0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 5

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 1. Проекция вектора на ось

Дадим определение.

Определение 4. *Осью называется прямая, на которой указано направление.*

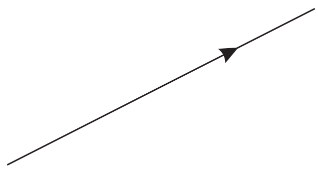

Рис. 1. Ось.

Пусть $A^{'}$ и $B^{'}$ — это ортогональные проекции точек A и B на ось l соответственно. Дадим определение.

Определение 5. *Величиной направленного отрезка* $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ *называется следующее число*:

$$A^{'}B^{'} := \begin{cases} |\overrightarrow{A^{'}B^{'}}|, & \textit{если} \quad \overrightarrow{A^{'}B^{'}} \uparrow\uparrow u, \\ -|\overrightarrow{A^{'}B^{'}}|, & \textit{если} \quad \overrightarrow{A^{'}B^{'}} \uparrow\downarrow u. \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{e}$ — это произвольный единичный вектор ($|\mathbf{e}| = 1$), лежащий на оси u, причём направления оси u и вектора $\mathbf{e}$ совпадают. Тогда найдётся такое вещественное число x, что

$$\overrightarrow{A^{'}B^{'}} = x \cdot \mathbf{e}. \tag{1.2}$$

Докажем, что величина $A^{'}B^{'}$ направленного отрезка $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ равна этому числу x :

$$A^{'}B^{'} = x. \tag{1.3}$$

□ Действительно, если $x > 0$, то направленный отрезок $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{e}$, а значит сонаправлен с осью u. Поэтому

$$A^{'}B^{'} = |\overrightarrow{A^{'}B^{'}}| = |x| = x.$$

Если же $x < 0$, то направленный отрезок $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ и вектор $\mathbf{e}$ противоположно направлены, а значит, направленный отрезок $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ противоположно направлен оси u. Тогда

$$A^{'}B^{'} = -|\overrightarrow{A^{'}B^{'}}| = -|x| = x.$$

Итак, в любом случае выполнено равенство (1.3). ⊠

Следствие 1. *Равные направленные отрезки имеют равные величины.*

□ Действительно, пусть направленные отрезки $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$ и $\overrightarrow{C^{'}D^{'}}$ — это равные направленные отрезки. Тогда

$$\overrightarrow{A^{'}B^{'}} = \overrightarrow{C^{'}D^{'}} = x \cdot \mathbf{e}.$$

С другой стороны, по доказанному

$$A^{'}B^{'} = x = C^{'}D^{'}. \quad ⊠$$

Определение 6. *Ортогональной проекцией направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина направленного отрезка $\overrightarrow{A^{'}B^{'}}$.*

Обозначение. $\text{Пр}_u\overrightarrow{AB}$.

Замечание 1. В случае свободного вектора $\mathbf{a}$, порождённого направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, его проекция определяется точно таким же равенством

$$\text{Пр}_u\mathbf{a} = A^{'}B^{'}, \tag{1.4}$$

где правая часть не зависит от выбора $\overrightarrow{AB}$.

Нетрудно доказать следующее утверждение:

Лемма 1. *Ортогональная проекция вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ на ось u равна длине вектора $\mathbf{a}$, умноженный на косинус угла φ между положительным направлением оси и вектором $\mathbf{a}$:*

$$\text{Пр}_u\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi. \tag{1.5}$$

Доказательство. Отложим вектор $\mathbf{a}$ от какой–либо точки O оси u. Получим направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$. Пусть φ угол между положительным направлением оси u и направлением направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$. Нужно отдельно рассмотреть два принципиальных случая.

Случай 1. Угол $\varphi \in [0, \pi/2)$. Пусть O' и A' — это ортогональные проекции точек O и A на ось u. По построению $O' = O$ и справедливо следующие равенства:

$$\text{Пр}_u \mathbf{a} = O'A' = OA' = |\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}| \cos\varphi = |\mathbf{a}| \cos\varphi.$$

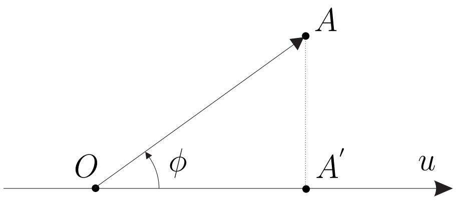

Рис. 2. К первому случаю.

Случай 2. Угол $\varphi \in (\pi/2, \pi]$. Пусть $\alpha = \pi - \varphi$. Тогда в введённых обозначениях справедлива следующая цепочка равенств:

$$\text{Пр}_u \mathbf{a} = OA' = -|\overrightarrow{OA'}| = -|\overrightarrow{OA}| \cos\alpha = -|\mathbf{a}| \cos(\pi - \varphi) = |\mathbf{a}| \cos\varphi.$$

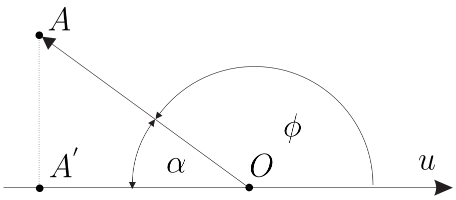

Рис. 3. Ко второму случаю.

