# ОГЛАВЛЕНИЕ

Семинар 1

# ВЕКТОРЫ

## § 1. Линейные операции над векторами

Задача 1. (Пример 5 стр. 25.) Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — это некоторые точки пространства или плоскости, $M$ — середина отрезка $[AB]$, $N$ — середина отрезка $[CD]$, $O$ — середина отрезка $[MN]$. Докажите, что
1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$;
2. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$;
3. $|\overrightarrow{MN}| \leqslant 1/2 \left(|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}|\right)$.

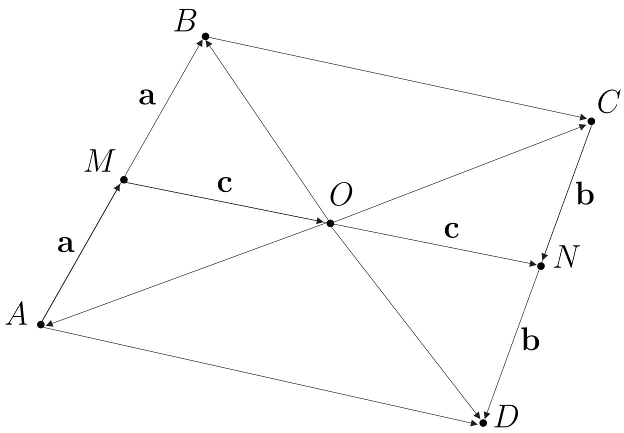


Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Введём следующие вектора:

$$\mathbf{a} := \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}; \quad \mathbf{b} := \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}; \quad \mathbf{c} := \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}.$$

1. □ Имеют место следующие равенства:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = -\mathbf{c} - \mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = -\mathbf{c} + \mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{c} - \mathbf{b};$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND} = \mathbf{c} + \mathbf{b}.$$

Отсюда
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}. \quad \boxtimes$$

2. □ Справедливы равенства
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC};$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND};$$
$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{0}, \quad \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, имеем
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}. \quad \boxtimes$$

3. □ Следствие результата пункта 2 и неравенства треугольника. ⊠

Задача 2. Векторное параметрическое уравнение прямой. (Пример 6 стр 29.) Пусть в пространстве или на плоскости фиксирована точка $O$. Пусть, далее, $l$ — прямая, проходящая через две заданные различные точки $A$ и $B$. Опишите множество радиус–векторов всех точек прямой $l$.

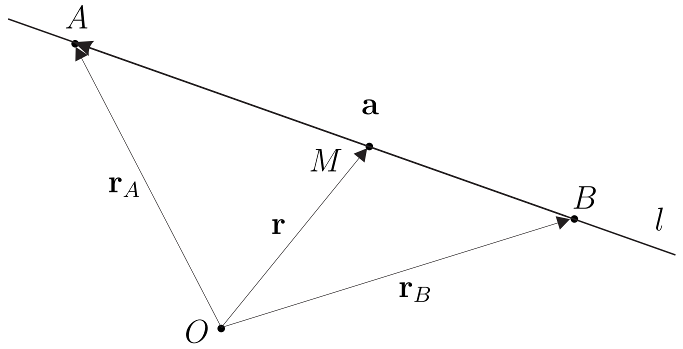


Рис. 2. К задаче 2.

Решение. Пусть $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ — это радиус–вектор точки $A$ относительно полюса $O$; $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB}$ — это радиус–вектор точки $B$. Рассмотрим вектор
$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A.$$

Заметим, что
$$M \in l \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_A + t\mathbf{a} =$$
$$= \mathbf{r}_A + t\,(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = (1-t)\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B. \quad \boxtimes$$

Задача 3. Задача о делении отрезка в заданном отношении. (Пример 7 стр. 30) Пусть $A$ и $B$ — различные точки, заданные радиус–векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ относительно полюса $O$, $\lambda > 0$. Найдите радиус–вектор точки $M \in [AB]$ такой, что

$$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \lambda.$$

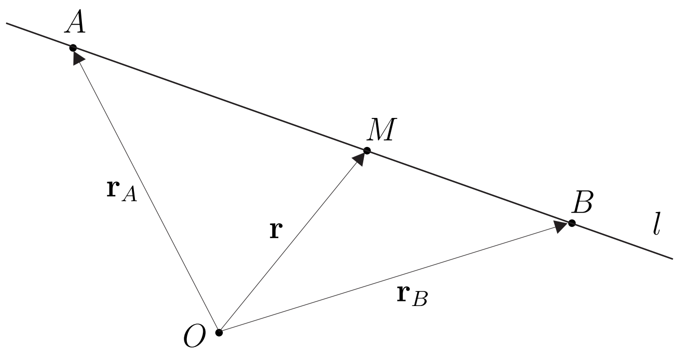


Рис. 3. К задаче 3.

Решение. Точка $M$ лежит на прямой $l_{AB}$ внутри отрезка $[AB]$. Согласно результату задачи 2 имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A), \quad t \in (0, 1).$$

Заметим, что

$$t = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} = \frac{|AM|}{|AB|}.$$

По условию имеем

$$0 < \lambda = \frac{|AM|}{|MB|} \Rightarrow |AB| = |AM| + |MB| =$$

$$= |AM| + \frac{1}{\lambda}|AM| = \frac{\lambda + 1}{\lambda}|AM| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\lambda + 1}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}\mathbf{r}_B.$$

Задача 4. (Пример 8 стр. 31) Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке $Q$, которая делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Кроме того, доказать, что $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}$.

Решение. Пусть

$$\lambda := \frac{|CQ|}{|QM|}, \quad \mu := \frac{|AQ|}{|QK|},$$

$$\mathbf{a} := \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \quad \mathbf{b} := \overrightarrow{AC}.$$

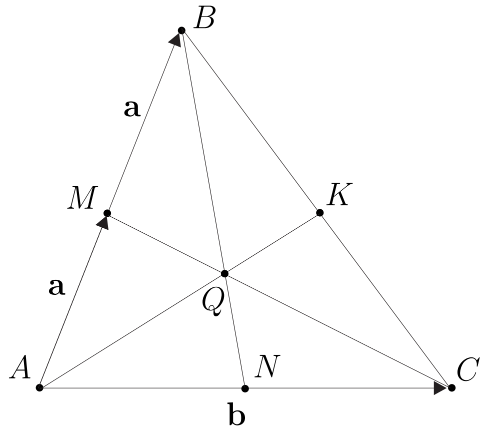


Рис. 4. К задаче 4.

Применим формулу деления отрезка $CM$ в отношении $\lambda$, считая от вершины $C$. С учётом обозначений имеем

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1}. \qquad (1.1)$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1}. \qquad (1.2)$$

Точка $K$ по определению медианы $AK$ делит отрезок $BC$ в отношении $1:1$, поэтому согласно результату задачи 3 имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}. \qquad (1.3)$$

Итак, из формул (1.2) и (1.3) имеем

$$\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\lambda}{\lambda+1} = 1, \ \frac{1}{\lambda+1}\frac{\mu+1}{\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \mu = 2.$$

Итак, точка $Q$ лежит на пересечении медиан $AK$ и $CM$ и делит обе медианы в отношении $2:1$, считая от вершин $A$ и $C$ соответственно. Аналогично рассматривая медианы $CM$ и $BN$ получим, что точка $Q^{'}$ их пересечения делит обе медианы в отношении $2:1$, считая от вершин $C$ и $B$ соответственно. Следовательно, точки $Q = Q^{'}$.

Для доказательства равенства $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}$ заметим, что

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NA}, \quad \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NC}, \quad \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=2\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{BQ}\Rightarrow\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QB}=\mathbf{0}.$$

Задача 5. (Пример 10 стр. 32) В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $CD$ внутреннего угла $\angle C$. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ и их длины.

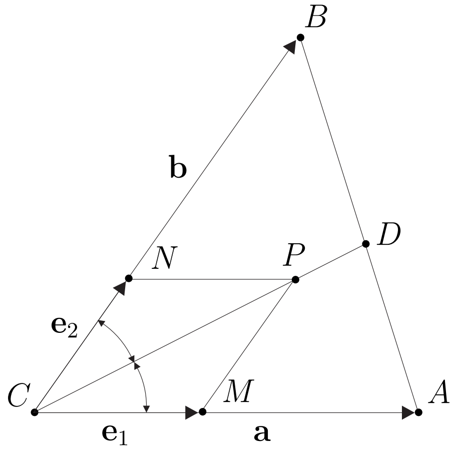

Рис. 5. К задаче 5.

Решение. Пусть

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\overrightarrow{CM},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\overrightarrow{CN}.$$

Рассмотрим параллелограмм $CNPM$, построенный на векторах $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$. Так как по определению

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\left|\overrightarrow{CN}\right|=1,$$

то $CNMP$ — это ромб. Следовательно, вектор $\overrightarrow{CP}\upuparrows\overrightarrow{CD}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CP}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\quad \overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CP}=x\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{1.4}$$

С другой стороны, точка $D$ делит отрезок $AB$ в некотором отношении

$$\lambda=\frac{|AD|}{|DB|}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\frac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}. \tag{1.5}$$

Итак, из равенств (1.4) и (1.5) имеем

$$x\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)=\frac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \frac{x}{|\mathbf{b}|} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \Rightarrow \lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}, \quad x = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{CD} = \frac{|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}.$$

Задача 6. (Пример 11 стр 33). Дан треугольник $ABC$. На прямых $(AB)$, $(BC)$ и $(CA)$ выбраны соответственно точки $M$, $N$ и $P$ так, что

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т.е.

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}?$$

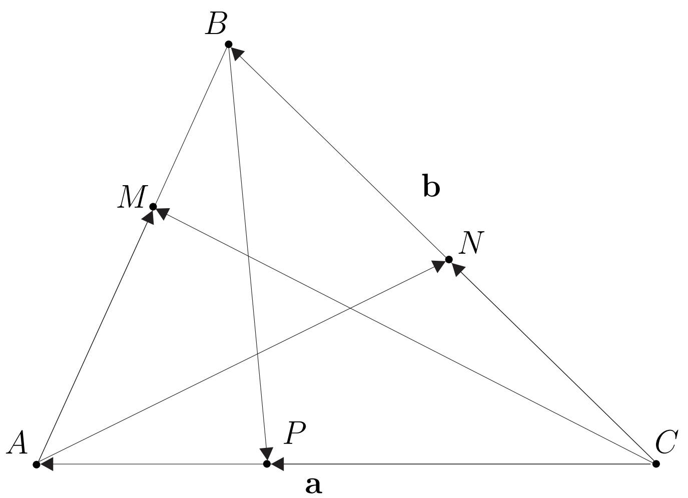


Рис. 6. К задаче 6.

Решение. Пусть $\mathbf{a} := \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{b} := \overrightarrow{CB}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a});$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{NB} = \mathbf{b} - \beta\mathbf{b} = (1-\beta)\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA} = \gamma\mathbf{a}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{CM} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a});$$

$$\overrightarrow{AN} = -\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{BP} = -\mathbf{b} + \gamma\mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma - \alpha)\mathbf{a} + (\alpha - \beta)\mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

Задача 7. (Пример 12 стр. 34.) В треугольнике $ABC$ точки $M$, $N$ и $P$ — это основания биссектрис соответственно $[CM]$, $[AN]$ и $[BP]$ внутренних углов треугольника. Известно, что

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}.$$

Докажите, что $\triangle ABC$ — правильный.

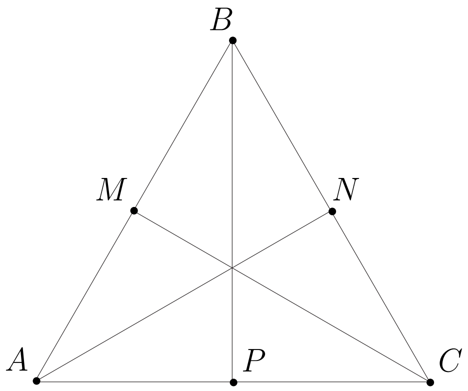


Рис. 7. К задаче 7.

Решение. Пусть

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}.$$

Согласно результату задачи 5 имеем

$$\frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \lambda = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{1.6}$$

Найдём связь $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Действительно,

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AB}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AM}\right| + \alpha\left|\overrightarrow{MB}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Отсюда и из (1.6) имеем

$$\alpha = \frac{|AC|}{|AC| + |BC|}.$$

Аналогичным образом получаем равенства

$$\beta = \frac{|AB|}{|AB| + |AC|}, \quad \gamma = \frac{|BC|}{|BC| + |AB|}.$$

В силу результат задачи 6 имеем $\alpha = \beta = \gamma$. Отсюда имеем

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\gamma} - 1.$$

С одной стороны, отсюда имеем

$$|AC|^2 = |AB||BC| \text{ и } |AB|^2 = |AC||BC| \Rightarrow \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow |AB| = |AC|.$$

С другой стороны, имеем

$$|BC|^2 = |AC||AB| \text{ и } |AB|^2 = |AC||BC| \Rightarrow \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow |BC| = |AB|.$$

Итак, $|AB| = |AC| = |BC|$.

## § 2. Базис на плоскости и в пространстве

Задача 1. (Пример 12 стр. 55.) В тетраэдре $ABCD$ точки $K$ и $L$ — это соответственно середины ребёр $[AC]$ и $[BD]$, $O$ — точка пересечения медиан грани $ACD$. Разложите

a) вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$;

b) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}\}$;

c) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$;

d) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

Решение. $a$) Разложим вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD};$$

$$3\overrightarrow{BO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.$$

В силу результата задачи 4 семинара 1 имеем $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

$b$) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}\}$.

