times 2$ по правилу «строчка на столбец»:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Давайте последовательно перемножим матрицы в выражении (1.17). Справедливо следующее равенство:

$$A \cdot A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi & -a_{11}\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi \\ a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi & -a_{21}\sin\varphi + a_{22}\cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Теперь рассмотрим произведение

$$A_\varphi^T \cdot (A \cdot A_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi & -a_{11}\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi \\ a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi & -a_{21}\sin\varphi + a_{22}\cos\varphi \end{pmatrix} = \\ = A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

где

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \quad (1.21)$$

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi, \quad (1.22)$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi. \quad (1.23)$$

Теперь потребуем, чтобы $a'_{12} = 0$. Тогда из равенства (1.22) вытекает следующее равенство:

$$\frac{a_{22} - a_{11}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\coth 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.} \quad (1.24)$$

Таким образом, в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ мы приходим к следующему уравнению кривой второго порядка:

$$\boxed{a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0,} \quad (1.25)$$

где

$$(b'_1, b'_2) = B^{'} = B \cdot A_\varphi = (b_1, b_2) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \\ = (b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi, -b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi) \quad (1.26)$$

или в развёрнутой форме

$$b'_1 = b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi, \quad b'_2 = -b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi. \quad (1.27)$$

Шаг 2. Сдвиг. В силу теоремы 1 хотя бы один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} отличен от нуля. Справедливы следующие случаи:

Случай 1. $a'_{11} \neq 0$ и $a'_{22} \neq 0$. Тогда выделим в уравнении (1.25) полные квадраты:

$$a'_{11}\left((x')^2+2\frac{b'_1}{a'_{11}}+\left(\frac{b'_1}{a'_{11}}\right)^2\right)+a'_{22}\left((y')^2+2\frac{b'_2}{a'_{22}}+\left(\frac{b'_2}{a'_{22}}\right)^2\right)+$$
$$+c-\frac{(b'_1)^2}{a'_{11}}-\frac{(b'_2)^2}{a'_{22}}=0, \quad (1.28)$$

Сделаем преобразование

$$\{O,\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}\mapsto\{O',\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$$

к новой прямоугольной декартовой системы координат $\{O',\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ типа сдвига в новое начало координат.
З а м е ч а н и е 1. В том случае когда шаг 1 был пропущен по причине, что $a_{12}=0$, то $\{O,\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}=\{O,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$.

Соответствующее преобразование координат имеет следующий вид:

$$x''=x'+\frac{b'_1}{a'_{11}},\quad y''=y'+\frac{b'_2}{a'_{22}}. \quad (1.29)$$

Итак, в итоговой декартовой системе координат $\{O',\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ уравнении линии второго порядка примет следующий вид:

$$\boxed{a'_{11}(x'')^2+a'_{22}(y'')^2+c'=0,}\quad c'=c-\frac{(b'_1)^2}{a'_{11}}-\frac{(b'_2)^2}{a'_{22}}. \quad (1.30)$$

П о д с л у ч а й 1.1. $c'\neq 0$. Тогда уравнение (1.30) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{a}+\frac{(y'')^2}{b}=1,}\quad a=-\frac{c'}{a'_{11}},\quad b=-\frac{c'}{a'_{22}}. \quad (1.31)$$

Если $a>0$ и $b>0$, то уравнение (1.31) — это эллипс; если $a\cdot b<0$, то уравнение (1.31) — это гипербола; если $a<0$ и $b<0$, то уравнение (1.31) — это мнимый эллипс.
З а м е ч а н и е 2. Эллипс и гипербола — это единственные центральные кривые второго порядка.

П о д с л у ч а й 1.2. $c'=0$. Тогда уравнение (1.30) принимает следующий вид:

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{a}+\frac{(y'')^2}{b}=0,}\quad a=\frac{1}{a'_{11}},\quad b=\frac{1}{a'_{22}}. \quad (1.32)$$

Если $a>0$ и $b>0$, то уравнение (1.32) описывает пару пересекающихся мнимых прямых. Если $a\cdot b<0$, то уравнение (1.32) описывает пару пересекающихся действительных прямых

$$y''=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}\,x''.$$

Случай 2. Один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} равен нулю. Без ограничения общности будем считать, что $a'_{11} = 0$. Тогда уравнение (1.25) примет следующий вид:

$$\boxed{a'_{22}(y')^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + c = 0.} \tag{1.33}$$