Случай 3. Угол $\varphi = \pi/2$. Тогда согласно определению проекции вектора на ось имеем

$$\text{Пр}_u \mathbf{a} = 0 = |\mathbf{a}| \cos\frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана.

§ 2. Декартовы системы координат

Определение 7. *Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину и являются взаимно перпендикулярными.

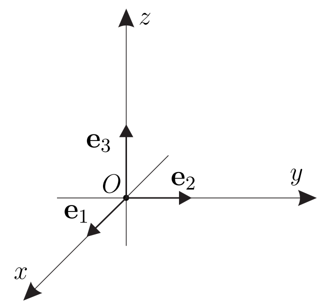

Рис. 4. Декартова система координат в пространстве и её орты.

З а м е ч а н и е 2. *Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не компланарны, то они линейно независимы и поэтому образуют базис в пространстве.*

О п р е д е л е н и е 8. *Осями координат Ox, Oy, Oz называются оси, проведённые через точку O параллельно векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, причём положительные направления осей совпадают с направлениями этих векторов соответственно.*

О б о з н а ч е н и е. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

О п р е д е л е н и е 9. *Радиусом–вектором $\mathbf{r}$ точки M пространства относительно фиксированной точки O называется направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$.*

О п р е д е л е н и е 10. *Координатами точки M пространства называются координаты радиуса–вектора этой точки в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \tag{2.1}$$

где векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ отложены от точки O.

О б о з н а ч е н и е. $M(x, y, z)$.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\mathbf{d}$ равны ортогональным проекциям этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Отложим вектор $\mathbf{d}$ от точки O и получим направленный отрезок $\overrightarrow{OD}$. Ортогонально спроецируем точку D на оси координат и получим точки $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$.

По определению ортогональной проекции на ось имеем

$$OA = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OD}, \quad OB = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OD}, \quad OC = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OD}.$$

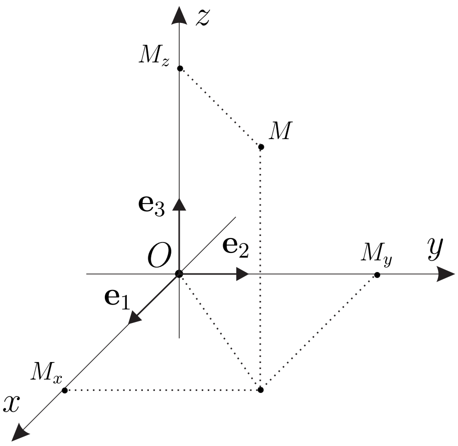

Рис. 5. Декартовы координаты точки M пространства.

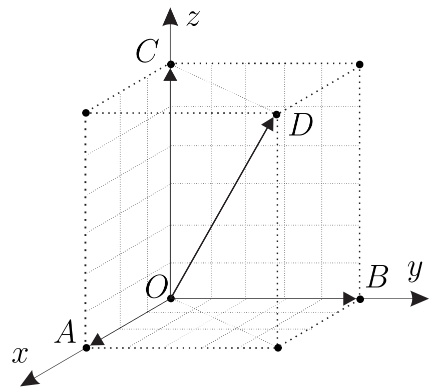

Рис. 6. Ортогональные проекции точки D.

Согласно правилу параллелограмма сложения векторов имеем

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}_1$, направленный отрезок $\overrightarrow{OB}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}_2$, направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}_3$. Поэтому найдутся такие числа x, y, z, что

$$\overrightarrow{OA} = x\mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = y\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OC} = z\mathbf{e}_3.$$

Отсюда, имеем, что

$$\mathbf{d} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Шаг 2. Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z.$$

□ Действительно, докажем, например, равенство $OA = x$. С одной стороны, согласно определению величины направленного отрезка на оси справедливо следующее равенство:

$$OA = \begin{cases} |\overrightarrow{OA}|, & \text{если} \quad \overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \mathbf{e}_1; \\ -|\overrightarrow{OA}|, & \text{если} \quad \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{2.2}$$

С другой стороны, имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{e}_1$. Поэтому, если $x > 0$, то $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \mathbf{e}_1$ и

$$|\overrightarrow{OA}| = |x| = x \quad \text{при} \quad x > 0; \tag{2.3}$$

если $x < 0$, то $\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \mathbf{e}_1$ и

$$|\overrightarrow{OA}| = |x| = -x. \tag{2.4}$$

После подстановки равенств (2.3) и (2.4) в равенство (2.2) мы получим искомое равенство $OA = x$. ⊠

Значит,

$$\text{Пр}_{Ox}\mathbf{d} = OA = x, \quad \text{Пр}_{Oy}\mathbf{d} = OB = y, \quad \text{Пр}_{Oz}\mathbf{d} = OC = z.$$

Теорема доказана.