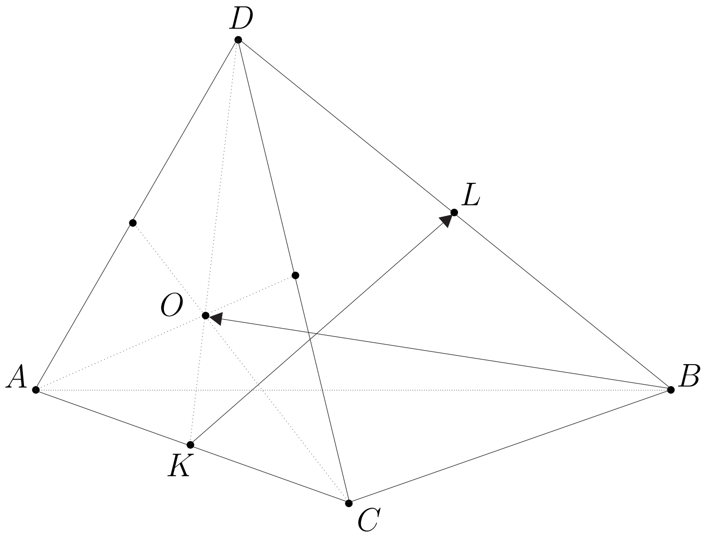


Рис. 8. К задаче 1.

Первый способ. Заметим, что $\overrightarrow{AL}$ — медиана треугольника $\triangle ADB$. Согласно результату задачи 3 семинара 1 имеем

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right);$$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Второй способ. В силу результата задачи 1 семинара 1 имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right), \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).$$

$c$) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$.

$\overrightarrow{KL}$ — это вектор медианы треугольника $\triangle KDB$. В силу результата задачи 3 семинара 1 имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}\right);$$

$$\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}.$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}.$$

$d$) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

В силу результата задачи 1 семинара 1 имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0 \cdot \overrightarrow{BO}.$$

З а д а ч а 2. (Пример 16 стр. 58.) На диагоналях $[AB_1]$ и $[CA_1]$ боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки $E$ и $F$ так, что прямые $l_{EF} \| l_{BC_1}$. Найти отношение $|EF| : |BC_1|$.

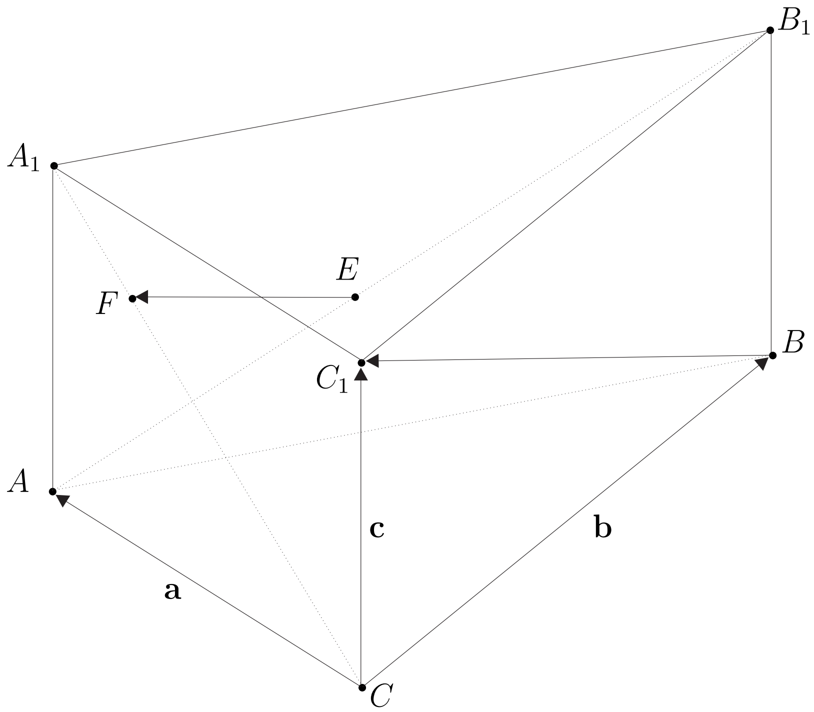


Рис. 9. К задаче 2.

Р е ш е н и е. Введём базис

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Разложим все необходимые для нас векторы по этому базису. Имеем

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c};$$
$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c};$$
$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{AE} \| \overrightarrow{AB_1}$, то найдётся такое число $\mu$, что

$$\overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu\left(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\right).$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{CF} \| \overrightarrow{CA_1}$, то найдётся такое число $\nu$, что

$$\overrightarrow{CF} = \nu \overrightarrow{CA_1} = \nu\,(\mathbf{a} + \mathbf{c})\,.$$

Кроме того, поскольку $\overrightarrow{EF} \| \overrightarrow{BC_1}$, то найдётся такое число $\lambda$, что

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{BC_1} = \lambda(-\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Рассмотрим замкнутый цикл $CAEFC$. По правилу цикла имеем

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \\ = \mathbf{a} + \mu\,(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \lambda(-\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \nu\,(\mathbf{a} + \mathbf{c})\,.$$

Поскольку $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — это базис, то имеют место равенства

$$1 - \mu - \nu = 0, \quad \mu - \lambda = 0, \quad \mu + \lambda - \nu = 0.$$

Эта система имеет единственное решение: $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 2/3$. Итак,

$$\frac{|EF|}{|BC_1|} = \lambda = \frac{1}{3}.$$

З а д а ч а 3. Точки $M$, $N$, $Q$ лежат соответственно на рёбрах $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ тетраэдра $ABCD$. Плоскость $(MNQ)$ пересекает прямую $l_{AD}$ в точке $P$. Известно, что

$$|DN| = |CN|, \quad |AM| = |BM|, \quad \frac{|CQ|}{|CB|} = n.$$

Найдите отношение $|DP|/|DA|$.

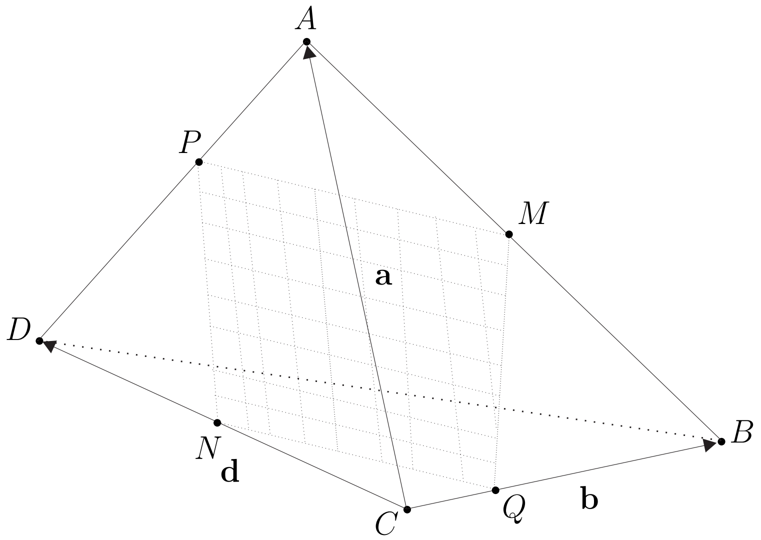


Рис. 10. К задаче 3.

Решение. Введём базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{CD}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\mathbf{d};$$

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\mathbf{d} + n\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{QC} = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - (1-n)\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathbf{b}.$$

Поскольку $P \in l_{AD}$, то найдётся такое число $\lambda$, что

$$\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DA} = \lambda(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}) = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{d});$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP} = (1-\lambda)(\mathbf{a} - \mathbf{d}).$$

Точка $P$ лежит в плоскости $MNQ$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ и $\overrightarrow{MQ}$ компланарны, но векторы $\overrightarrow{NQ}$ и $\overrightarrow{MQ}$ не компланарны. Следовательно,

$$\overrightarrow{NP} = \mu\overrightarrow{NQ} + \nu\overrightarrow{MQ} = \mu\left(-\frac{1}{2}\mathbf{d} + n\mathbf{b}\right) + \nu\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \left(n - \frac{1}{2}\right)\mathbf{b}\right) = \\ = -\frac{\nu}{2}\mathbf{a} + \left(n(\mu+\nu) - \frac{\nu}{2}\right)\mathbf{b} - \frac{\mu}{2}\mathbf{d}.$$

Теперь воспользуемся циклом $CNPAC$.

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \\ = \frac{1}{2}\mathbf{d} - \frac{\nu}{2}\mathbf{a} + \left(n(\mu+\nu) - \frac{\nu}{2}\right)\mathbf{b} - \frac{\mu}{2}\mathbf{d} + (1-\lambda)(\mathbf{a} - \mathbf{d}) - \mathbf{a}.$$

Значит,

$$-\frac{\nu}{2} + (1-\lambda) - 1 = 0,$$

$$n(\mu+\nu) - \frac{\nu}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - (1-\lambda) = 0.$$

Отсюда получаем, что $\lambda = n$.

## § 3. Координаты

Задача 1. (Пример 5 стр 64.) В некоторой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы координаты трех вершин треугольника $ABC$: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Найдите координаты точки $N(x_N, y_N, z_N)$ пересечения медиан треугольника.

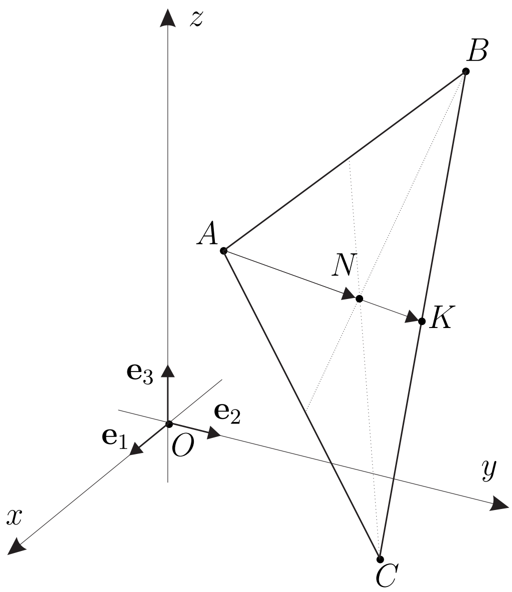


Рис. 11. К задаче 1.

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC};$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Итак, имеем в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ равенство

$x_N\mathbf{e}_1 + y_N\mathbf{e}_2 + z_N\mathbf{e}_3 =$

$$= \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\mathbf{e}_3.$$

Следовательно,

$$x_N = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_N = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_N = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Задача 2. Даны две произвольные (косоугольные) декартовы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}\}$. Найти формулы связывающие координаты $(x, y, z)$ и $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ одной и той же точки пространства $M$ в этих системах координат.

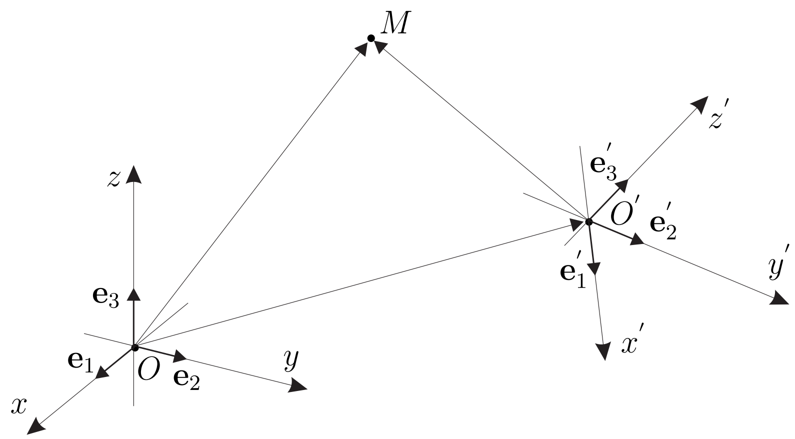


Рис. 12. К задаче 2.

Решение. Запишем в матричной форме разложения нового базиса $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$ по старому базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Именно

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO^{'}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

Наконец,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}, \tag{3.1}$$

причём имеем

$$\overrightarrow{OM} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{O^{'}M} = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}) \cdot X^{'}, \quad X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из равенства (3.1) получим следующее выражение:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B + (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}) \cdot X^{'} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S \cdot X^{'}. \quad (3.2)$$

Отсюда получаем равенство

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \left( X - B - S \cdot X^{'} \right) = O \Rightarrow X = B + S \cdot X^{'}.$$

Поскольку матрица $S$ обратима $\det S \neq 0$, то имеем обратные формулы

$$X^{'} = S^{-1} \cdot (X - B), \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}) \cdot S^{-1}.$$

Задача 3. (Пример 6 стр 69.) В пространстве задана некоторая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Точки $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-1, 2, 0)$ $D(0, 0, 2)$ — это вершины тетраэдра $ABCD$, точки $K$ и $L$ — соответственно середины рёбер $[AC]$ и $[DB]$. Найдите матрицу перехода $S_2$ от системы координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ к системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$. Напишите формулы перехода от первой системы координат ко второй.

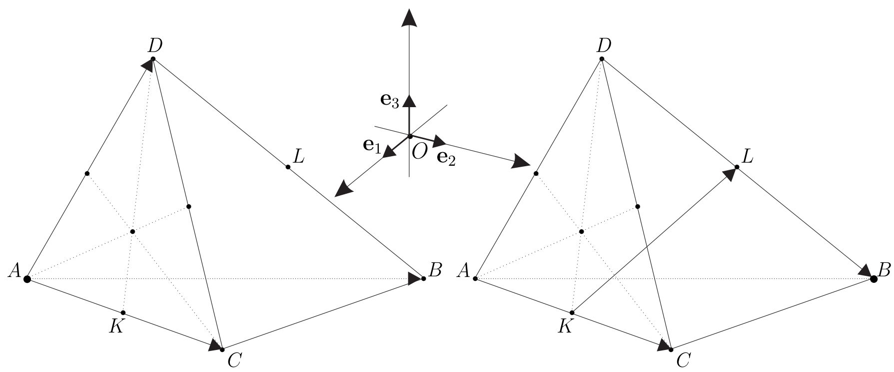


Рис. 13. К задаче 3.