Выделим полный квадрат при y':

$$a'_{22}\left((y')^2 + 2\frac{b'_2}{a'_{22}} + \left(\frac{b'_2}{a'_{22}}\right)^2\right) + 2b'_1 x' + c - \frac{(b'_2)^2}{a'_{22}} = 0. \tag{1.34}$$

Сделаем следующий переход

$$\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\} \mapsto \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$$

к новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$.
Замечание 3. В том случае когда шаг 1 был пропущен по причине, что $a_{12} = 0$, то $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

В координатах этот переход имеет следующий вид:

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{b'_2}{a'_{22}}. \tag{1.35}$$

Тогда уравнение (1.33) примет вид

$$\boxed{a'_{22}(y'')^2 + 2b'_1 x'' + c' = 0,} \quad c' = c - \frac{(b'_2)^2}{a'_{22}.} \tag{1.36}$$

Подслучай 2.1. $b'_1 \neq 0$. Тогда сделаем очередной переход

$$\{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\} \mapsto \{O'', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$$

к новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O'', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$, в координатах имеющий следующий вид:

$$x''' = x'' + \frac{c'}{2b'_1}, \quad y''' = y''$$

и уравнение (1.38) примет вид

$$\boxed{(y''')^2 = 2px''',} \quad p = -\frac{b'_1}{a'_{22}.} \tag{1.37}$$

Это уравнение параболы.

Подслучай 2.2. $b'_1 = 0$. Тогда уравнение (1.38) примет следующий вид:

$$\boxed{a'_{22}(y'')^2 + c' = 0} \quad \text{или} \quad (y'')^2 = a, \quad a := -\frac{c'}{a'_{22}}. \tag{1.38}$$

Если $a > 0$, то это уравнение двух прямых $y'' = \pm\sqrt{a}$; если $a < 0$, то это уравнение пары мнимых прямых; если $a = 0$, то это уравнение одной прямой $y^{''} = 0$.

Замечание 4. Заметим, что при повороте не меняются коэффициент c. При сдвиге не меняются коэффициенты a_{11}, a_{12} и a_{22}.

Из явного вида уравнения второго порядка при помощи так называемых инвариантов можно определить тип кривой. Дадим определение.

Определение 4. *Инвариантом кривой второго порядка называется такая функция её коэффициентов, которая не меняется при повороте и сдвиге прямоугольной декартовой системы координат.*

Теорема 2. *Следующие величины являются инвариантами*:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

В силу замечания 4 для доказательства инвариантности величин I_1 и I_2 достаточно рассмотреть только поворот. В силу формул (1.21) и (1.23) получаем сразу же, что

$$I_1 = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Для доказательства инвариантности I_2 мы воспользуемся еще не доказанным в курсе равенством для определителя произведения квадратных матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Поэтому в силу равенства (1.16) имеет место следующее равенство:

$$\det A^{'} = \det(A_\varphi^T \cdot A \cdot A_\varphi) = \det A_\varphi^T \cdot \det A \cdot \det A_\varphi = \det A,$$

поскольку

$$\det A_\varphi^T = \det A_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому величина I_2 является инвариантом. Доказательство инвариантности величины I_3 выходит за рамки нашего анализа.

Доказательство.

Классификация кривых второго порядка по их инвариантам.

После возможного поворота исходной прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ у нас исчезнет слагаемое с a'_{12}. Инвариант I_2 примет следующий вид:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11} \cdot a'_{22}. \tag{1.39}$$

И согласно наши предыдущим результатом кривые второго порядка делятся на следующие три класса:

1. уравнения эллиптического типа: $I_2 > 0$,

2. уравнения гиперболического типа: $I_2 < 0$,
3. уравнения параболического типа: $I_2 = 0$.

С л у ч а й 1. $I_2 \neq 0$. Для таких кривых второго порядка после поворота и сдвига системы координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ уравнение кривой примет следующий вид:

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + c' = 0.$$

При этом инвариант I_3 примет следующий вид:

$$I_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix} = c' \cdot I_2. \tag{1.40}$$

П о д с л у ч а й 1.1. $I_2 > 0$. Тогда если

$$I_1 \cdot c^{'} < 0 \Leftrightarrow I_1 \cdot \frac{I_3}{I_2} < 0 \Leftrightarrow I_1 \cdot I_3 < 0,$$

то кривая второго порядка — это эллипс:

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{1.41}$$

Если $I_1 \cdot c^{'} > 0$, то уравнение (1.41) — это мнимый эллипс. Если же $c^{'} = 0$, то уравнение (1.41) — это пара мнимых прямых.