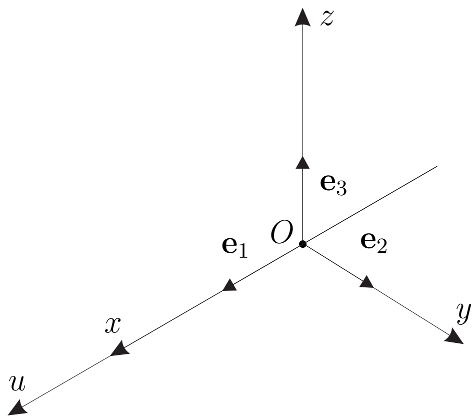

Рис. 7. К лемме 2.

Справедливы следующие свойства:

Лемма 2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *любых числа* λ *и оси* u *справедливы следующие равенства*:

$$\text{Пр}_u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Пр}_u\mathbf{a} + \text{Пр}_u\mathbf{b}, \tag{2.5}$$

$$\text{Пр}_u(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\text{Пр}_u\mathbf{a}. \tag{2.6}$$

Доказательство.

Введём прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ таким образом, чтобы $O \in u$ и вектор $\mathbf{e}_1$ был сонаправлен с осью u. Пусть

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (y_1 + y_2)\mathbf{e}_2 + (z_1 + z_2)\mathbf{e}_3.$$

По результату теоремы 1 имеем

$$\text{Пр}_u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = x_1 + x_2 = \text{Пр}_u\mathbf{a} + \text{Пр}_u\mathbf{b}.$$

Докажем теперь равенство (2.6). Пусть в той же прямоугольной декартовой системе координат

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \lambda \cdot \mathbf{a} = (\lambda x)\mathbf{e}_1 + (\lambda y)\mathbf{e}_2 + (\lambda z)\mathbf{e}_3.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\text{Пр}_u(\lambda \cdot \mathbf{a}) = \lambda \cdot x = \lambda \cdot \text{Пр}_u\mathbf{a}.$$

Лемма доказана.

По аналогии можно ввести декартову косоугольную систему координат.

Определение 11. *Косоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ являются некомпланарными.

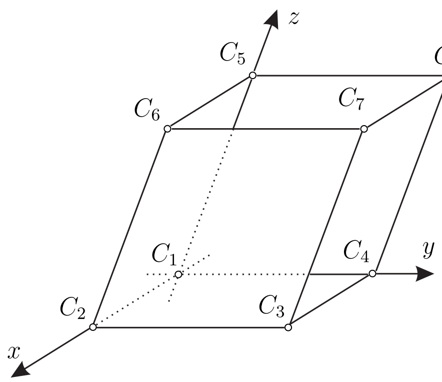

Рис. 8. Косоугольная система координат в пространстве, связанная с кристаллической решеткой.

Аналогичным образом вводятся декартовы системы координат на плоскости.

§ 3. Направляющие косинусы

Пусть рассматриваемая точка M имеет координаты (x, y, z) в некоторой прямоугольной декартовой системе координат. Тогда

$$x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{3.1}$$

$$y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{3.2}$$

$$z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma. \tag{3.3}$$

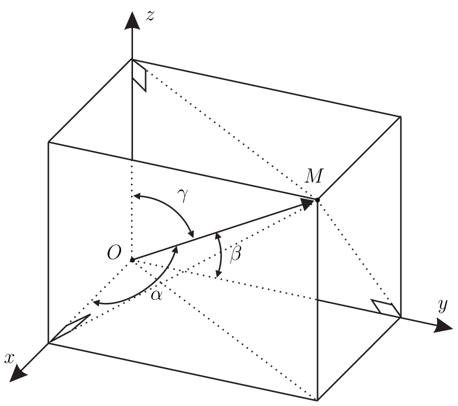

Рис. 9. Углы между радиус–вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

Поскольку

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{3.4}$$

то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{3.5}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{3.6}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{3.7}$$

Определение 12. *Числа* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *называются направляющими косинусами радиус–вектора* $\overrightarrow{OM}$.

Очевидно, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.8}$$

Замечание 3. С одной стороны, для того чтобы однозначно определить точку M пространства достаточно задать длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ и его направляющие косинусы. С другой стороны, задание двух из трёх направляющих косинуса и длины радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ определяет не одну, а две точки! Действительно, пусть задана длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ и направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, тогда мы из равенства (3.8) получим равенство

$$|\cos\gamma| = 1 \Leftrightarrow \cos\gamma = \pm 1.$$

Итак, мы имеем две точки, лежащие на одно прямой

$$M_1(r, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \text{и} \quad M_2(r, \cos\alpha, \cos\beta, -\cos\gamma),$$

причём угол между векторами $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ равен π.