Решение.

Первый способ. Решение проведём за три шага.

*Шаг 1.* По определению координат точек имеем

$$\overrightarrow{OA} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1; \quad \overrightarrow{OB} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2; \quad \overrightarrow{OD} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_3.$$

Стало быть, имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Итак, имеет место следующая формула перехода от базиса $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ к базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

*Шаг 2*. Найдём матрицу $S_1$ перехода от базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ к базису $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB})$. Справедливы следующие формулы:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,$$
$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$
$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \mathbf{e}_3; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1;$$
$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

Итак, имеем

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S_1, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

*Шаг 3*. Из формул (3.3) и (3.4) имеем

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S_1 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot S \cdot S_1 \Rightarrow S_2 = S \cdot S_1.$$

Поскольку

$$\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot Z, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то имеем окончательную формулу связи координат $X'$ точки $M$ в системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ с координатами $X$ в системе координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$S_2 = S \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Этот способ основан на непосредственном выражении элементов новой декартовой системы координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ через старую систему координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. Имеем

$$\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot S_2, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В координатах имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Связь систем декартовых косоугольных координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ на плоскости.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

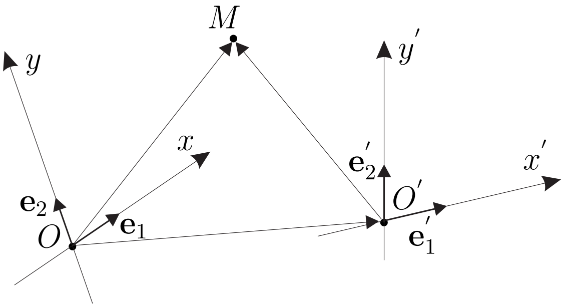


Рис. 14. К задаче 4.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \quad \overrightarrow{OO'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OM} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{O'M} = \left(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\right) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Задача 5. (Пример 7 стр. 72.) В трапеции $ABCD$ $((AD)\|(BC))$ отношение длин оснований $|AD| : |BC| = 2$, $O$ — это точка пересечение диагоналей $[AC]$ и $[BD]$, $O'$ — точка пересечения продолжений боковых сторон $[AB]$ и $[CD]$. Запишите формулы перехода от системы координат $\{O, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$ к системе координат $\{O', \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$.

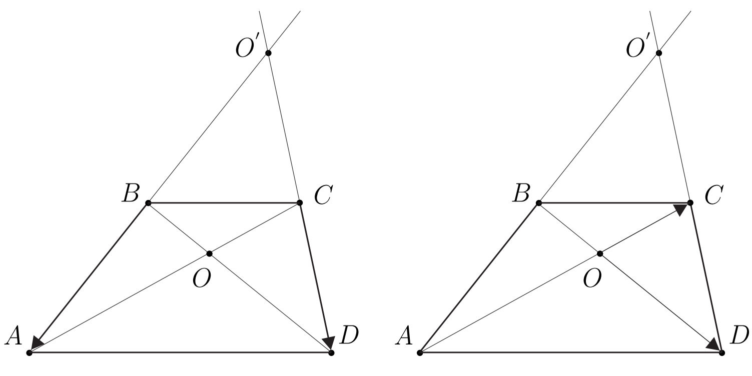


Рис. 15. К задаче 5.

Решение. Поскольку треугольники $O'BC$ и $O'AD$ подобны по трём углам, то

$$\frac{|O'A|}{|O'B|} = \frac{|O'D|}{|O'C|} = \frac{|AD|}{|BC|} = 2.$$

Следовательно, $[BC]$ — это средняя линия треугольника $O^{'}AD$. Поэтому

$$\overrightarrow{O^{'}A} = 2\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{O^{'}D} = 2\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO^{'}} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AO^{'}} + \overrightarrow{AO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}D}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AO^{'}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{O^{'}D} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO^{'}} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CD} =$$
$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Итак, имеем

$$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\right) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{OO^{'}} = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + S \cdot \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}.$$

## § 4. Прямые и плоскости

Задача 1. (Пример 12 стр 75.) Пусть в пространстве заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ т две различные точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Точка $M$ лежит на отрезке $[AB]$ и делит его в отношении $\lambda = |AM| : |MB|$. Определите координаты точки $M$.

Решение. В силу результата задачи 3 семинара 1 имеем

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda+1}\left(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda+1}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda+1}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda+1}.$$

Задача 2. (Пример 13 стр 76.) В некотором аффинном базисе в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеем:

$$A(1,1,1), \quad B(2,-1,0), \quad C(1,1,2), \quad D_1(3,3,2),$$

точка $N$ — это середина отрезка $[AD]$, точка $M$ делит отрезок $[CC_1]$ в отношении $|C_1M| : |MC| = 2$. Напишите в этой системе координат уравнение прямой $l$, проходящей через точки $M$ и $N$.

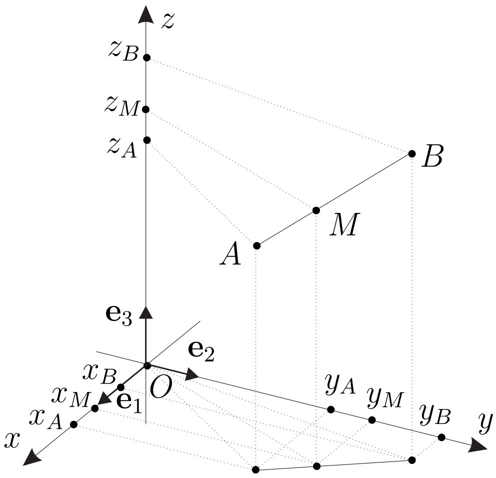


Рис. 16. К задаче 1.

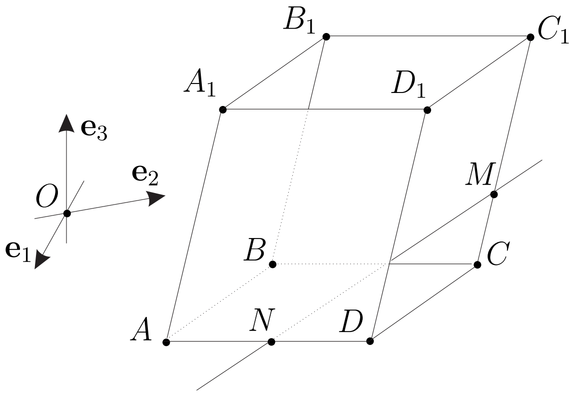


Рис. 17. К задаче 2.

Р е ш е н и е. Пусть $(x_D, y_D, z_D)$ — это координаты точки $D$. При этом имеем

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - 1, y_D - 1, z_D - 1), \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 2, 2);$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow x_D - 1 = -1, \quad y_D - 1 = 2, \quad z_D - 1 = 2 \Rightarrow D(0, 3, 3).$$

Точка $N$ делит отрезок $[AD]$ пополам, поэтому в силу результата задачи 1 имеем

$$x_N = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_N = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,$$

$$z_N = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Следовательно, $N(1/2, 2, 2)$. Пусть $C_1(\alpha, \beta, \gamma)$. Заметим, что

$$\overrightarrow{CC_1} = (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 2), \quad \overrightarrow{DD_1} = (3 - 0, 3 - 3, 2 - 3) = (3, 0, -1).$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} \Rightarrow \alpha - 1 = 3, \quad \beta - 1 = 0, \quad \gamma - 2 = -1.$$

Итак, $C_1(4, 1, 1)$. В силу результата задачи 1 имеем для координат точки $M(x_M, y_M, z_M)$

$$x_M = \frac{\alpha + 2x_C}{3} = \frac{4+2}{3} = 2,$$
$$y_M = \frac{\beta + 2y_C}{3} = \frac{1+2}{3} = 1,$$
$$z_M = \frac{\gamma + 2z_C}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $N(1/2, 2, 2)$ и $M(2, 1, 5/3)$. Общее уравнение прямой имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_N}{x_M - x_N} = \frac{y - y_N}{y_M - y_N} = \frac{z - z_N}{z_M - z_N},$$
$$\frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 2}{-1/3}.$$

Задача 3. (Пример 17 стр. 78.) Найдите координаты вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $D(x_D, y_D)$ параллелограмма $ABCD$, если $C(3, -1)$, прямая $(AB) : x + y - 3 = 0$, а прямая $(AD) : y = 2$.

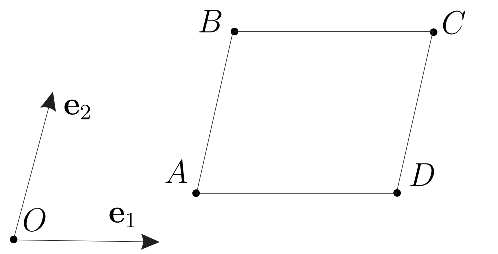


Рис. 18. К задаче 3.

Решение. Найдём координаты точки $A(x_A, y_A)$, как пересечение прямых $(AB)$ и $(AD)$

$$x_A + y_A - 3 = 0, \quad y_A = 2 \Rightarrow A(1, 2).$$

Направляющий вектор $\mathbf{a}$ прямой $(AB)$ имеет координаты $\mathbf{a}(-1, 1)$. Этот же вектор является направляющим и прямой $(CD)$ :

$$\frac{x - 3}{-1} = \frac{y + 1}{1} \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

Прямая $(AD)$ имеем следующий вид: $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$, поэтому её направляющий вектор $\mathbf{b}(-1, 0)$. Это вектор является направляющим вектором и прямой $(BC)$:

$$\frac{y - y_C}{0} = \frac{x - x_C}{-1} \Leftrightarrow y = -1.$$

Найдём координаты точки $B(x_B, y_B)$ как точку пересечения прямых $(BC)$ и $(AB)$ :

$$x_B + y_B - 3 = 0, \quad y_B = -1 \Rightarrow B(4, -1).$$

Найдём координаты точки $D(x_D, y_D)$ как точку пересечения прямых $(AD)$ и $(CD)$ :

$$y_D = 2, \quad x_D + y_D - 2 = 0 \Rightarrow D(0, 2).$$

Задача 4. (Пример 18 стр 79.) В параллелограмме $ABCD$ точка $M$ — это середина стороны $[BC]$, точка $N$ — это середина отрезка $[MD]$, $P$ — это точка пересечения прямых $(AN)$ и $(CD)$. Найдите координаты точек $C$ и $D$, если $A(1, 2)$, $B(4, -1)$, $P(2, 0)$. Найдите также отношение, в котором точка $P$ делит отрезок $[CD]$.

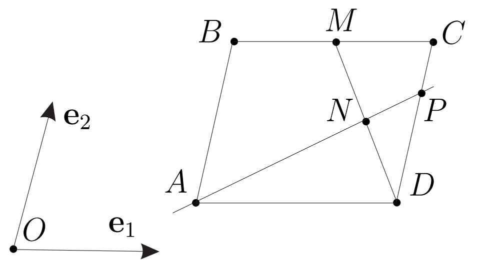


Рис. 19. К задаче 4.

Решение. Пусть $C(x_C, y_C)$ и $D(x_D, y_D)$. Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то

$$x_c - x_D = 3, \quad y_C - y_D = -3.$$

Точка $M(x_M, y_M)$ — середина отрезка $[BC]$,

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4 + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1 + y_C}{2}.$$

Точка $N(x_N, y_N)$ — середина отрезка $[MD]$, поэтому

$$x_N = \frac{x_M + x_D}{2} = \frac{4 + x_C + 2x_D}{4} = \frac{3x_D + 7}{4},$$

$$y_N = \frac{y_M + y_D}{2} = \frac{-1 + y_C + 2y_D}{4} = \frac{3y_D - 4}{4}.$$

Уравнение прямой $(AP)$ :

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-2}\Leftrightarrow 2x+y-4=0.$$

Точка $N(x_N,y_N)\in(AP)$. Следовательно,

$$2\frac{7+3x_D}{4}+\frac{3y_D-4}{4}-4=0\Leftrightarrow 2x_D+y_D-2=0.$$

Запишем уравнение прямой $(DC)$ :

$$\frac{x-x_D}{x_C-x_D}=\frac{y-y_D}{y_C-y_D}\Leftrightarrow\frac{x-x_D}{3}=\frac{y-y_D}{-3}\Leftrightarrow x+y-x_D-y_D=0.$$

Точка $P(2,0)\in(DC)$ :

$$x_D+y_D-2=0.$$

Итак, пришли к системе уравнений

$$2x_D+y_D-2=0,\quad x_D+y_D-2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_D=0,\quad y_D=2\Rightarrow x_C=3,\quad y_C=-1.$$

Итак, $D(0,2)$ и $C(3,-1)$. Пусть

$$\lambda=\frac{|CP|}{|PD|}\Rightarrow x_P=\frac{x_C+\lambda x_D}{1+\lambda},\quad y_P=\frac{y_C+\lambda y_D}{1+\lambda}.$$

Итак,

$$2=\frac{3+\lambda 0}{1+\lambda},\quad 0=\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}.$$

З а д а ч а 5. (Пример 26 стр 85.) В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$ $((AB)\|(CD))$, $|CD|:|AB|=\lambda<1$. Плоскость, проходящая через точку $B$, пересекает рёбра $[AA_1]$, $[CC_1]$ и прямую $(DD_1)$ соответственно в точках $M$, $N$ и $P$, причём

$$\frac{|AM|}{|AA_1|}=m,\quad\frac{|CN|}{|CC_1|}=n.$$

Найдите отношение $|DP|:|DD_1|$.

