0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 12

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО СТОЛБЦОВ

§ 1. Определения

Дадим определение.

Определение 1. *Множество всех столбцов одной и той же длины* $n \in \mathbb{N}$ *с введёнными операциями сложения столбцов и умножения столбца на вещественное число называется линейным пространством столбцов* $\mathbb{R}^n$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — это столбцы длины n, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — это вещественные числа.

Определение 2. *Линейной комбинацией столбцов называется следующая сумма*:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m. \tag{1.1}$$

Определение 3. *Линейная комбинация столбцов*

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m$$

называется нетривиальной, если $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| > 0$.

Дадим теперь определение линейной зависимости и линейной независимости столбцов.

Определение 4. *Столбцы* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная их линейная комбинация равная нулевому столбцу*:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m = O, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| > 0. \tag{1.2}$$

Определение 5. *Столбцы* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *называются линейно не зависимыми, если равенство*

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m = O$$

возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

ПРИМЕР 1. Два столбца

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми, поскольку

$$c^1A_1 + c^2A_2 = \begin{pmatrix} c^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c^1 = c^2 = 0.$$

А вот столбцы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

не являются линейно независимыми, т.е. являются линейно зависимыми, поскольку

$$B_2 - 2B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O.$$

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. *Следующие n столбцов длины n являются линейно независимыми*:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим их произвольную линейную комбинацию

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

и приравняем её нулевому столбцу:

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Значит, указанные столбцы являются линейно независимыми.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Произвольный столбец длины n может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации n столбцов* (1.3).

Доказательство.

Пусть нам задан столбец

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

тогда можно заметить, что справедливо следующее представление:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Лемма доказана.

Определение 6. *Базисом в линейном пространстве столбцов называется такое семейство линейно независимых столбцов, что любой столбец может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов этого семейства.*

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Столбцы* (1.3) *образуют базис в линейном пространстве* $\mathbb{R}^n$ *столбцов длины* n.

Доказательство.

Утверждение леммы вытекает из результатов лемм 1.1 и 1.2.

Лемма доказана.

Определение 7. *Базис* (1.3) *называется каноническим в* $\mathbb{R}^n$.

Довольно часто при решении систем линейных однородных уравнений приходится сталкиваться с рассмотрением подпространства пространства линейных столбцов длины n. Дадим следующее определение:

Определение 8. *Линейным подпространством* $P \subset \mathbb{R}^n$ *называется такое подмножество из* $\mathbb{R}^n$, *что из условия* $X_1, X_2 \in P$ *вытекает свойство*

$$\alpha X_1 + \beta X_2 \in P \quad \textit{для всех} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 2. Само пространство $\mathbb{R}^n$ и множество состоящее из одного нулевого столбца являются линейными подпространствами пространства $\mathbb{R}^n$.

Дадим определение линейной оболочки семейства столбцов.

Определение 9. *Линейной оболочкой семейства столбцов* $X_1, \ldots, X_r$ *называется множество, состоящее из всевозможных линейных комбинаций этих столбцов с произвольными вещественными числами.*

Обозначение. $L(X_1, ..., X_r)$.

ПРИМЕР 3. В линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^3$ можно выделить следующие подпространства

$$L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad L(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad L(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1),$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 10. *Линейно независимое семейство столбцов из линейного подпространства $P \subset \mathbb{R}^n$ такое, что любой столбец $X \in P$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов семейства, называется базисом линейного подпространства P.*

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4. *Разложение произвольного столбца из линейного подпространства $P \subset \mathbb{R}^n$ единственно.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ — это базис в $P \subset \mathbb{R}^n$ и для произвольного столбца $X \in P$ имеют место два разложения

$$X = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{e}_m = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{e}_m.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\alpha_m - \beta_m)\mathbf{e}_m = O.$$

Но в силу линейной независимости базиса имеем

$$\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_m - \beta_m = 0.$$

Лемма доказана.

§ 2. Свойства

Справедливы следующие свойства:

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Любое семейство столбцов с повторениями линейно зависимо.*
2. *Если в семействе столбцов $X_1, \ldots, X_r$ имеется нулевой столбец O, то это семейство линейно зависимо.*
3. *Семейство столбцов $X_1, \ldots, X_r$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих столбцов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*
4. *Если в семействе столбцов $X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_s$ имеется линейно зависимое подсемейство $X_1, \ldots, X_r$, то и все семейство линейно зависимо.*
5. *Любая часть линейно независимого семейства является линейно независимо.*

6. *Если семейство столбцов* $X_1, \ldots, X_r$ *линейно независимо, а семейство* $X_1, \ldots, X_r, X$ *линейно зависимо, то столбец* X *является линейной комбинацией семейства* $X_1, \ldots, X_r$.
7. *Если семейство столбцов* $X_1, \ldots, X_r$ *линейно независимо, а столбец* X *нельзя через них выразить, то семейство столбцов* $X_1, \ldots, X_r, X$ *также линейно независимо.*
8. *Если семейство столбцов* $X_1,\ X_2, \ldots, X_p$ *является линейно независимым, то никакой из столбцов этого семейства не может линейно выражаться через остальные столбцы.*

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть, например, в семействе $X_1, \ldots, X_r$ первый и второй столбцы совпадают $X_1 = X_2$. Тогда справедливо равенство

$$1 \cdot X_1 + (-1) \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + \cdots + 0 \cdot X_r = O,$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