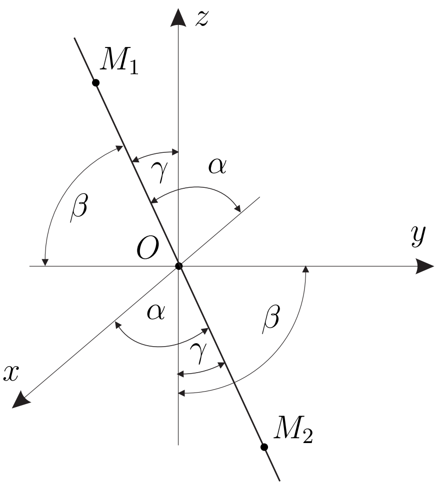

Рис. 10. Точки M_1 и M_2.

§ 4. Полярная система координат

Определение 13. *Полярной системой координат на заданной плоскости называется упорядоченная двойка $\{O, \mathbf{e}\}$, где O — это некоторая фиксированная точка, называемая полюсом, а $\mathbf{e}$ — это ненулевой вектор принадлежащий данной плоскости.*

Определение 14. *Ось, проходящая через точку O параллельно вектору $\mathbf{e}$ и сонаправленная этому вектору, называется полярной осью.*

Определение 15. *Полярными координатами точки M на плоскости является упорядоченная двойка (ρ, φ), где*

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \tag{4.1}$$

а φ — это угол между полярной осью и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки.

З а м е ч а н и е 4. По своему определению $0 \leqslant \rho < +\infty$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Для полюса O не определён угол φ, но полюс вполне определяется равенством $\rho = 0$. Иногда удобно отсчитывать угол по часовой стрелки.

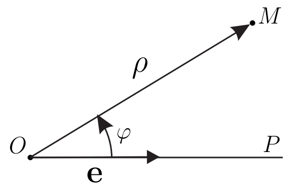

Рис. 11. Полярная система координат на плоскости и полярные координаты (ρ, φ) точки M.

Тогда отсчитываемый угол считается отрицательным. Например,

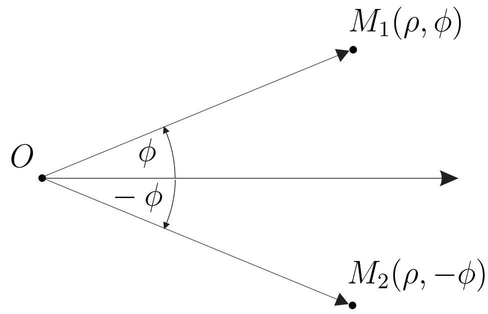

Рис. 12. Отрицательный угол.

Можно указать формулы перехода от полярных координат (ρ, φ) на плоскости π к декартовым координатам (x, y) точки M в случае специальным образом выбранной прямоугольной декартовой системы координат Oxy на той же плоскости π.

Пусть $\{O, \mathbf{e}\}$ — это фиксированная полярная система координат.

1. Выберем в качестве оси абсцисс Ox — полярную ось OP.

2. Ось ординат Oy выберем таким образом, чтобы ось абсцисс Ox поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$ совмещалась с осью Oy с учётом их направления. Заметим, что такая система координат Oxy называется правой.

Мы ввели вспомогательные точки $M_x(x, 0)$ и $M_y(0, y)$ — ортогональные проекции точки $M(x, y)$ на соответствующие оси декартовой системы координат Oxy. Итак, с одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y,$$

причём в силу результата теоремы 1 справедливы равенства

$$x = OM_x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM}, \quad y = OM_y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM}. \tag{4.2}$$

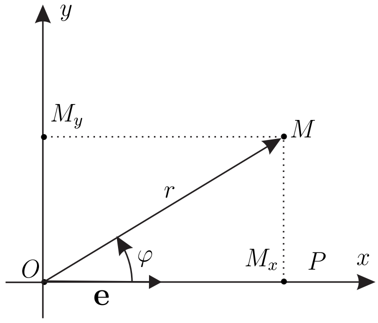

Рис. 13. Полярная система координат на плоскости и специальная прямоугольная система координат.

С другой стороны, в силу леммы 1 имеют место следующие равенства:

$$OM_x = |\overrightarrow{OM}|\cos\varphi, \quad OM_y = \overrightarrow{OM}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi. \tag{4.3}$$

Итак, из равенств (4.2) и (4.3) вытекают следующие формулы:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{4.4}$$

Имеют место обратные формулы

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{4.5}$$

§ 5. Цилиндрическая система координат

Определение 16. *Цилиндрической системой координат называется упорядоченная четвёрка $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, где π — это некоторая фиксированная плоскость в пространстве, O — это некоторая фиксированная точка на плоскости π, $\mathbf{n}$ — это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости и, наконец, $\mathbf{e}$ — это ненулевой вектор, лежащий в плоскости π.*

Через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$ проведём ось Oz.