Р е ш е н и е. Выберем аффинный базис $\{D,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, где $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{DA}$, $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{DC}$, $\mathbf{e}_3=\overrightarrow{DD_1}$. В этой системе координат вершины призмы имеют координаты:

$$A(1,0,0),\quad B(x_B,y_B,0),\quad C(0,1,0),\quad D(0,0,0),$$
$$A_1(1,0,1),\quad B_1(x_B,y_B,1),\quad C_1(0,1,1),\quad D_1(0,0,1).$$

Вычислим координаты точки $B(x_B,y_B,0)$. По условию имеем:

$$\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}\Rightarrow\mathbf{e}_2=\lambda\left((x_B-1)\mathbf{e}_1+y_B\mathbf{e}_2+0\cdot\mathbf{e}_3\right),$$
$$\lambda(x_B-1)=0,\quad 1=\lambda y_B\Rightarrow B(1,1/\lambda,0).$$

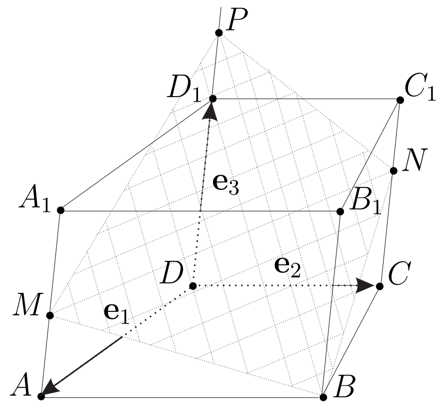


Рис. 20. К задаче 5.

По условию имеем

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AA_1}, \quad M(x_M, y_M, z_M),$$

$$(x_M - 1)\mathbf{e}_1 + y_M\mathbf{e}_2 + z_M\mathbf{e}_3 = m\left(0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3\right),$$

$$x_M = 1, \quad y_M = 0, \quad z_M = m, \quad M(1, 0, m).$$

Наконец, по условию имеем

$$\overrightarrow{CN} = n\overrightarrow{CC_1}, \quad N(x_N, y_N, z_N).$$

$$x_N\mathbf{e}_1 + (y_N - 1)\mathbf{e}_2 + z_N\mathbf{e}_3 = n\left(0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3\right),$$

$$x_N = 0, \quad y_N = 1, \quad z_N = n, \quad N(0, 1, n).$$

Выпишем уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$B(1, 1/\lambda, 0), \quad M(1, 0, m), \quad N(0, 1, n),$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1/\lambda & z - 0 \\ 1 - 1 & 0 - 1/\lambda & m - 0 \\ 0 - 1 & 1 - 1/\lambda & n - 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x - 1)\frac{m - n - \lambda m}{\lambda} - m\left(y - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0.$$

Точка $P(0, 0, z_P) \in (BMN)$, поэтому

$$-\frac{m - n - \lambda m}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} - \frac{z_p}{\lambda} = 0 \Rightarrow z_p = n + \lambda m.$$

Итак,

$$\frac{|DP|}{|DD_1|} = \frac{|z_p\mathbf{e}_3|}{|\mathbf{e}_3|} = n + \lambda m.$$

Семинар 2

# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

## § 1. Скалярное произведение

Задача 1. Теорема косинусов. (Пример 4 стр 116.) Докажите, что в вещественном евклидовом пространстве справедливы равенства

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle,$$
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|^2 = \langle \mathbf{a}\pm\mathbf{b}, \mathbf{a}\pm\mathbf{b}\rangle = \\ = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \pm \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \pm \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \pm 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

Задача 2. (Пример 10 стр. 119.) В треугольнике $ABC$ заданы длины его сторон $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Найдите длину медианы $|CM|$.

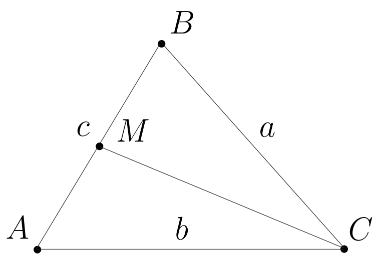


Рис. 21. К задаче 2.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right),$$

$$m_c^2 = \left|\overrightarrow{CM}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right\rangle\right),$$

$$c^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 = a^2 + b^2 - 2\left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right\rangle,$$

$$2\left\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right\rangle = a^2+b^2-c^2,$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right).$$

Задача 3. (Пример 12 стр. 120.) В треугольнике $ABC$ $m_a$, $m_b$, $m_c$ — это длины медиан, проведённых из вершин $A$, $B$, $C$, соответственно. Докажите, что $\angle C$ тупой тогда и только тогда, когда

$$m_c^2 < \frac{m_a^2+m_b^2}{5}.$$

Решение. Заметим, что угол $\angle C$ тупой тогда и только тогда, когда

$$0 > 2\left\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right\rangle = a^2+b^2-c^2 \Leftrightarrow x := a^2+b^2-c^2 < 0.$$

В силу результата задачи 2 имеем равенства

$$4m_c^2 = 2a^2+2b^2-c^2, \quad 4m_b^2 = 2a^2+2c^2-b^2, \quad 4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2.$$

Складывая эти равенства получим

$$4(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$c^2 = \frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2\right),$$

$$b^2 = \frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_c^2-m_b^2\right),$$

$$a^2 = \frac{4}{9}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right).$$

Отсюда

$$x = a^2+b^2-c^2 = \frac{4}{9}\left(5m_c^2-m_a^2-m_b^2\right).$$

Следовательно,

$$x<0 \Leftrightarrow m_c^2 < \frac{m_a^2+m_b^2}{5}.$$

Задача 4. Формула Герона. (Пример 13 стр. 120.) Выразите площадь треугольника $ABC$ через длины его сторон $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$.

Решение. Введём векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$, $\varphi=\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Тогда площадь треугольника $ABC$ равна

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\varphi = \frac{1}{4}a^2b^2\left(1-\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{4}\left(a^2b^2-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2\right),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(ab + \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab - \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{16}\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right) = \\ &= \frac{1}{16}\left(a+b-c\right)\left(a+b+c\right)\left(c-a+b\right)\left(c+a-b\right). \end{aligned}$$

Теперь введём полупериметр

$$p := \frac{1}{2}\left(a+b+c\right).$$

Тогда

$$a+b-c = 2(p-c), \quad a+c-b = 2(p-b), \quad b+c-a = 2(p-a).$$

Следовательно,

$$S^2 = \frac{1}{16} 2p2\left(p-c\right)2(p-b)2(p-a) = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Задача 5. (Пример 11 стр. 127.) Выразите вектор биссектрисы $\mathbf{l} = \overrightarrow{CL}$ треугольника $ABC$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ его сторон и их длины $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$.

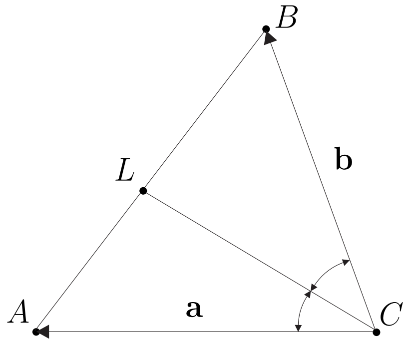


Рис. 22. К задаче 5.

Решение. Точка $L$ делит отрезок $[AB]$ в отношении

$$\lambda := \frac{|AL|}{|LB|} \Rightarrow \mathbf{l} = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1 + \lambda}.$$

С другой стороны, углы $\angle ACL = \angle BCL$, поэтому имеем

$$\frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{l} \rangle}{|\mathbf{b}||\mathbf{l}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{l} \rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{l}|}.$$

Отсюда имеем

$$\langle \mathbf{l}, b\mathbf{a} - a\mathbf{b} \rangle = 0 \Rightarrow 0 = \langle \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, b\mathbf{a} - a\mathbf{b} \rangle,$$

$$\lambda = \frac{a\,(ab - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)}{b\,(ab - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)} = \frac{a}{b},$$

поскольку $ab - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = ab(1 - \cos C) > 0$. Итак, имеем

$$\mathbf{l} = \frac{a\mathbf{b} + b\mathbf{a}}{a + b}.$$

Задача 6. (Пример 14 стр. 128.) В треугольнике $ABC$ медиана $[CM]$ перпендикулярна биссектрисе $[AL]$, причём

$$n = \frac{|CM|}{|AL|}.$$

Найдите угол $\angle A$.

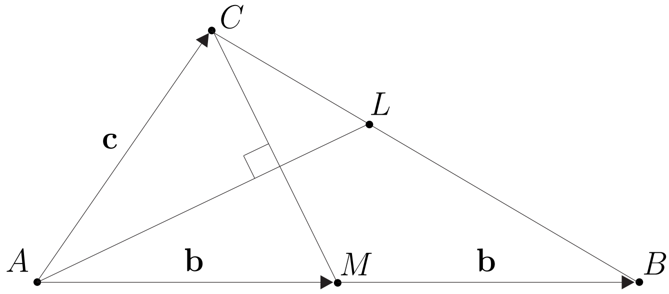


Рис. 23. К задаче 6.

Решение. Введём обозначения.

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{b};$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}, \quad b = |\mathbf{b}|, \quad c = |\mathbf{c}|;$$

$$\angle A = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Тогда

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{b} - \mathbf{c};$$

в силу результата задачи 5

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2b\mathbf{c} + 2c\mathbf{b}}{c + 2b}.$$

По условию $\overrightarrow{AL} \perp \overrightarrow{CM}$, поэтому

$$0 = \langle b\mathbf{c} + c\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle =$$
$$= cb^2 - bc^2 + bc^2 \cos\angle A - bc^2 \cos\angle A = bc(b-c)(1 + \cos\angle A) \Rightarrow b = c,$$

поскольку $\angle A \in (0^\circ, 180^\circ)$. Следовательно, имеем

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\left|\overrightarrow{AL}\right|^2 = \frac{4}{9}\Big(b^2 + c^2 + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle\Big) = \frac{4}{9}\Big(2b^2 + 2b^2\cos\angle A\Big) = \frac{8}{9}b^2(1 + \cos\angle A);$$

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 = b^2 + c^2 - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 2b^2(1 - \cos\angle A).$$

Итак,

$$n^2 = \frac{|CM|^2}{|AL|^2} = \frac{9}{4}\frac{1 - \cos\angle A}{1 + \cos\angle A} \Rightarrow \cos\angle A = \frac{9 - 4n^2}{9 + 4n^2}.$$

Задача 7. (Пример 16 стр. 129.) Докажите, что в треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

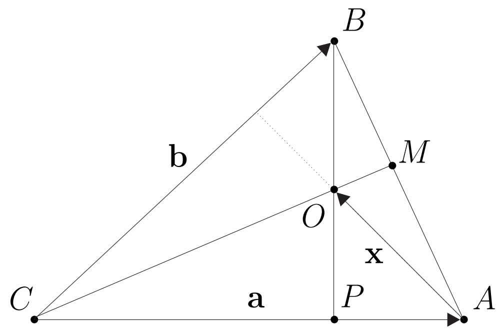


Рис. 24. К задаче 7.

Решение. Пусть $[CM]$ — это высота, опущенная из точки $C$ на сторону $[AB]$, $[BP]$ — это высота, опущенная из точки $B$ на сторону $[CA]$. Пусть $O$ — это точка пересечения высот $[CM]$ и $[BP]$. Нужно доказать, что

$$\langle \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{AO}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AO} = -\mathbf{x} - \mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

По определению высоты имеем

$$\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle -\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - |\mathbf{a}|^2;$$
$$\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{b} - \mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - |\mathbf{a}|^2.$$

Итак,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0.$$

Задача 8. (Пример 17 стр. 130.) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки $E$ и $F$ — середины рёбер соответственно $[AD]$ и $[CB]$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{CB}$ попарно ортогональны, причём

$$|FE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}}.$$

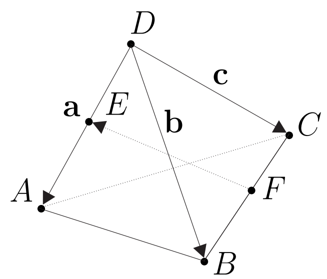


Рис. 25. К задаче 8.

Решение. Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{DC}.$$

По условию имеем $a = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$. Так как

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 60^\circ,$$

то

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{a^2}{2}.$$

Значит,

$$\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB} \rangle = \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c});$$

Поэтому

$$|FE| = \frac{1}{2}|\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}\rangle} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|AD|.$$

Наконец,

$$\langle \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AD}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, -\mathbf{a}\rangle = \frac{1}{2}\Big(-|\mathbf{a}|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\Big) = 0;$$

$$\langle \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CB}\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle - |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2\Big) = 0.$$

## § 2. Прямые и плоскости

Задача 1. Пусть на плоскости даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и прямая, заданная уравнением $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle = D$. Тогда

1. радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки $M_2$, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую $l$, выражается формулой
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}; \tag{2.1}$$
2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой $l$ выражается формулой
$$d(M_1, l) = \frac{|\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle - D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{2.2}$$
3. Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки $M_3$, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно прямой $l$, выражается формулой
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}. \tag{2.3}$$

Решение.