П о д с л у ч а й 1.2. $I_2 < 0$. Тогда если $c^{'} \neq 0$, то (1.41) — это уравнение гиперболы. Если $c^{'} = 0$, то это уравнение (1.41) — это пара пересекающихся прямых.

С л у ч а й 2. $I_2 = 0$. Тогда последовательных поворота и сдвига исходной прямоугольной декартовой системы координат мы получим следующее уравнение:

$$a^{'}_{22}(y'')^2 + 2b'_1 x'' + c' = 0. \tag{1.42}$$

При этом

$$I_1 = a'_{22} \neq 0, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ b'_1 & 0 & c' \end{vmatrix} = -I_1(b'_1)^2.$$

Если $I_3 \neq 0$, то $b'_1 \neq 0$ и уравнение (1.42) — это уравнение параболического типа. Если $I_3 = 0$, то это уравнение либо пары действительных или мнимых прямых, которые могут совпадать.

§ 2. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

Пусть $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — это правая прямоугольная декартова система координат в пространстве. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 5. *Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек $M(x, y, z)$, заданных своими координа-*

тами в системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, *координаты которых удовлетворяют следующему уравнению*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (2.1)$$

где все коэффициенты уравнения вещественные числа, *причём*

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0.$$

Определение 6. *Поверхность в пространстве называется связной, если для любых двух точек* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *существует непрерывная кривая, целиком лежащая на поверхности и соединяющая эти две точки.*

Определение 7. *Поверхность называется центральной, если существует такая единственная точка* M_0, *что для любой точки* M_1, *лежащей на поверхности, то и симметричная относительно* M_0 *точка* M_2 *тоже лежит на поверхности.*

Эллипсоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение эллипсоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \qquad (2.2)$$

Свойство 1. Эллипсоид — это связная поверхность.

Свойство 2. Центр эллипсоида — точка $(0, 0, 0)$.

Свойство 3. В сечении плоскостью $z = h$ при $|h| < c$ располагается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)} + \frac{x^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}\right)} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ двуполостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \qquad (2.3)$$

Двуполостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Двуполостный гиперболоид состоит из двух несвязных частей, расположенных при $|z| \geqslant c$, причём каждая из этих двух кусков — это связные поверхности.

□ Действительно, с одной стороны, из уравнения гиперболоида вытекает следующее неравенство:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \Rightarrow |z| \geqslant c.$$

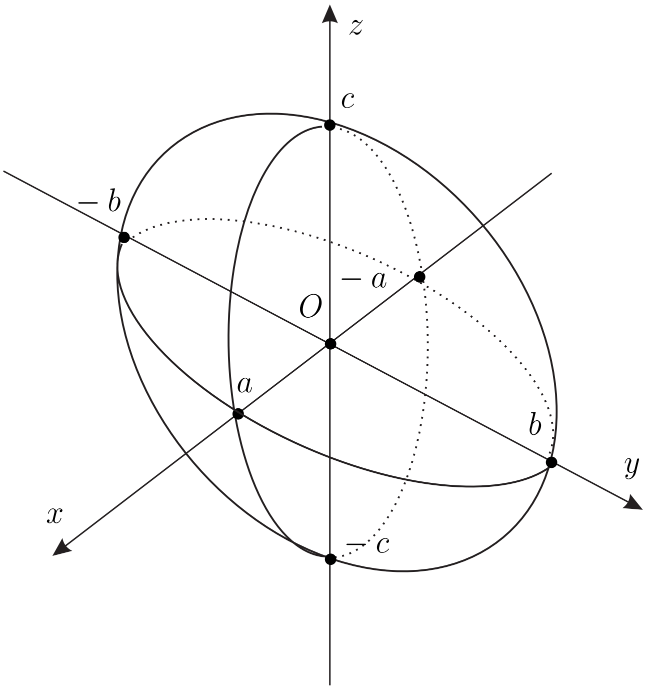

Рис. 2. Эллипсоид.

Поэтому в полосе $-c < z < c$ нет точек поверхности (2.3). С другой стороны, если $M(x, y, z)$ — это точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (2.3), то координаты точки $M(x, y, -z)$ тоже удовлетворяют уравнению (2.3). Соединим эти две точки произвольной кривой. Ясно, что эта кривая пересечёт полосу $-c < z < c$. Таким образом, поверхность (2.3) состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxy не связанных кусков.