Определение 17. *Цилиндрическими координатами точки M в цилиндрической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ называется упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z), где (ρ, φ) — это полярные координаты ортогональной проекции M_{xy} точки M на плоскость π в полярной системе координат $\{O, \mathbf{e}\}$, а z — это координата ортогональной проекции M_z точки M на ось Oz, т. е. $\overrightarrow{OM_z} = z\mathbf{n}$.*

Замечание 5. Отметим, что точки лежащие на оси Oz вполне определяются своей декартовой координатой z и равенством $\rho = 0$ и не имеют угловой координаты φ.

С выбранной системой цилиндрических координат можно как и ранее связать специальную прямоугольную декартову систему коор-

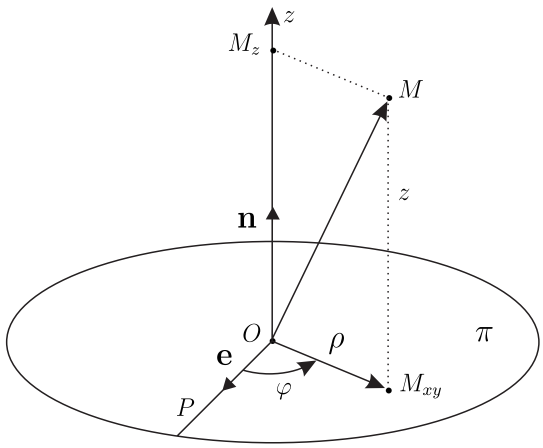

Рис. 14. Цилиндрическая система координат.

динат $Oxyz$ в пространстве Π, выбрав на плоскости π как и ранее прямоугольную систему декартовых координат Oxy.

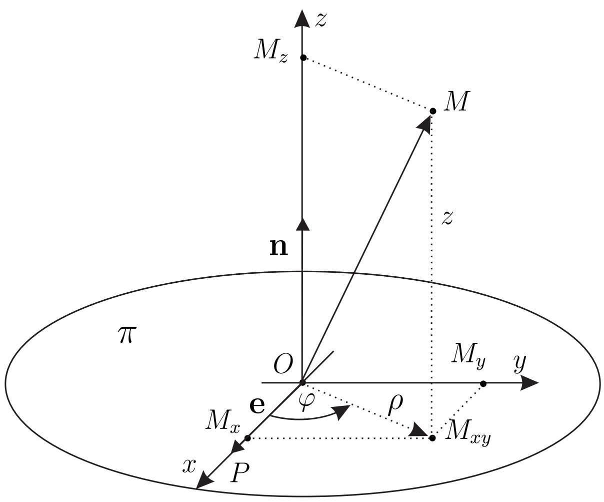

Рис. 15. Цилиндрическая система координат и специальная декартова система координат $Oxyz$.

Формулы связывающие цилиндрические координаты (ρ, φ, z) с декартовыми координатами (x, y, z) в специальной декартовой системе координат, в которой имеют следующий вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \tag{5.1}$$

П Р И М Е Р 2. Уравнение кругового параболоида в декартовой прямоугольной системе координат с координатами (x, y, z) имеем следующий вид:

$$z = x^2 + y^2,$$

а в связанной с этой декартовой системы координат цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) уравнение кругового параболоида имеет следующий вид:

$$z = \rho^2,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0.$$

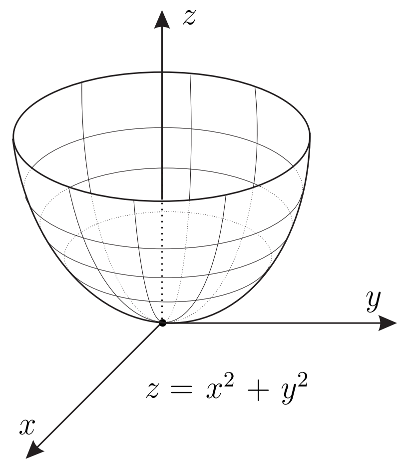

Рис. 16. Эллиптический параболоид.

П Р И М Е Р 3. Уравнение кругового конуса в некоторой прямоугольной декартовой системе координат с координатами (x, y, z) имеет следующий вид:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

а в связанной цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) имеет следующий вид:

$$|z| = \rho,$$

где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho \geqslant 0.$$

§ 6. Сферическая система координат

О п р е д е л е н и е 18. *Сферической системой координат называется упорядоченная четвёрка* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, *где* π *— это некоторая*

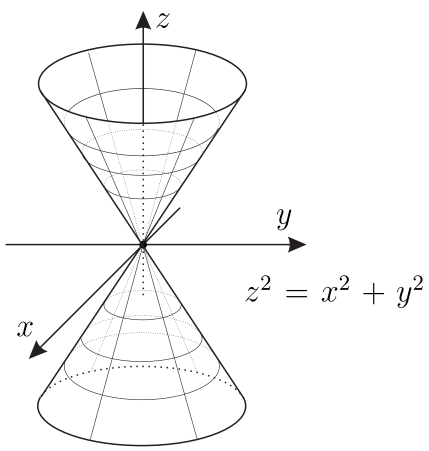

Рис. 17. Эллиптический конус.