*Пункт 1.* Имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{n} \tag{2.4}$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\rangle = D,$$

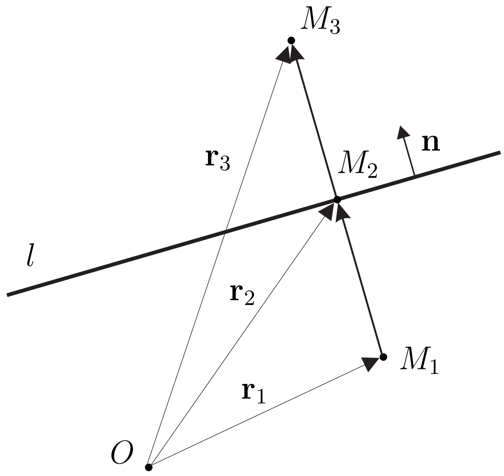


Рис. 26. К задаче 1.

поэтому умножим скалярно на $\mathbf{n}$ обе части равенства (2.4) и получим равенство

$$D - \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle = \lambda \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \Rightarrow \lambda = -\frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) получим искомое равенство

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}. \tag{2.6}$$

*Пункт 2.* Из формул (2.4) и (2.6) получим цепочку равенств

$$d(M_1, l) = \left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \left| \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} \right| = \frac{|\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D|}{|\mathbf{n}|}.$$

*Пункт 3.* Действительно,

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 M_3} = \mathbf{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{r}_1 - 2\frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}.$$

Задача 2. Пусть в пространстве даны точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ и плоскость, заданная уравнением $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D$. Тогда

1. радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ точки $M_2$, являющейся ортогональной проекцией точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на плоскость $\pi$, выражается формулой

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}; \tag{2.7}$$

2. расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до плоскости $\pi$ выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle - D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{2.8}$$

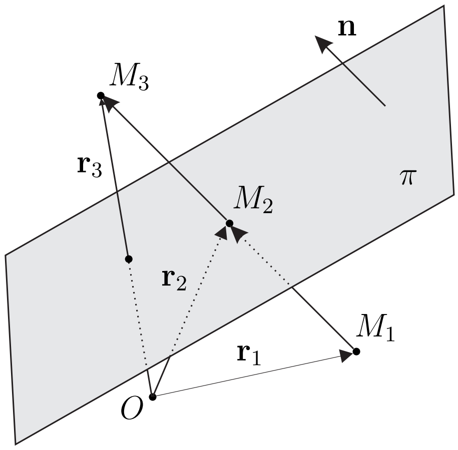


Рис. 27. К задаче 2.

3. Радиус вектор $\mathbf{r}_3$ точки $M_3$, симметричной точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ относительно плоскости $\pi$, выражается формулой

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle - D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}. \tag{2.9}$$

Решение. В точности повторяет решение задачи 1.

Задача 3. (Смотри введение к параграфу 3 стр. 141.) Пусть $\mathbf{e}$ — это направляющий вектор некоторой прямой $l$ в пространстве, нужно получить выражения для вектора $\mathrm{Pr}_l\,\mathbf{a}$ — ортогональной проекции вектора $\mathbf{a}$ на прямую $l$.

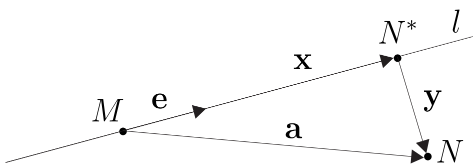


Рис. 28. К задаче 3.

Решение. Ортогональная проекция вектора $\mathbf{a}$ на прямую $l$ определяется следующим образом. Пусть $M \in l$ — это произвольная фиксированная точка прямой $l$. Отложим от этой точки вектор $\mathbf{a}$. Тогда $\exists!$ точка $N$, что

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{MN}.$$

Пусть $N^*$ — это ортогональная проекция точки $N$ на прямую $l$ :

$$N^* := \mathrm{Pr}_l\, N,$$

тогда

$$\overrightarrow{MN^*} := \mathrm{Pr}_l\, \mathbf{a}.$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN^*} + \overrightarrow{N^*M}, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{MN^*}, \quad \mathbf{y} = \overrightarrow{N^*N},$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Поскольку $\mathbf{e}$ — это направляющий вектор прямой $l$, поэтому $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}, \quad \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{y} \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle = \lambda \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle,$$
$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle}{\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle} \Rightarrow \mathrm{Pr}_l\, \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle}{\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle} \mathbf{e}.$$

Причём

$$|\mathrm{Pr}_l\, \mathbf{a}| = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle|}{|\mathbf{e}|}.$$

З а д а ч а 4. Пусть определена некоторая плоскость $P$ с вектором нормали $\mathbf{n}$. Нужно найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}$ на эту плоскость.

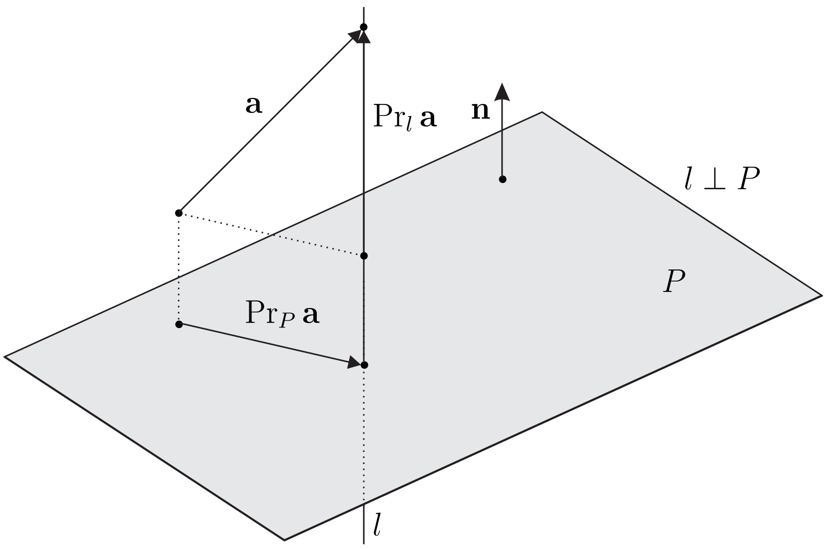


Рис. 29. К задаче 4.

Р е ш е н и е. Пусть $l$ — это прямая, ортогональная плоскости $P$. Следовательно, $\mathbf{n}$ — это направляющий вектор этой прямой. Очевидно, что вектор $\mathbf{a}$ представим в следующем виде:

$$\mathbf{a} = \mathrm{Pr}_l\, \mathbf{a} + \mathrm{Pr}_P\, \mathbf{a}, \quad \langle \mathrm{Pr}_l\, \mathbf{a}, \mathrm{Pr}_P\, \mathbf{a} \rangle = 0.$$

В силу результата задачи 3 имеем

$$\mathrm{Pr}_l\,\mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}.$$

Поэтому справедлива следующая формула:

$$\mathrm{Pr}_P\,\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}.$$

Задача 5. (Пример 1 стр 143.) Длина ребра основания $ABC$ правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $a$. Точки $M$, $N$, $P$ и $Q$ являются серединами рёбер $[AB]$, $[AC]$, $[A_1C_1]$ и $[C_1B_1]$. Длина проекции вектора $\overrightarrow{MP}$ на прямую $(NQ)$ равна $a/4$. Найти длину высоты призмы.

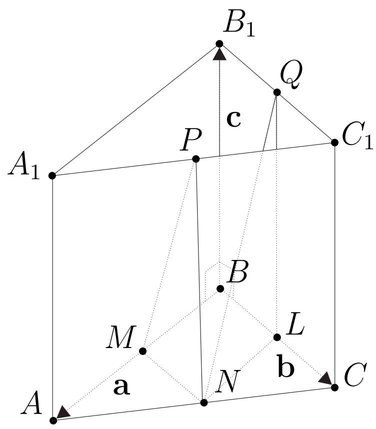


Рис. 30. К задаче 5.

Решение. Согласно результату задачи 3 справедливо следующее равенство:

$$\left|\mathrm{Pr}_{(NQ)}\,\overrightarrow{MP}\right|^2 = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}\right\rangle\right|^2}{\left|\overrightarrow{NQ}\right|^2} = \frac{a^2}{16}$$

Введём следующие обозначения:

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c}.$$

Поскольку призма правильная, то

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{2}a^2.$$

Поэтому $h = |\mathbf{c}|$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c};$$

$$\left\langle \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}, -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c} \right\rangle = -\frac{1}{4}\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle + |\mathbf{c}|^2 = h^2 - \frac{a^2}{8};$$

$$\left|\overrightarrow{NQ}\right|^2 = \left|-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}\right|^2 = |\mathbf{c}|^2 + \frac{1}{4}|\mathbf{a}|^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, имеем

$$\left(h^2 - \frac{a^2}{8}\right)^2 = \frac{a^2}{16}\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow h^2 = \frac{5}{16}a^2 \Rightarrow h = a\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Задача 6. Нормальное векторное уравнение плоскости. (Пример 2 стр. 143.) Пусть в пространстве фиксирован полюс $O$, выбрано число $D$ и ненулевой вектор $\mathbf{n}$. Докажите, что множество $M$ всех точек, радиус–векторы которых $\mathbf{r}_M$ удовлетворяют уравнению $\langle \mathbf{r}_M, \mathbf{n}\rangle = D$ есть плоскость. Укажите её расположение в пространстве.

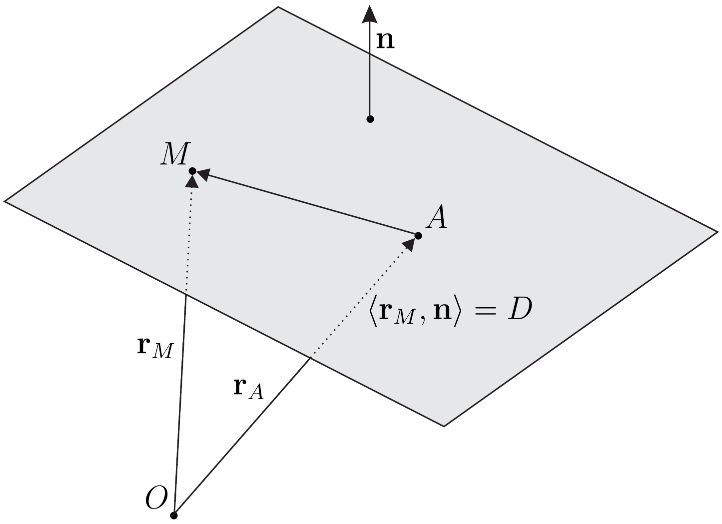


Рис. 31. К задаче 6.

Решение. Пусть

$$P := \{M : \langle \mathbf{r}_M, \mathbf{n}\rangle = D\}.$$

Рассмотрим точку $A$, радиус–вектор которой имеет следующий вид:

$$\mathbf{r}_A = \frac{D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} \Rightarrow \langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n} \rangle = D \Rightarrow A \in P.$$

Проведём через точки $M \in P$ и указанную точку $A \in P$, $M \neq A$ прямую. Заметим, что в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A.$$

Заметим, что

$$\langle \mathbf{r}_M, \mathbf{n} \rangle = D = \langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n} \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A, \mathbf{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{MA}, \mathbf{n} \right\rangle = 0,$$

т. е. $M \in P$ тогда и только тогда, когда $M$ лежит на некоторой прямой, проходящей через точку $A \in P$ и ортогональной вектору $\mathbf{n}$. Но множество всех таких прямых образует плоскость, проходящую через точку $A$ пространства и с вектором нормали $\mathbf{n}$.

Задача 7. (Пример 3 стр. 144.) Найдите расстояние $d$ от точки $B$ с радиус вектором $\mathbf{r}_B$ до плоскости $P$, заданной уравнением $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D$.

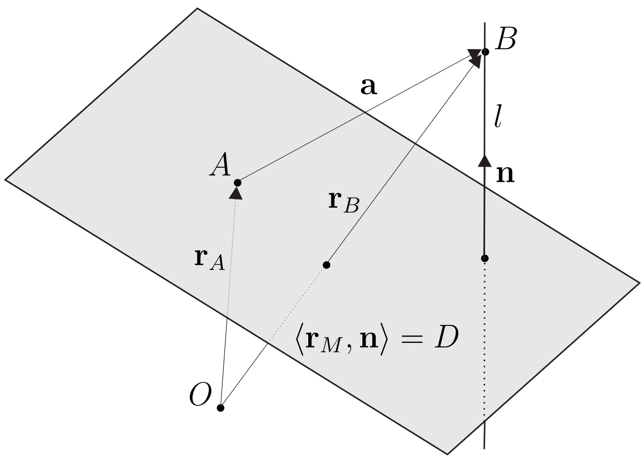


Рис. 32. К задаче 7.

Решение. Пусть $A$ — это точка плоскости с радиус–вектором

$$\mathbf{r}_A = \frac{D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n},$$

$l$ — это прямая с направляющим вектором $\mathbf{n}$, проходящая через точку $B$. Ясно, что $l \perp P$. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A.$$

Тогда

$$d = |\operatorname{Pr}_l \mathbf{a}| = \left|\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right| = \left|\frac{\langle \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right| = \frac{|\langle \mathbf{r}_B, \mathbf{n}\rangle - D|}{|\mathbf{n}|}.$$

Задача 8. (Пример 4 стр. 145.) Найдите ортогональную проекцию точки $B$ с радиус–вектором $\mathbf{r}_B$ на плоскость $P$, заданную своим нормальным уравнением.