Свойство 2. Центр — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h$ при $|h| > c$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение плоскостью $y = h$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

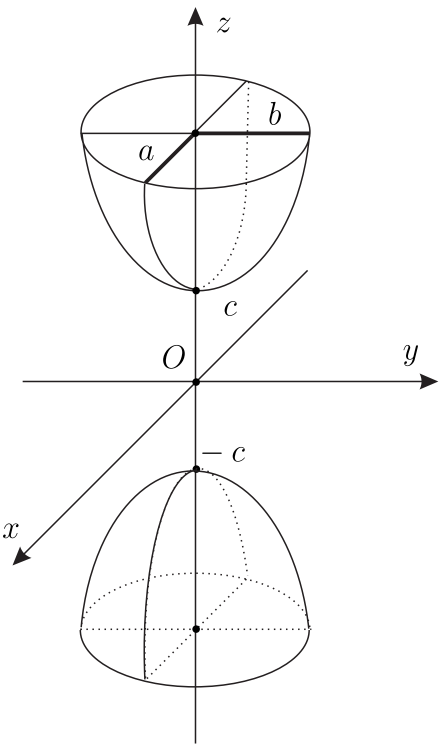

Рис. 3. Двуполостный гиперболоид.

Однополостный гиперболоид. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ однополостный гиперболоид имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0. \tag{2.4}$$

Однополостный гиперболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Однополостный гиперболоид представляет собою связную поверхность.

Свойство 2. Сечение плоскостью $z = h$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

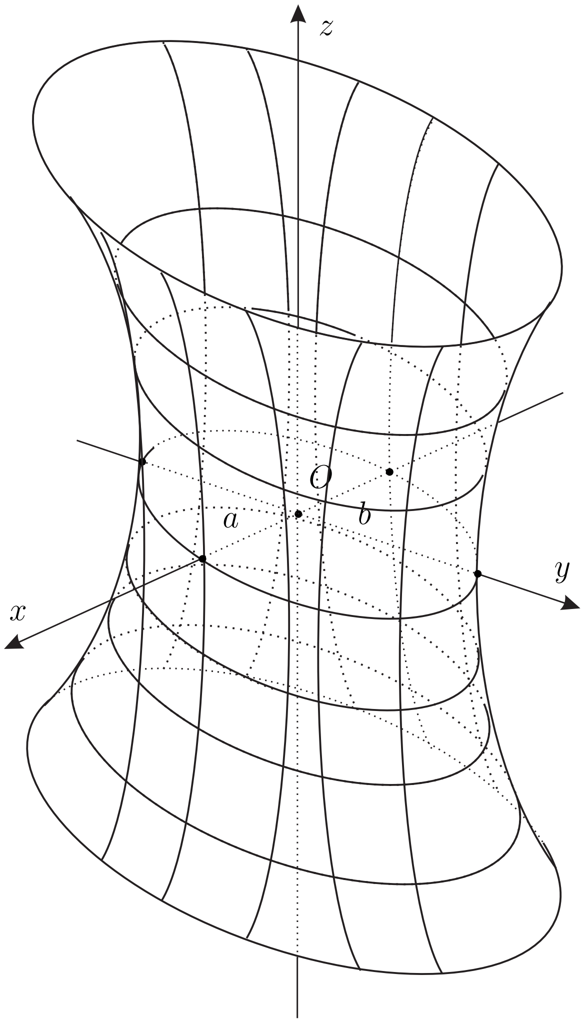

Рис. 4. Однополостный гиперболоид.

Свойство 3. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| < b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| = b$ представляет собою пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Свойство 5. Сечение плоскостью $y = h$ при $|h| > b$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

Конус. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение конуса имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Конус обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Конус — это связная поверхность.

Свойство 2. Центр конуса — точка $O(0, 0, 0)$.

Свойство 3. Сечение конуса плоскостью $z = h \neq 0$ представляет собою эллипс

$$\frac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1.$$

Свойство 4. Сечение конуса плоскостью $y = h \neq 0$ представляет собою гиперболу

$$\frac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1.$$

Свойство 5. Сечение плоскостью $y = 0$ — это пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Свойство 6. Одним из конических сечений является парабола.

Эллиптический параболоид. В <u>канонической</u> прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение эллиптического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.}$$

Эллиптический параболоид обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Эллиптический параболоид — это связная поверхность.