фиксированная плоскость в пространстве, O — *это некоторая фиксированная точка на плоскости* π, $\mathbf{n}$ — *это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости и, наконец,* $\mathbf{e}$ — *это ненулевой вектор, лежащий в плоскости* π.

Замечание 6. Определения 18 и 16 совпадают. Различие сферической системы координат от цилиндрической системы координат заключается в записи координат точки.

Сначала проведём через точку $O \in \pi$ ось, сонаправленную вектору $\mathbf{n}$. Полученную ось назовём ось Oz.

Пусть M — произвольная точка пространства. Обозначим через r длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$, через ϑ — угол между осью Oz и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от оси Oz; через φ — обозначим угол между направленным отрезком $\overrightarrow{OM_{xy}}$ (M_{xy} — ортогональная проекция точки M на плоскость π) и полярной осью OP, отсчитываемый от полярной оси. При этом угол φ называется *азимутальным углом*, а угол ϑ — *зенитным углом*.

Определение 19. *Упорядоченная тройка* (r, ϑ, φ) *называется сферическими координатами точки* M *в сферической системе координат* $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$.

Заключение 5. Отметим, что полюс O сферической системы координат не имеет угловых координат (ϑ, φ), но вполне определяется равенством $r = 0$.

Формулы связи декартовых и сферических координат.

Пусть на плоскости π введена специальная декартова система координат Oxy. Тогда с учётом выбранной ранее оси Oz мы можем получить связь координат произвольной точки (r, ϑ, φ) в выбранной

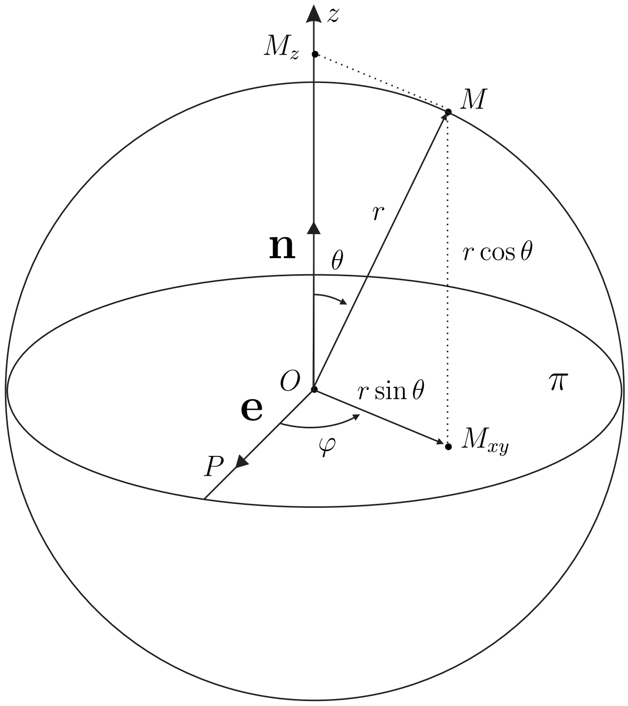

Рис. 18. Сферическая система координат в пространстве.

сферической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ с соответствующими координатами (x, y, z) в связанной декартовой системе координат.

Справедливы следующие формулы:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta, \tag{6.1}$$
$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

□ Действительно,

1. Отметим, что $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$. Поэтому

$$z = OM_z = \text{Пр}_{Oz}\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\cos\vartheta = r\cos\vartheta;$$

2. Кроме того,

$$|\overrightarrow{OM}_{xy}| = |\overrightarrow{OM}|\sin\vartheta,$$

поэтому

$$x = \overrightarrow{OM}_x = \text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}|\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$y = OM_y = \text{Пр}_{Oy}\overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \\ = |\overrightarrow{OM}_{xy}|\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi. \quad \boxtimes$$