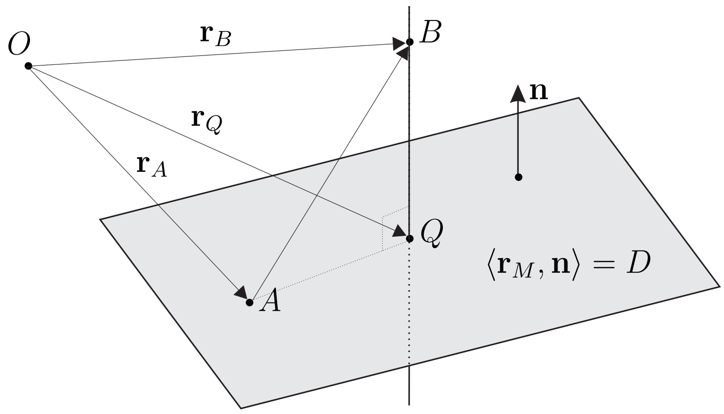


Рис. 33. К задаче 8.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_B + \overrightarrow{BQ},$$

$$\overrightarrow{BQ} = -\operatorname{Pr}_l \overrightarrow{AB} = -\frac{\left\langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{n}\right\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n} = -\frac{\langle \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n} = \frac{D - \langle \mathbf{r}_B, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_B + \frac{D - \langle \mathbf{r}_B, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}.$$

Задача 9. (Пример 5 стр. 145.) Найдите расстояние $\delta$ от точки $M$ с радиусом–вектором $\mathbf{r}_M$ до прямой $l$, параметрическое уравнение которой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

Решение. Пусть $M_0$ — это точка прямой $l$ с радиус–вектором $\mathbf{r}_0$. Кроме того,

$$M^* = \operatorname{Pr}_l M,$$

тогда

$$\overrightarrow{M_0M^*} = \operatorname{Pr}_l \overrightarrow{M_0M} = \frac{\left\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{a}\right\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M^*}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0.$$

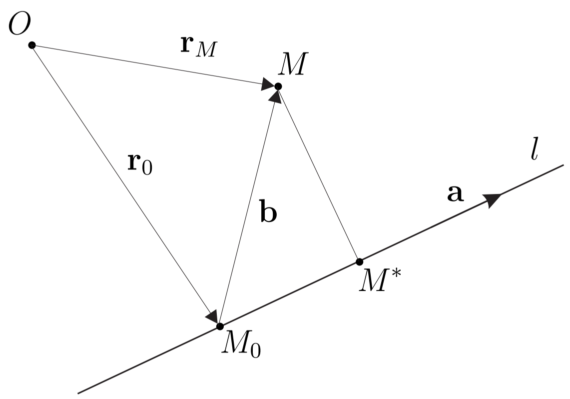


Рис. 34. К задаче 9.

Тогда

$$\delta = \left|\overrightarrow{M^*M}\right| = \left|\mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle|^2}\,.$$

Задача 10. (Пример 6 стр. 146.) Напишите параметрическое векторное уравнение прямой $l^*$, являющейся ортогональной проекцией прямой $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ на плоскость $P : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle = D$.

Решение. В силу результата задачи 8 имеем

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \frac{D - \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n} = \mathbf{r}_0 + \frac{D - \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n} + \left(\mathbf{a} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n}\right) t.$$

Задача 11. (Пример 7 стр. 146.) Найдите ортогональную проекцию точки $M$ с радиус–вектором $\mathbf{r}_M$ на прямую $l$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t.$$

Решение. В силу результата задачи 9 и в обозначениях решения этой задачи имеем

$$\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M^*};$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}.$$

Задача 12. (Пример 8 стр. 146.) Напишите уравнение прямой $l^*$, проходящей через точку $M$ с радиус–вектором $\mathbf{r}_M$ и пересекающей ортогонально прямую $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, не содержащей точку $M$.

Решение. Искомое уравнение прямой $l^*$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \mathbf{b}t, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{MM^*}, \quad M^* = \operatorname{Pr}_l M;$$
$$\overrightarrow{MM^*} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0M^*}, \quad \overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M;$$
$$\overrightarrow{M_0M^*} = \operatorname{Pr}_l \overrightarrow{M_0M} = \frac{\left\langle \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{a}\right\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}.$$

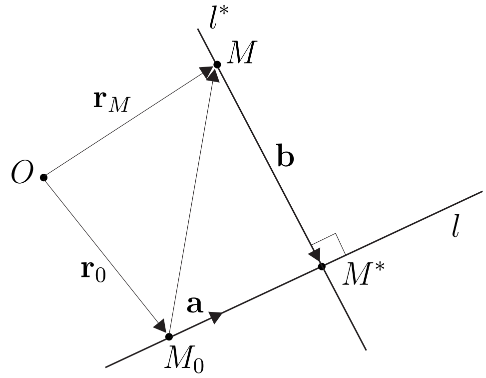


Рис. 35. К задаче 12.

Итак,

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{MM^*} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M + \frac{\langle \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}.$$

З а д а ч а 13. (Пример 9 стр. 147.) Длина ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $a$. Уравнения плоскостей $(AA_1B_1B)$ и $(AA_1C_1C)$ таковы: $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1\rangle = D_1$ и $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2\rangle = D_2$, где $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 1$, $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle = -1/2$. Напишите нормальное векторное уравнение плоскости $(BB_1C_1C)$.

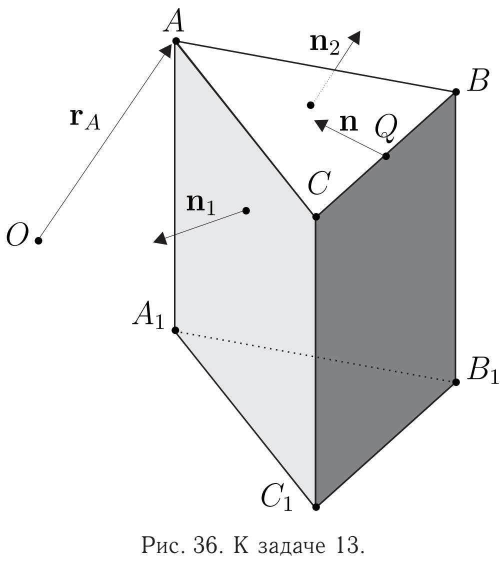


Рис. 36. К задаче 13.

Р е ш е н и е. Пусть $\mathbf{n}$ — это нормальный вектор к плоскости $(BB_1C_1C)$. Этот вектор коллинеарен биссектрисе $[AQ]$ угла $\angle BAC$.

Поэтому в качестве нормального вектора $\mathbf{n}$ плоскости $(BB_1C_1C)$ можно взять вектор

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2;$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{\langle \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \rangle} = \sqrt{|\mathbf{n}_1|^2 + |\mathbf{n}_2|^2 + 2\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle} = \sqrt{2-1} = 1.$$

Итак, уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \rangle = D.$$

Осталось найти число $D$. Прежде всего заметим, что поскольку треугольник $ABC$ правильный, то

$$d = |AQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

С одной стороны, в силу результата задачи 7 имеем

$$d = \frac{|\langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} \rangle - D|}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2|} = |\langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} \rangle - D|\,.$$

С другой стороны, точка $A \in (AA_1B_1B) \cap (AA_1C_1C)$ и поэтому

$$\langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}_A, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2.$$

Следовательно, имеем

$$|D_1 + D_2 - D| = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Leftrightarrow D = D_1 + D_2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

## § 3. Прямая на плоскости.

Задача 1. Ориентированное расстояние от точки до прямой. (стр 155.) Пусть заданы прямые $l, l_0 \in P$, причём $l \perp l_0$. Прямая $l$ делит плоскость $P$ делит на две части. Получить необходимое и достаточное условие того, что точки $M_1$ и $M_2$ лежат в одном полупространстве.

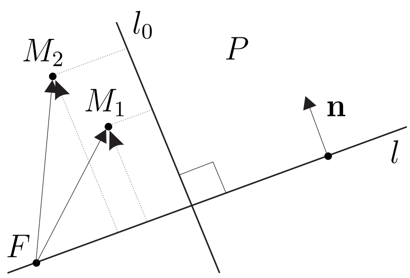


Рис. 37. К задаче 1.

Решение. Точки $M_1, M_2 \notin l$ лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда для произвольной фиксированной точки $F \in l$ векторы

$$\mathrm{Pr}_{l_0}\,\overrightarrow{FM_1} = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM_1}, \mathbf{n} \right\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}\mathbf{n}, \quad \mathrm{Pr}_{l_0}\,\overrightarrow{FM_2} = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM_2}, \mathbf{n} \right\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}\mathbf{n}$$

сонаправлены. Введём так называемое ориентированное расстояние

$$d_1 = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM_1}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}, \quad d_2 = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM_2}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}.$$

Тогда имеем

$$\mathrm{Pr}_{l_0}\,\overrightarrow{FM_1} = d_1\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}, \quad \mathrm{Pr}_{l_0}\,\overrightarrow{FM_2} = d_2\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}.$$

Таким образом, две точки $M_1 \notin l$ и $M_2 \notin l$ лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой $l$, тогда и только тогда, когда числа $d_1$ и $d_2$ имеют одинаковые знаки.

Задача 2. Ориентированное расстояние от точки до прямой на плоскости. (Пример 12 стр. 156.) Докажите, что число

$$d_l(M) := \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}, \tag{3.1}$$

называемое ориентированным расстоянием от точки $M$ до прямой не зависит ни от выбора точки $F \in l$, ни от длины вектора нормали $\mathbf{n}$. Проверьте, что $|d_l(M_0)|$ — это обычное расстояние от точки $M_0$ до прямой $l$. Докажите, что если $l$ :

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n} = (A, B),$$

то для точки $M_0(x_0, y_0)$ имеем

$$d_l(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.2}$$

Решение.

1. Пусть $F^{'} \in l$ и $F^{'} \neq F$, тогда $\langle \overrightarrow{F^{'}F}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Тогда

$$\overrightarrow{F^{'}M} = \overrightarrow{F^{'}F} + \overrightarrow{FM};$$

$$d_l(M) = \frac{\left\langle \overrightarrow{F^{'}M}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|} = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}.$$

2. Пусть $\mathbf{n}^{'} = \lambda\mathbf{n}$ и $\lambda > 0$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\mathbf{n}^{'}}{|\mathbf{n}^{'}|} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}.$$

3. Справедливы следующие равенства:

$$\delta = \left|\operatorname{Pr}_{l_0} \overrightarrow{FM_0}\right| = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{FM_0}, \mathbf{n}\right\rangle\right|}{|\mathbf{n}|}.$$

4. Пусть $F(x_f, y_f) \in l$, тогда если уравнение прямой записать в нормальном виде

$$Ax + By + C = 0, \quad \mathbf{n}(A, B),$$

то $Ax_f + By_f + C = 0$. Поэтому имеем

$$d_l(M_0) = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM_0}, \mathbf{n}\right\rangle}{|\mathbf{n}|} = \frac{A(x_0 - x_f) + B(y_0 - y_f)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задача 3. (Пример 14 стр 157.) Напишите уравнение биссектрисы $\widetilde{l}$ того угла, образованного прямыми

$$l:\ x + 7y = 0, \quad L:\ x - y - 4 = 0,$$

внутри которого лежит точка $A(1, 1)$.

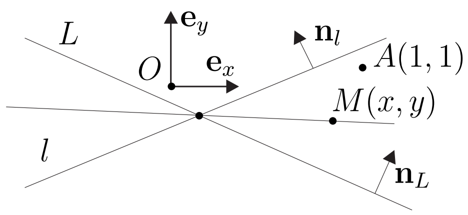


Рис. 38. К задаче 3.

Решение. Если $M(x, y) \in \widetilde{l}$ лежит внутри данного угла, то числа

$$d_l(M) := \frac{x + 7y}{\sqrt{50}} \quad \text{и} \quad d_l(A) := \frac{1 + 7 \cdot 1}{\sqrt{50}}$$

имеют одинаковый знак, т. е. $d_l(M) > 0$. Одинаковый знак и у чисел

$$d_L(M) = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad d_L(A) = \frac{1 - 1 - 4}{\sqrt{2}} < 0.$$

Следовательно, $d_L(M) < 0$. Таким образом, имеем

$$|d_L(M)| = -d_L(M) \quad \text{и} \quad |d_l(M)| = d_l(M);$$

$$|d_L(M)| = |d_l(M)|, \quad d_l(M) = -d_L(M) \Leftrightarrow \frac{x + 7y}{5\sqrt{2}} = -\frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}.$$

Задача 4. (Пример 16 стр. 158.) Пусть $A(3, -4)$ и даны уравнения высот $(BM) : 7x - 2y - 1 = 0$ и $CN : 2x - 7y - 6$ в треугольнике $ABC$. Найти уравнение стороны $(BC)$.

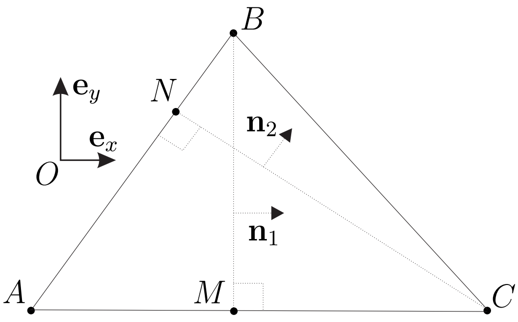


Рис. 39. К задаче 4.