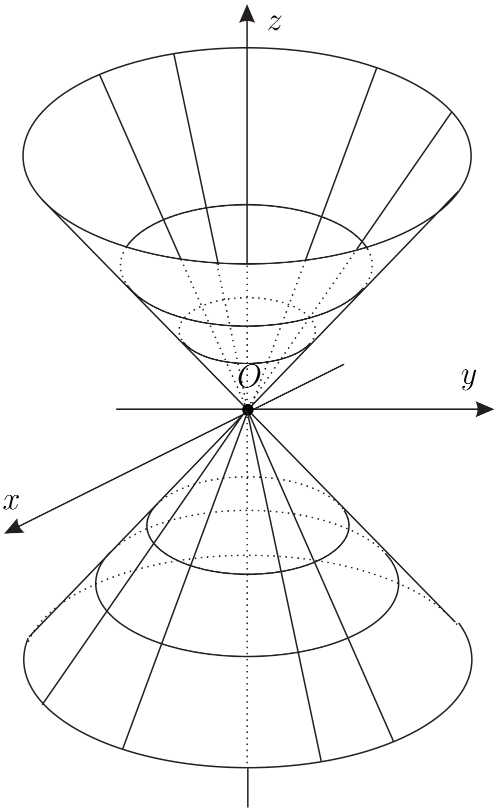

Рис. 5. Конус.

Свойство 2. Эллиптический параболоид расположен полупространстве $z \geqslant 0$.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h > 0$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2 2h} + \frac{y^2}{b^2 2h} = 1.$$

Свойство 4. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекает эллиптический параболоид по параболам.

Гиперболический параболоид. В каноническом прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение гиперболического параболоида имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

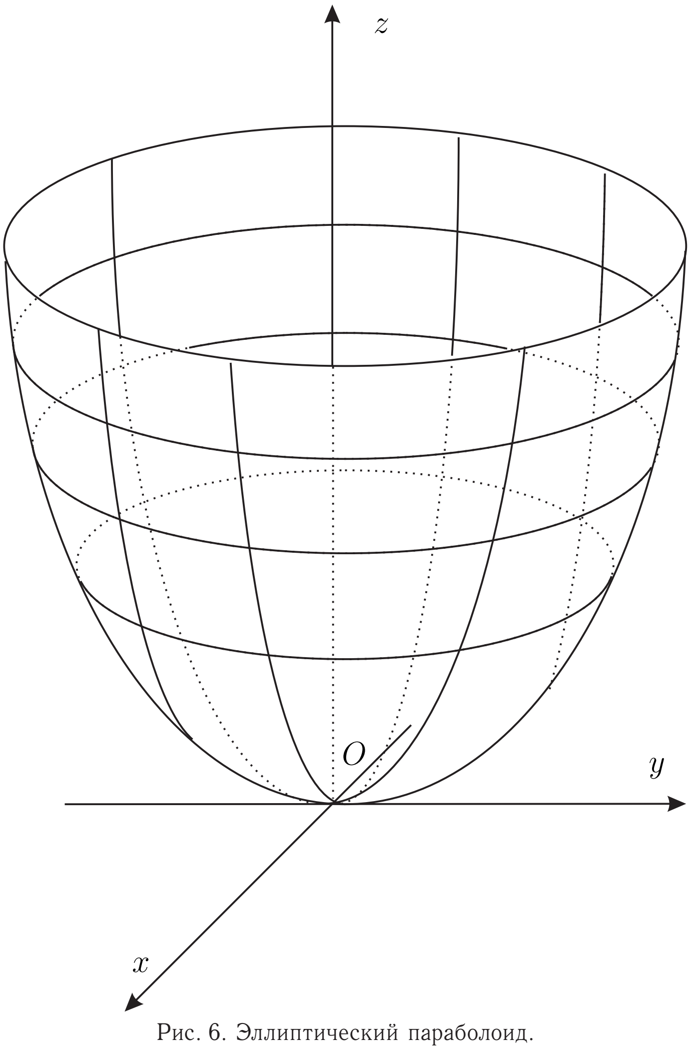

Рис. 6. Эллиптический параболоид.

С в о й с т в о 1. Гиперболический параболоид — это связная поверхность.