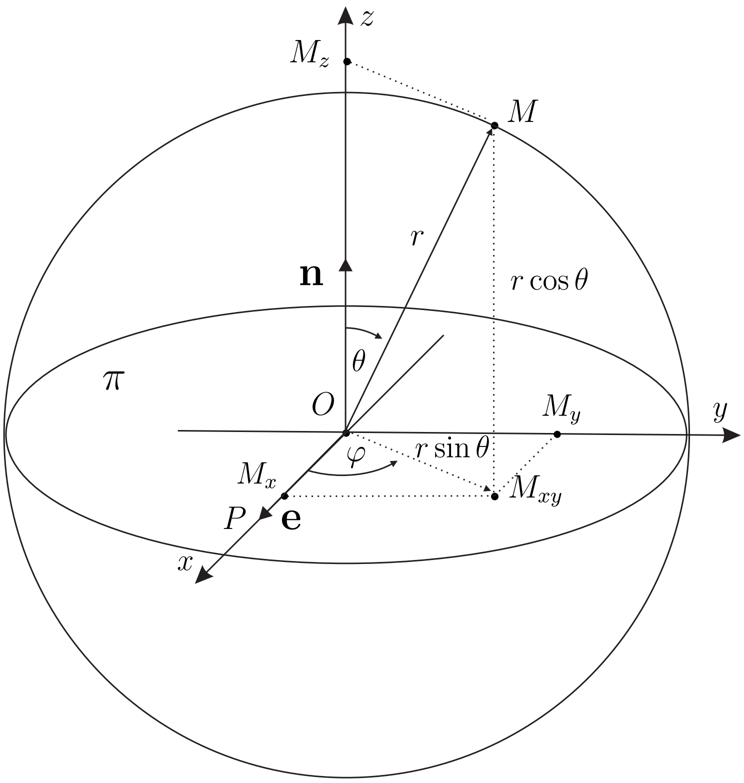

Рис. 19. Сферическая система координат в пространстве и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

ПРИМЕР 4. Уравнение эллипсоида в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Мы рассмотрим один важный частный случай, когда $a = b = c = 1$. Тогда уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

— это уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале системы координат. Тогда в связанной сферической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ уравнение окружности примет очень простой вид

$$r = 1,$$

где

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cos\vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

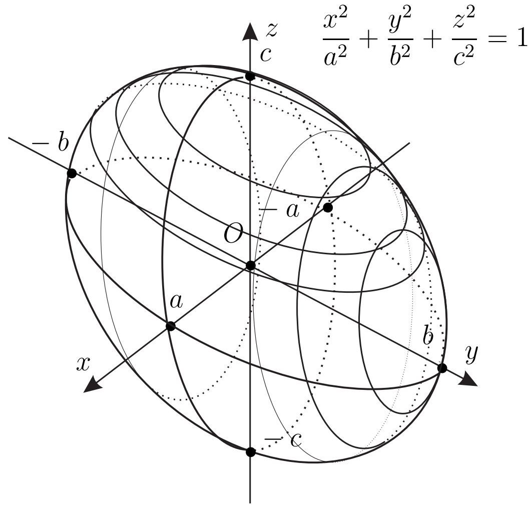

Рис. 20. Эллипсоид.

§ 7. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на плоскости, а $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \quad \text{и} \quad M(x^{'}, y^{'}).$$

Сначала рассмотрим случай $O^{'} = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$: Пусть (ρ, φ) — это поляр-

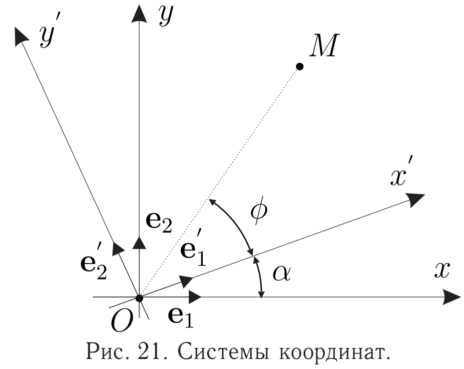

Рис. 21. Системы координат.

ные координаты точки M относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с полярной осью Ox'. Тогда $(\rho, \varphi + \alpha)$ — это полярные координаты той же точки относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, т. е. с полярной осью Ox. Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha), \quad y = \rho\sin(\varphi + \alpha), \tag{7.1}$$

$$x' = \rho\cos\varphi, \quad y' = \rho\sin\varphi. \tag{7.2}$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \tag{7.3}$$

$$y = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha. \tag{7.4}$$

Итоговые формулы (7.3) и (7.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Только нужно ввести правило умножения матрицы на столбец. Сначала введём правило умножения «строчка на столбец»:

$$(a_1, a_2) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2. \tag{7.6}$$

Заметим, в умножении участвуют строчка и столбец одной длины. Теперь введём правило умножения «матрица на столбец»:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Во–первых, отметим, что длина строчек матрицы совпадает с длиной столбца — это существенно в определении произведения. Во–вторых, первая строчка итогового произведения равна произведению первой строчки на столбец, а вторая строчка итоговой матрицы равна произведению второй строчки на столбец. Таким образом, это тоже правило умножения «строчка на столбец».

ПРИМЕР 5. Отметим, что вот такое произведение

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

по правилу умножения «строчка на столбец» не определено, потому что длина строчек столбца

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равна 1, а длина столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

равна 2.

В заключение определим ещё произведение строчки на матрицу:

$$(b_1, b_2) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (c_1, c_2), \tag{7.8}$$

где

$$c_1 := b_1 \cdot a_{11} + b_2 \cdot a_{21}, \quad c_2 := b_1 \cdot a_{12} + b_2 \cdot a_{22}.$$

Это тоже правило умножения «строчка на столбец». Вам пока нужно запомнить, что при произведении строчки на столбец по правилу «строчка на столбец» получается число, при произведении матрицы на столбец получается столбец, а при произведении строчки на матрицу получается строчка.