Р е ш е н и е. Уравнение прямой $(BM)$ можно записать в нормальном виде

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \mathbf{n}_1(7,-2), \quad D_1 = 1.$$

Тогда вектор $\mathbf{n}_1(7,-2)$ является направляющим вектором прямой $(AC)$ :

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+4}{-2} \Leftrightarrow 2x + 7y + 22 = 0.$$

Точка $C(x_c, y_C)$ является точкой пересечения прямых $(CN)$ и $(AC)$:

$$2x_C - 7y_C - 6 = 0, \quad 2x_C + 7y_C + 22 = 0 \Rightarrow x_C = -4, \quad y_C = -2.$$

Уравнение прямой $(CN)$ можно также записать в нормальном виде:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \mathbf{n}_2(2,-7), \quad D_2 = 6.$$

Тогда вектор $\mathbf{n}_2(2,-7)$ является направляющим вектором прямой $(AB)$ :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} \Leftrightarrow 7x + 2y - 13 = 0.$$

Точка $B(x_B, y_B)$ является точкой пересечения прямых $(AB)$ и $(BM)$ :

$$7x_B - 2y_B - 1 = 0, \quad 7x_B + 2y_B - 13 = 0 \Rightarrow x_B = 1, \quad y_B = 3.$$

Уравнение прямой $(BC)$:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-3}{-2-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

З а д а ч а 5. (Пример 19 стр. 159.) Напишите уравнение общего перпендикуляра к двум прямым

$$l: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}, \quad L: \ \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Р е ш е н и е. Пусть $\mathbf{a}(1,2,-3)$ и $\mathbf{b}(-2,1,1)$ — это направляющие векторы данных прямых. Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1) \in l$ и $M_2(x_2,y_2,z_2) \in L$ — это точки пересечения этих прямых с общим перпендикуляром. Шесть уравнений для нахождения этих координат получаем из следующих условий:

$$M_1 \in l: \quad \frac{x_1-2}{1} = \frac{y_1-2}{2} = \frac{z_1+1}{-3};$$

$$M_2 \in L: \quad \frac{x_2}{-2} = \frac{y_2-2}{1} = \frac{z_2-4}{1};$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}\rangle = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 + 2(y_2-y_1) - 3(z_2-z_1) = 0;$$

$$\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{b}\rangle = 0 \Rightarrow -2(x_2-x_1) + (y_2-y_1) + (z_2-z_1) = 0.$$

Из этих уравнений получаем, что

$$x_1 = y_2 = 1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = x_2 = 2, \quad z_2 = 3.$$

Следовательно, $M_1(1,0,2)$ и $M_2(2,1,3)$. Уравнение перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{3-2}.$$

Задача 6. (Пример 20 стр. 160.) Написать уравнение прямой $\widetilde{l}$, проходящей через точку $M_0(1,2,3)$ и пересекающей прямые

$$l: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}, \qquad L: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z+3}{6}.$$

Решение. Запишем уравнения прямых $l$ и $L$ в векторной параметрической форме.

$$l: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0(1,1,1), \quad \mathbf{a}(2,-1,2);$$

$$L: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\tau, \quad \mathbf{r}_1(2,8,-3), \quad \mathbf{b}(2,-9,6).$$

Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1) \in l \cap \widetilde{l}$, $M_2(x_2,y_2,z_2) \in L \cap \widetilde{l}$. Поэтому найдутся такие числа $t$ и $\tau$, что

$$x_1 = 1+2t, \quad y_1 = 1-t, \quad z_1 = 1+2t;$$

$$x_2 = 2+2\tau, \quad y_2 = 8-9\tau, \quad z_2 = -3+6\tau.$$

Точки $M_0$, $M_1$ и $M_2$ лежат на одной прямой, поэтому коллинеарны следующие векторы

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1-1, y_1-2, z_1-3) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_0M_2} = (x_2-1, y_2-2, z_2-3).$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (2t, -t-1, 2t-2), \quad \overrightarrow{M_0M_2} = (2\tau+1, -9\tau+6, 6\tau-6).$$

Составим матрицу из строк координат этих двух векторов

$$A = \begin{pmatrix} 2t & -t-1 & 2t-2 \\ 2\tau+1 & -9\tau+6 & 6\tau-6 \end{pmatrix}.$$

По условию коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ имеем

$$\operatorname{rang} A = 1.$$

Это эквивалентно условию равенства нулю всех трёх миноров второго порядка составленных из матрицы $A$. Итак, имеем

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & -t-1 \\ 2\tau+1 & -9\tau+6 \end{vmatrix} = -16t\tau + 13t + 2\tau + 1;$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & 2t-2 \\ 2\tau+1 & 6\tau-6 \end{vmatrix} = 8t\tau - 14t + 4\tau + 2;$$

$$0 = \begin{vmatrix} -t-1 & 2t-2 \\ -9\tau+6 & 6\tau-6 \end{vmatrix} = 12t\tau - 6t - 24\tau + 18.$$

Исключая $t\tau$ из двух первых уравнений, получим

$$\tau = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Если исключить $t\tau$ из последних двух уравнений, то получим

$$\tau = \frac{t+1}{2}.$$

Следовательно,

$$3t - 1 = t + 1 \Rightarrow t = 1, \quad \tau = 1.$$

Таким образом, $M_1(3,0,3)$ и $M_2(4,-1,3)$ и уравнение $\widetilde{l}$ :

$$\frac{x-1}{4-3} = \frac{y-2}{-1-0} = \frac{z-3}{3-3}.$$

## § 4. Плоскость в пространстве.

Задача 1. Аналогично случаю прямой на плоскости ввести ориентированное расстояние $d_P(M)$ от точки $M$ до плоскости $P$, заданной нормальным уравнением

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D.$$

Доказать следующие свойства:

1. Две точки $M_1$ и $M_2$ находятся в одном полупространстве, определяемом плоскостью $P$, тогда и только тогда, когда ориентированные расстояния $d_P(M_1)$ и $d_P(M_2)$ одного знака;
2. $d_P(M) > 0$ тогда и только тогда, когда точка $M$ лежит в том полупространстве, в которое направлен вектор нормали $\mathbf{n}$;
3. В координатах имеем для точки $M(x,y,z)$

$$d_P(M) = \frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

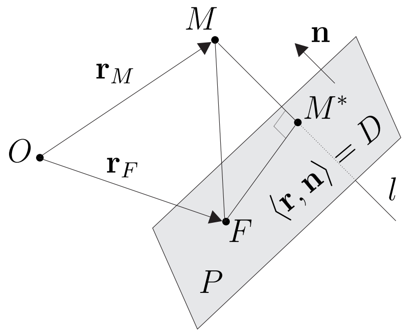


Рис. 40. К задаче 1.

Решение. Пусть $M^*$ — это ортогональная проекция точки $M$ на плоскость $P$. Пусть $F \in P$. Справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FM^*} + \overrightarrow{M^*M}, \quad \overrightarrow{FM^*} \perp \overrightarrow{M^*M}.$$

Пусть $l$ — это прямая, проходящая через точку $M^*$ и ортогональная плоскости $P$. Тогда

$$\overrightarrow{M^*M} = \mathrm{Pr}_l\, \overrightarrow{FM} = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{n} = d_P(M)\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}, \quad d_P(M) := \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}.$$

Заметим, что ориентированное расстояние $d_P(M)$ не зависит от выбора точки $F \in P$, поскольку

$$\overrightarrow{F^{'}M} = \overrightarrow{F^{'}F} + \overrightarrow{FM}, \quad \overrightarrow{F^{'}F} \perp \mathbf{n}.$$

Поэтому

$$d_P(M) := \frac{\left\langle \overrightarrow{F^{'}M}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|} = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|}.$$

Кроме того, имеем

$$d_P(M) = \frac{\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{n}|} = \frac{\langle \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_F, \mathbf{n}\rangle}{|\mathbf{n}|} = \frac{\langle \mathbf{r}_M, \mathbf{n}\rangle - D}{|\mathbf{n}|},$$

поскольку $F \in P$ и поэтому $\langle \mathbf{r}_F, \mathbf{n}\rangle = D$.

1. Если точки $M_1$ и $M_2$ лежат в одном полупространстве относительно плоскости $P$, то проекции $\overrightarrow{FM_1^*}$ и $\overrightarrow{FM_2^*}$ векторов $\overrightarrow{FM_1}$ и $\overrightarrow{FM_2}$ на прямую $l$ ортогональную плоскости $P$ направлены одинаковы и поэтому числа $\left\langle \overrightarrow{FM_1}, \mathbf{n} \right\rangle$ и $\left\langle \overrightarrow{FM_2}, \mathbf{n} \right\rangle$ одного знака. Если же точки $M_1$ и $M_2$ лежат в разных полупространствах, то знаки этих чисел различны.

2. Если точка $M$ лежит в том полупространстве, куда направлен вектор $\mathbf{n}$ нормали к плоскости $P$, то имеем $\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle > 0$, а поэто-

му $d_P(M) > 0$. Если точка $M$ лежит в другом полупространстве по отношению к тому полупространству, куда направлен вектор $\mathbf{n}$ имеем $\left\langle \overrightarrow{FM}, \mathbf{n} \right\rangle < 0$ и поэтому $d_P(M) < 0$.

3. Справедлива цепочка равенств в координатах $M(x, y, z)$ и $\mathbf{n}(A, B, C)$

$$d_P(M) = \frac{\langle \mathbf{r}_M, \mathbf{n} \rangle - D}{|\mathbf{n}|} = \frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Задача 2. (Пример 30 стр. 167.) В правильной пирамиде $SABCD$ ($S$ — вершина) величина двугранного угла при основании равна 30°. Точки $M$, $N$, $P$, $Q$ — это серидины сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ соответственно. Точки $E \in [AB]$, $F \in [SC]$. Известно, что углы, образованные прямой $(EF)$ с плоскостью $(SMP)$, прямой $(EF)$ с плоскостью $(SBA)$ и прямой $(DF)$ с плоскостью $(SNQ)$, равны. Найдите величину этих углов.

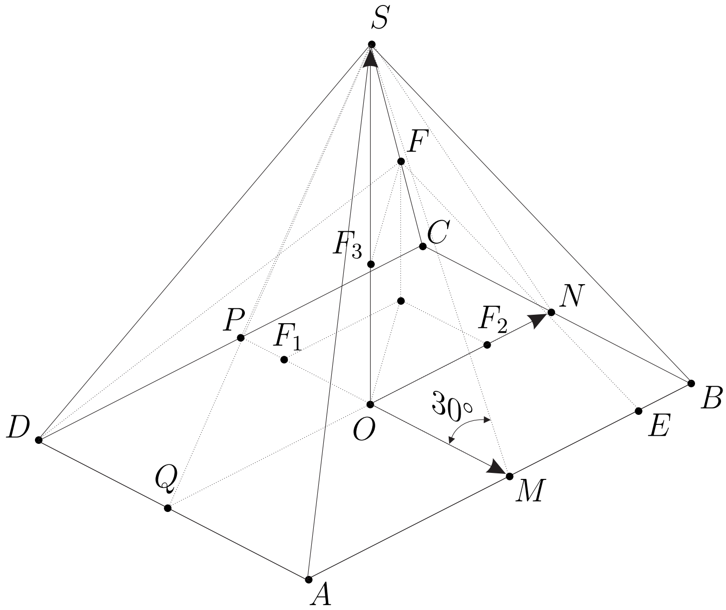


Рис. 41. К задаче 2.

Решение. Пусть $O$ — это центр квадрата $ABCD$. Возьмём за единицу длины половину длины отрезка $[AB]$. Введём прямоугольную систему координат

$$\left\{ O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \frac{\overrightarrow{OS}}{\left|\overrightarrow{OS}\right|} \right\}.$$

Пусть
$$|OS| = h, \quad \lambda = \frac{|FS|}{|SC|}, \quad F = (F_1, F_2, F_3).$$
Тогда
$$\lambda = \frac{|F_1O|}{|OP|} = \frac{|F_2O|}{|ON|} = \frac{|F_3S|}{|SO|};$$
$$|OF_3| = |SO| - |F_3S| = |SO|(1-\lambda) = h(1-\lambda).$$
Поэтому
$$F_1(-\lambda, 0, 0), \quad F_2(0, \lambda, 0), \quad F_3(0, 0, (1-\lambda)h) \Rightarrow F(-\lambda, \lambda, (1-\lambda)h).$$
Пусть
$$m = \frac{|ME|}{|MB|} \Rightarrow E(1, m, 0).$$
Осталось просто выписать координаты всех оставшихся точек:
$$M(1,0,0), \quad P(-1,0,0), \quad N(0,1,0), \quad Q(0,-1,0), \quad A(1,-1,0),$$
$$B(1,1,0), \quad C(-1,1,0), \quad D(-1,-1,0), \quad S(0,0,h).$$
Выпишем уравнения необходимых нам плоскостей:

$P_1 = (ABCD): \quad z = 0; \quad P_2 = (SMP): \quad y = 0; \quad P_3 = (SNQ): \quad x = 0;$

$P_4 = (SBA):$
$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix} = -2hx - 2(z-h) \Leftrightarrow hx + z - h = 0.$$
Выпишем нормальные векторы этих плоскостей:
$$\mathbf{n}_1(0,0,1), \quad \mathbf{n}_2(0,1,0), \quad \mathbf{n}_3(1,0,0), \quad \mathbf{n}_4(h,0,1).$$
Направляющий вектор $\mathbf{a}$ прямой $(EF)$ :
$$\mathbf{a} = \overrightarrow{EF} = (-\lambda - 1, \lambda - m, (1-\lambda)h);$$
направляющий вектор $\mathbf{b}$ прямой $(DF)$ :
$$\mathbf{b} = \overrightarrow{DF} = (-\lambda + 1, \lambda + 1, (1-\lambda)h).$$
По условию задачи имеем
$$\frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4 \rangle|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_4|} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Наконец, справедливы следующие равенства:
$$\frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}_2|} = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}_4 \rangle|}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}_4|} = \frac{|\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{b}||\mathbf{n}_2|}.$$
Из этих равенств вытекает следующее уравнение:

$$\frac{|\lambda - m|}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2+1}\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + (\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2 h^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda - m| = \lambda \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2/3}} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + 4(1-\lambda)^2/3}};$$

Отсюда получаем два решения:

$$m = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad m = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В обоих случаях имеем

$$\cos\alpha = \frac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + 4(1-\lambda)^2/3}} = \sqrt{\frac{3}{31}}.$$

З а д а ч а 3. (Пример 33 стр. 169.) Составьте уравнение ортогональной проекции $l^*$ прямой $l$ :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

на плоскость $P$ :

$$x + y - 2z + 4 = 0.$$

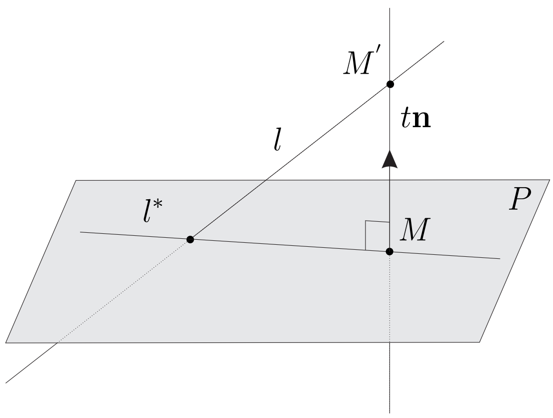


Рис. 42. К задаче 3.