С в о й с т в о 2. Сечение плоскостью $z = h < 0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{-2hb^2} - \frac{x^2}{-2ha^2} = 1.$$

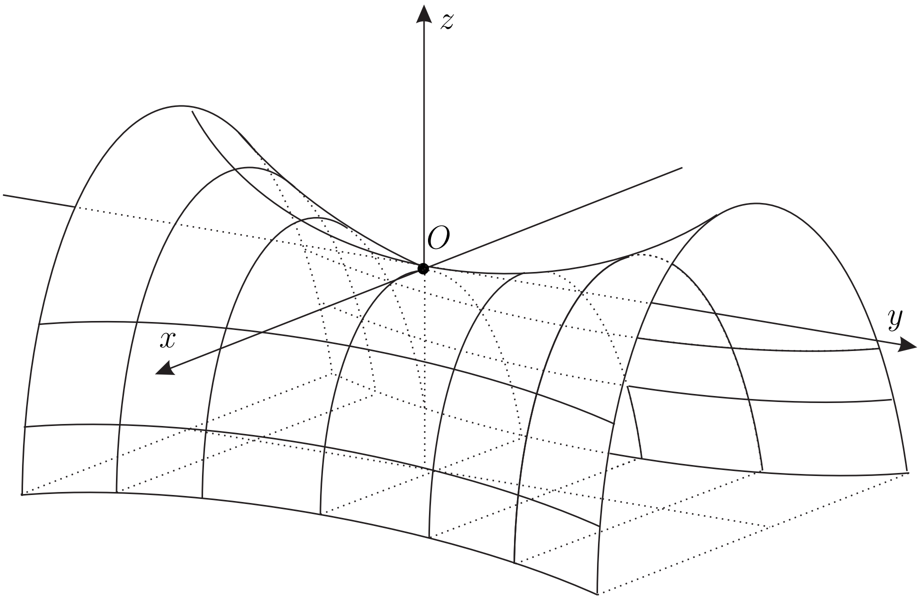

Рис. 7. Гиперболический параболоид.

Свойство 3. Сечение плоскостью $z = h > 0$ пересекает гиперболический параболоид по гиперболе

$$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1.$$

Свойство 4. Плоскость $z = 0$ пересекает гиперболический параболоид по двум прямым

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Свойство 5. Сечения плоскостями $x = h$ или $y = h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам.

Эллиптический цилиндр. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ гиперболический параболоид уравнение эллиптического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Гиперболический цилиндр. В канонической прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение гиперболического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

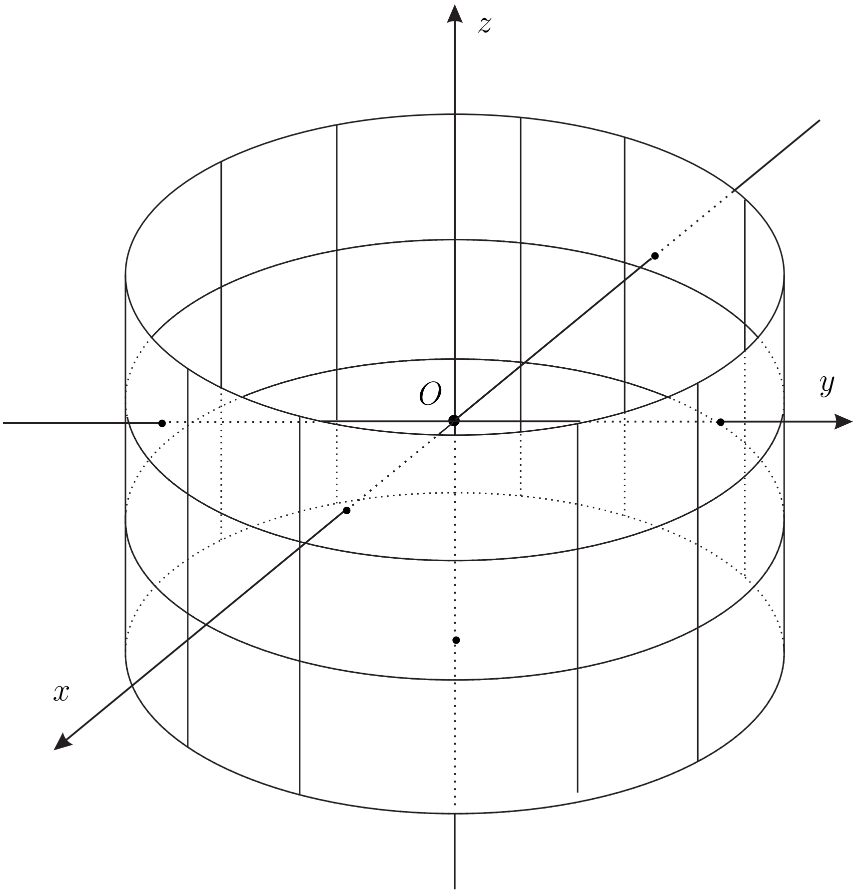

Рис. 8. Эллиптический цилиндр.