Теперь мы можем вернуться к формуле (7.5) и вычислить произведение матрицы на столбец по указанному правилу:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y' \\ \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' \end{pmatrix},$$

из которого с учетом равенства (7.5) получим равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y' \\ \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' \end{pmatrix},$$

а по определению равенства столбцов получим равенства (7.3) и (7.4).

Теперь опять в случае $O' = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$: По правилу треугольника имеем

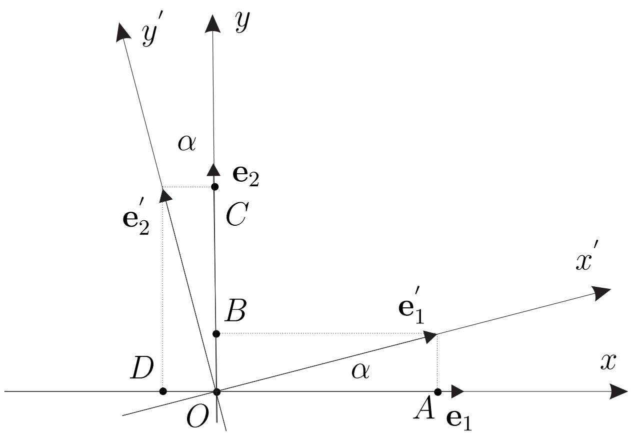

Рис. 22. Базисные векторы.

$$\mathbf{e}_1' = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA \cdot \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB \cdot \mathbf{e}_2. \tag{7.9}$$

Справедливы следующие равенства:

$$OA = \text{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1^{'} = |\mathbf{e}_1^{'}|\cos\alpha = \cos\alpha, \tag{7.10}$$

$$OB = \text{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1^{'} = |\mathbf{e}_1^{'}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha. \tag{7.11}$$

Следовательно, из равенств (7.9)–(7.11) получаем равенство

$$\mathbf{e}_1^{'} = \cos\alpha\cdot\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\cdot\mathbf{e}_2. \tag{7.12}$$

Для вектора $\mathbf{e}_2^{'}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}_2^{'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \tag{7.13}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC\cdot\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD\cdot\mathbf{e}_1, \tag{7.14}$$

$$OC = \text{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2^{'} = |\mathbf{e}_2^{'}|\cos\alpha, \tag{7.15}$$

$$OD = \text{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2^{'} = |\mathbf{e}_2^{'}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right). \tag{7.16}$$

Итак, из равенств (7.13)–(7.16) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}_2^{'} = -\sin\alpha\cdot\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\cdot\mathbf{e}_2. \tag{7.17}$$

Равенства (7.12) и (7.17) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу (7.8):

$$(\mathbf{e}_1^{'},\mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\times\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{7.18}$$

□ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\times\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1\cdot\cos\alpha + \mathbf{e}_2\cdot\sin\alpha, -\mathbf{e}_1\cdot\sin\alpha + \mathbf{e}_2\cdot\cos\alpha), \tag{7.19}$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}_1^{'},\mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1\cdot\cos\alpha + \mathbf{e}_2\cdot\sin\alpha, -\mathbf{e}_1\cdot\sin\alpha + \mathbf{e}_2\cdot\cos\alpha)$$

мы получим равенства (7.12) и (7.17). ⊠

Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O^{'} \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}. \tag{7.20}$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \alpha\cdot\mathbf{e}_1 + \beta\cdot\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\times\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}, \tag{7.21}$$

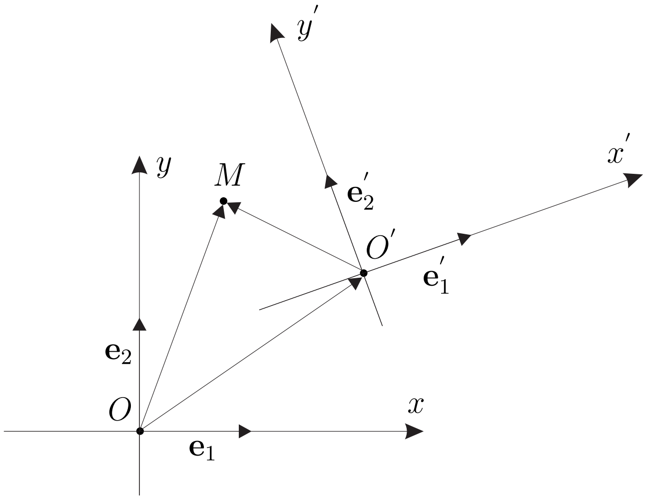

Рис. 23. Поворот и сдвиг системы координат.

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}_1' + y' \cdot \mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Из равенств (7.20)–(7.23) и из выражения (7.18) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{7.25}$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 = \\ = (c_1 + d_1)\mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \quad \boxtimes$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (7.24) в силу свойства (7.25) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{7.26}$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строчка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (7.26) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{7.28}$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (7.27) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

или в развёрнутой форме

$$x = x_0 + \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y',$$
$$y = y_0 + \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$