2. □ Действительно, пусть например первый столбец $X_1 = O$ в семействе $X_1, \ldots, X_r$. Тогда

$$1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \cdots + 0 \cdot X_r = O,$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

3. □ Действительно, пусть семейство стобцов $X_1, \ldots, X_r$ линейно зависимо. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r = O.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$X_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} X_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1} X_r.$$

Наоборот пусть

$$X_1 = \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_r X_r \Leftrightarrow (-1) \cdot X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_r X_r = O. \quad ⊠$$

4. □ Действительно, пусть семейство $X_1, \ldots, X_r$ линейно зависимые, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r$, что

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r = O \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_s = O. \quad ⊠$$

5. □ Действительно, это следствие утверждения 4. ⊠

6. □ Действительно, поскольку семейство столбцов $X_1, \ldots, X_r, X$ линейно зависимо, то найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$, что

$$\alpha X + \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r = O.$$

Предположим, что $\alpha = 0$, но тогда в силу линейной независимости семейства $X_1, \dots, X_r$ отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

Пришли к противоречию с условием нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ⊠

7. □ Действительно, это следствие утверждения 6. ⊠

Теорема доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 2. *Если столбцы $Y_1, \dots, Y_s \in L(X_1, \dots, X_r)$, причём $s > r$, то столбцы $Y_1, \dots, Y_s$ линейно зависимы.*

Доказательство.

Введём обозначения.

$$X = (X_1, \dots, X_r), \quad Y = (Y_1, \dots, Y_s). \tag{2.1}$$

Итак, X — это строчка длины r, а Y — это строчка длины $s > r$. По условию

$$\begin{array}{c} Y_1 = a_1^1 X_1 + a_1^2 X_2 + \dots + a_1^r X_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_s = a_s^1 X_1 + a_s^2 X_2 + \dots + a_s^r X_r \end{array}. \tag{2.2}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (2.1) и (2.3) выражение (2.2) можно переписать в следующем виде:

$$Y = X \cdot A. \tag{2.4}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \dots + a_s^2 z^s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \dots + a_s^r z^s = 0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Поскольку в однородной системе линейных уравнений (2.6) число переменных s больше числа уравнений r существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию столбцов $Y_1, \ldots, Y_s$:

$$z_0^1 Y_1 + \cdots + z_0^s Y_s = Y Z_0 = X A Z_0 = X O = O. \tag{2.8}$$

Следовательно, столбцы $Y_1, \ldots, Y_s$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 3. *Если столбцы $Y_1, \ldots, Y_s$, принадлежащие линейной оболочке $L(X_1, \ldots, X_r)$, линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

§ 3. Размерность линейного подпространства

Определение 11. *Число $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ называется размерностью линейного подпространства $P \subset \mathbb{R}^n$, если в P существует m линейно независимых столбцов, а всякие $m+1$ столбцов линейно зависимы.*

Обозначение. $\dim P$.

ПРИМЕР 4. Нулевое линейное подпространство $\{O\} \in \mathbb{R}^n$, состоящее из нулевого столбца не имеет базиса, поэтому его размерность равна числу 0. Размерность всего линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^n$ равно n.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Все базисы линейного подпространства $P \subset \mathbb{R}^n$ состоят из одного и того же числа m столбцов, это число равно размерности линейного подпространства P.*

Доказательство.

Пусть $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s\}$ — это два базиса в линейном подпространстве $P \subset \mathbb{R}^n$. Тогда, с одной стороны, в силу теоремы 3

$$L(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r) = P \Rightarrow L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s) \subset P = L(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r) \Rightarrow s \leqslant r.$$

С другой стороны,

$$L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s) = P \Rightarrow L(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r) \subset P = L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s) \Rightarrow r \leqslant s.$$

Итак, $r = s = m$. Согласно определению базиса в P существует m линейно независимых столбцов и любой столбец выражается через базисные. Значит, любые $m+1$ столбец линейно зависимы. Значит, число элементов в базисе совпадает с размерностью подпространства.

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема о монотонности размерности:
Теорема 5. *Пусть P и Q — это два линейных подпространства в $\mathbb{R}^n$, причём $Q \subset P$. Тогда*

1. $\dim Q \leqslant \dim P$;
2. *если* $\dim Q = \dim P$, *то* $Q = P$.

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть $X_1, \ldots, X_r$ — это базис в P, а $Y_1, \ldots, Y_s$ — это базис в Q. Тогда в силу условия теоремы имеем $Q \subset P$ и поэтому

$$Y_1, \ldots, Y_s \in L(X_1, \ldots, X_r).$$

В силу теоремы 3 имеем $\dim Q = s \leqslant r = \dim P$. ☒

2. □ Действительно, пусть $Y_1, \ldots, Y_s$ — это базис в Q, т.е. $s = \dim Q$. Предположим, что $Q \neq P$. Тогда найдется такой столбец $Z \in P$, что $Z \notin Q$. Этот столбец нельзя представить через базис $Y_1, \ldots, Y_s$. Следовательно, семейство

$$Y_1, \ldots, Y_s, Z$$

линейно независимое в P. Таким образом, $\dim P \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. ☒

Теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы является следующее:

Следствие. *Если $P \subset \mathbb{R}^n$ — это линейное подпространство, то $\dim P \leqslant n$.*