Параболический цилиндр. В каноническойпрямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ уравнение параболического цилиндра имеет следующий вид:

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

§ 3. Линейчатые поверхности

Дадим определение цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси Oz.

Определение 8. *Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обла-*

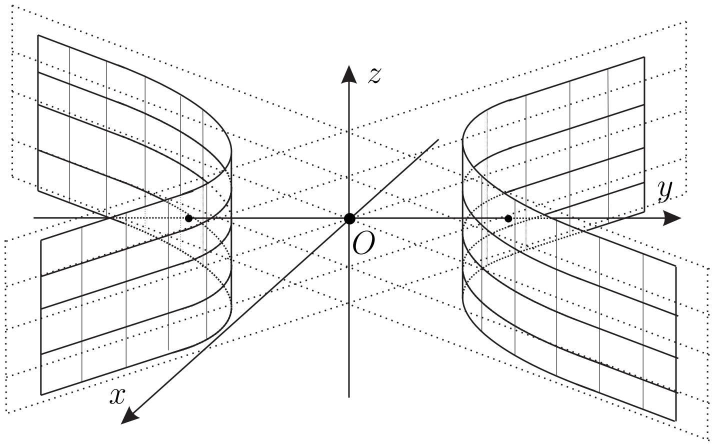

Рис. 9. Гиперболический цилиндр.

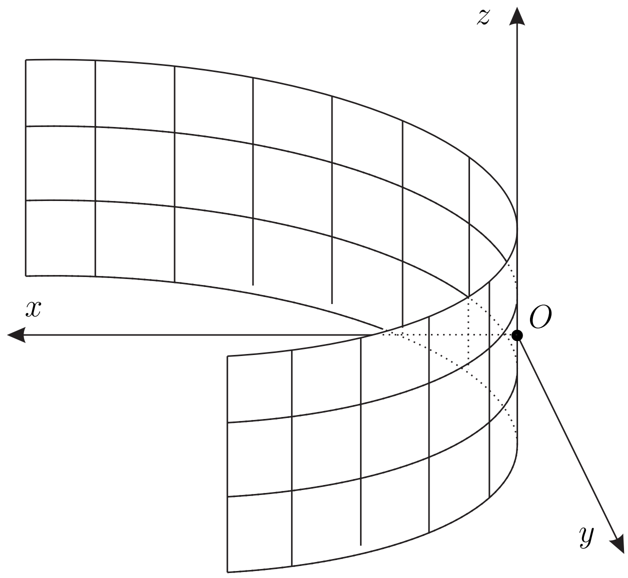

Рис. 10. Параболический цилиндр.

дает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси* Oz, *целиком лежит на* S.

Лемма 1. *Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида* $F(x, y) = 0$ *определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси* Oz.

Доказательство.

Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 2 — это поверхность цилиндра.

Лемма доказана.

Определение 9. *Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.*

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

Лемма 2. *Если $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, то уравнение*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3.1}$$

описывает конус.

Доказательство.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (3.1), и отличная от точки $O(0, 0, 0)$. Тогда прямая

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0, 0, 0)$.

Лемма доказана.

Определение 10. *Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.*

ПРИМЕР 1. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0, 0, 0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

ПРИМЕР 2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

является дважды линейчатой поверхностью.

□ Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

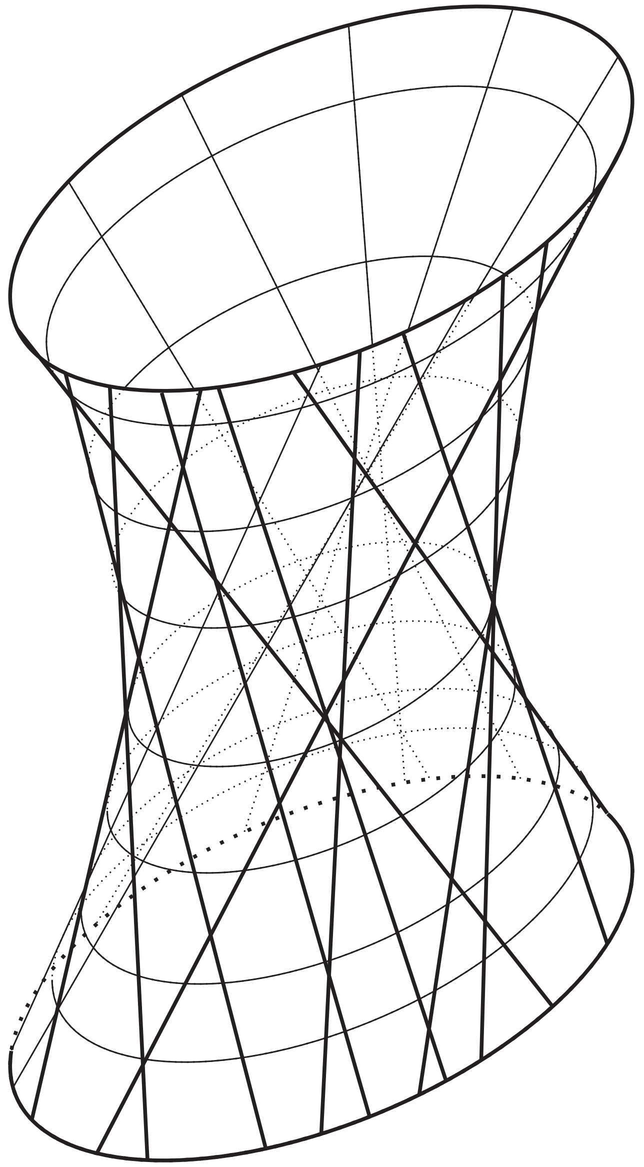

Рис. 11. Дважды линейчатая поверхность однополостного гиперболоида.

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases}$$

Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ и $(\gamma_0, \delta_0) \neq (0,0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой системы

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c} & -\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \left(\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2}\right) - \left(1 - \dfrac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta_0\left(1 - \dfrac{y}{b}\right); \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha_0\left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \delta_0\left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \gamma_0\left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из семейства (3.2) не пересекаются и любые две прямые из семейства (3.3) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (3.2).

□ Пусть прямые пересекаются в точке $M_1(x_1, y_1 z_1)$ однополостного гиперболоида, тогда определено число

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{z_1}{c}}{1 - \dfrac{y_1}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{1 + \dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{z_1}{c}},$$

поскольку

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{z_1}{c}}{1 - \dfrac{y_1}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{z_1}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (3.2) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_1, y_1, z_1)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. ☒

П Р И М Е Р 3. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

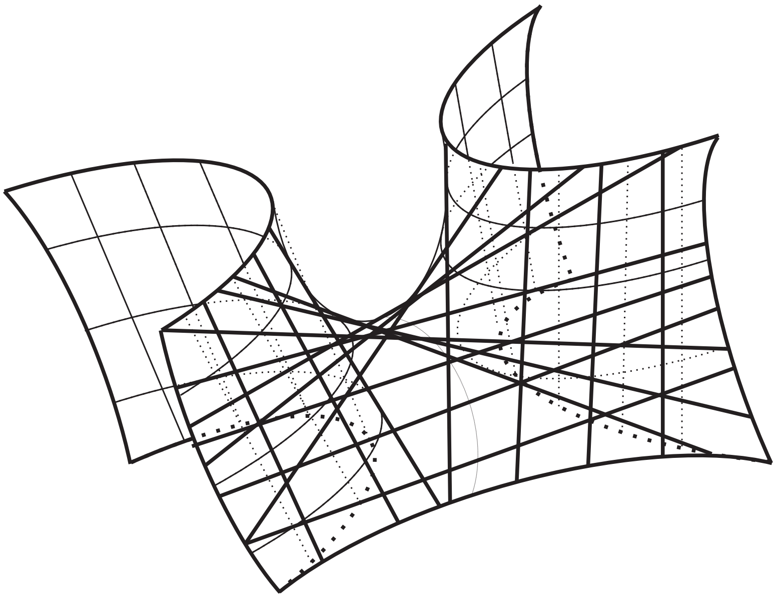

Рис. 12. Дважды линейчатая поверхность гиперболического параболоида.

☐ Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = \beta, \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\alpha z_0, \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right) = \delta, \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right) = 2\gamma z_0, \end{array}\right.$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \beta_0, \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\alpha_0 z, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \delta_0, \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\gamma_0 z. \end{cases}$$