Решение. Пусть точка $M(x_M, y_M, z_M)$ принадлежит искомой прямой $l^*$. С одной стороны, это означает, что $M(x_M, y_M, z_M) \in P$ :

$$x_M + y_M - 2z_M + 4 = 0.$$

С другой стороны, это означает, что $M(x_M, y_M, z_M) \in l_\perp$, где $l_\perp$ — это прямая перпендикулярная к плоскости $P$ и проходящая через точку $M$, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \mathbf{n}t, \quad \mathbf{r}_M(x_M, y_M, z_M), \quad \mathbf{n}(1, 1, -2)$$

— это вектор нормали к плоскости $P$. Кроме того, прямые $l_\perp$ и $l$ должны пересекаться, т. е. найдётся такое $t_M \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{x_M + t_M - 1}{1} = \frac{y_M + t_M + 1}{-1} = \frac{z_M - 2t_M}{2}.$$

Итак, мы пришли к следующей системе уравнений:

$$x_M + y_M - 2z_M + 4 = 0;$$
$$x_M + y_M + 2t_M = 0;$$
$$2y_M + z_M + 2 = 0,$$

из которой получим искомые уравнения:

$$x_M = 2 - \frac{5}{2}t_M, \quad y_M = -2 + \frac{1}{2}t_M, \quad z_M = 2 - t_M \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_M - 2}{5} = \frac{y_M + 2}{-1} = \frac{z_M - 2}{2}.$$

Задача 4. (Пример 35 стр. 170.) Найдите точку $M^*(x^*, y^*, z^*)$ симметричную точке $M_0(1, 2, 3)$ относительно плоскости $P : 2x - 3y + 5z - 68 = 0$.

Решение. С одной стороны, точка $M^*(x^*, y^*, z^*)$ лежит на перпендикуляре к плоскости $P$. Векторное параметрическое уравнение перпендикуляра $l_\perp$ к плоскости $P$ с вектором нормали $\mathbf{n}(2, -3, 5)$, проходящего через точку $M_0(1, 2, 3)$, имеет следующий вид:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t, \quad \mathbf{r}_0(1, 2, 3), \quad \mathbf{r}^*(x^*, y^*, z^*) \in l_\perp$$
$$x^* = 1 + 2t, \quad y^* = 2 - 3t, \quad z^* = 3 + 5t.$$

С другой стороны, середина отрезка $Q \in P$ :

$$Q\left(\frac{x^* + 1}{2}, \frac{y^* + 2}{2}, \frac{z^* + 3}{2}\right) \in P;$$
$$2\frac{x^* + 1}{2} - 3\frac{y^* + 2}{2} + 5\frac{z^* + 3}{2} - 68 = 0.$$

После подстановки в это выражение равенств для $x^*$, $y^*$ и $z^*$ получим $t = 3$. Тогда $M^*(7, -7, 18)$.

Задача 5. (Пример 42 стр. 175.) Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна $a$. Точка $E$ — середина $[CD]$, точка $F$ — середина высоты $[BL]$ грани $ABD$. Отрезок $[MN]$ с концами на прямых $(AD)$ и $(BC)$ пересекает прямую $(EF)$ и перпендикулярен ей. Найдите длину отрезка $[MN]$.

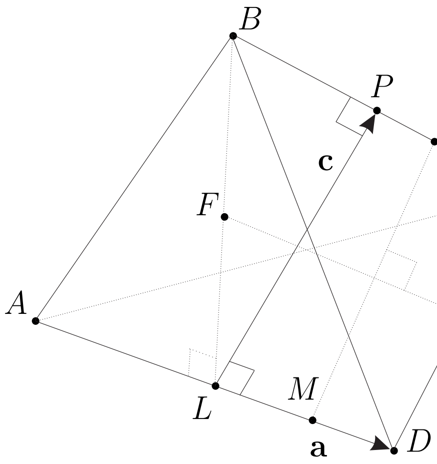


Рис. 43. К задаче 3.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{LP}$, где $P$ — это середина отрезка $[BC]$. Тогда

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0;$$
$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a,$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{|BL|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2} = \\ = \sqrt{|AB|^2 - \frac{1}{4}|AD|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2} = \sqrt{a^2 - 2\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Согласно формуле средней линии пространственного четырёхугольника имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{LD}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{a}.$$

Пусть

$$\overrightarrow{PN} = x\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{LM} = y\mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} = -y\mathbf{a} + \mathbf{c} + x\mathbf{b}.$$

Из цикла $DCPLD$ получим равенство

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LD}.$$

Поэтому имеем

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{MD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{LD} - \overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LD}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - y\right)\mathbf{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}\right) = \left(\frac{1}{4} - y\right)\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

По условию задачи имеем

$$0 = \left\langle \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{MN} \right\rangle = \frac{x}{2}a^2 - \frac{y}{4}a^2 \Rightarrow y = 2x.$$

По условию задачи прямые $(FE)$ и $(MN)$ пересекаются, поэтому векторы

$$\overrightarrow{FE}, \quad \overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{ME}$$

компланарны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -y & x & 1 \\ 1/4 - y & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -y & 1 \\ 1/4 - y & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}(1 - 6x) \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\left(-2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 6\mathbf{c}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = a\frac{\sqrt{23}}{6}.$$

Семинар 3

# ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

## § 1. Векторное произведение

Задача 1. (Пример 1 стр. 179.) Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — это базис. Найти матрицу перехода к базисам $(\mathbf{b}, -\mathbf{c}, -\mathbf{a})$.

Решение. Пользуемся общей формулой для произведения матриц. Пусть

$$\mathbf{E} := (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{E}^{'} := (\mathbf{b}, -\mathbf{c}, -\mathbf{a}).$$

Искомая матрица $S$ является вещественной матрицей $3 \times 3$ и удовлетворяет равенству

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}^{'} = \mathbf{E} \cdot S, \quad S = \|S_1, S_2, S_3\| \\
\mathbf{b} = \mathbf{E} \cdot S_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot S_1, \\
-\mathbf{c} = \mathbf{E} \cdot S_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot S_2, \\
-\mathbf{a} = \mathbf{E} \cdot S_3 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot S_3.
\end{gathered}$$

Из этих формул вытекает, что

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Доказать, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}
|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 = \\
&= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2
\end{aligned}$$

Решение. Доказать самим!

Задача 3. (Пример 11 стр. 189.) Докажите, что площадь $S$ треугольника, векторы сторон которого равны векторам медиан треугольника $ABC$, составляет $3/4$ площади $\sigma$ треугольника $ABC$.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b});$$

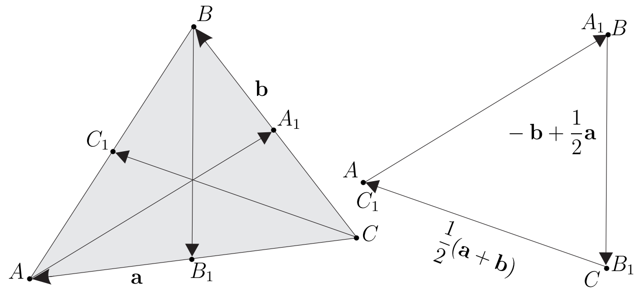


Рис. 44. К задаче 3.

$$\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

$$\left[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right), -\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right] = \frac{3}{4}[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Поэтому имеем

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}\right]\right| = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\left|[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right| = \frac{3}{4}\sigma.$$

Задача 4. (Пример 12 стр. 189.) Дан треугольник $ABC$. На прямых $(AB)$, $(BC)$, $(CA)$ выбраны соответственно точки $M$, $N$, $P$ так, что

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA}.$$

При каком значении $\alpha$ площадь треугольника, векторы сторон которого суть $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$, наименьшая?

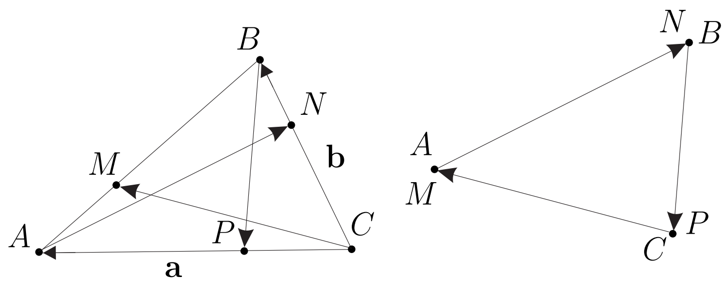


Рис. 45. К задаче 4.

Решение. В силу результата задачи 6 семинара 1 векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т. е.

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}.$$

Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = -\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}.$$

Итак,

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[(1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, -\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \alpha + \alpha^2\right)\left|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right| = \left(1 - \alpha + \alpha^2\right) S_{ABC}.$$

Минимум достигается при $\alpha = 1/2$, т. е. в том случае, когда $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ — это медианы. Этот минимум равен $\frac{3}{4}S_{ABC}$.

Задача 5. (Пример 13 стр. 189.) Треугольники $ABC$ и $ACD$ расположены в одной плоскости так, что точки $B$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $(AC)$. Докажите, что площадь $S$ четырёхугольника $ABCD$ равна

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]\right|.$$

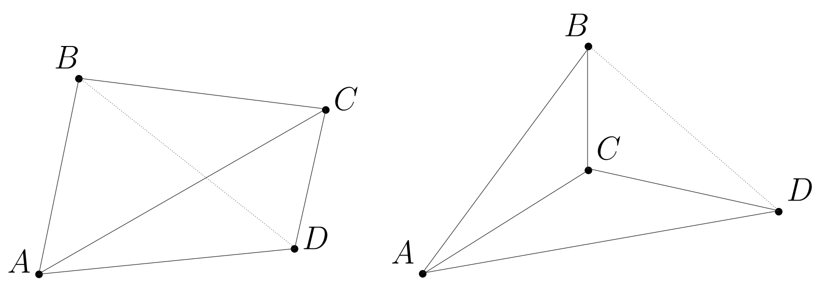


Рис. 46. К задаче 5.

Решение. По условию задачи векторы

$$[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] \quad \text{и} \quad [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]$$

сонаправлены. Поэтому

$$2S = 2S_{ADC} + 2S_{ABC} = \left|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]\right| + \left|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Задача 6. (Пример 17 стр. 193.) Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ $((AD)\|(BC))$ равна

$$S_{ABCD} = \frac{1+k}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|, \quad k = \frac{|BC|}{|AD|}.$$

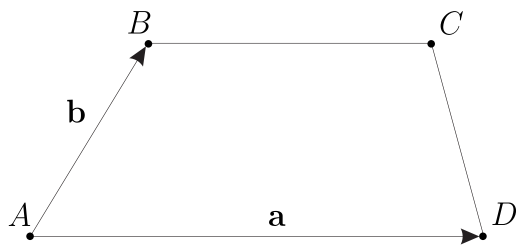


Рис. 47. К задаче 6.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} = k\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + k\mathbf{a};$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\mathbf{b} + k\mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|[\mathbf{b}, \mathbf{a}] - k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right| = \frac{1+k}{2}\left|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right|.$$

Задача 7. (Пример 18 стр. 193.) Площадь трапеции $ABCD$ равна $S$, отношение длин оснований

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{1}{k} = 3.$$

На прямой, пересекающей в точке $K$ продолжение основания $[AD]$ за точку $D$, расположен отрезок $[EF]$ так, что $(AE)\|(DF)$, $(BE)\|(CF)$,

$$\frac{|AE|}{|DF|} = m = 2, \quad \frac{|CF|}{|BE|} = n = 2.$$

Найдите площадь $\sigma$ треугольника $EFD$.

Решение. Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{y} = \overrightarrow{DF}, \quad \mathbf{z} = \overrightarrow{BE}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{DK} = x\mathbf{a}, \quad x > 0;$$

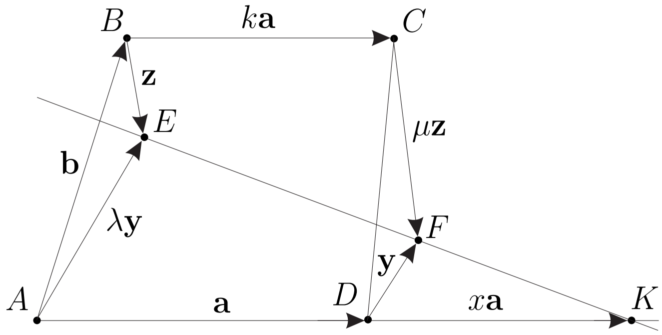


Рис. 48. К задаче 7.

$$\overrightarrow{AE} = \lambda y, \quad |\lambda| = m; \quad \overrightarrow{CF} = \mu\mathbf{z}, \quad |\mu| = n; \quad \overrightarrow{BC} = k\mathbf{a}.$$

Из цикла $ABEA$ имеем

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{b} + \mathbf{z} - \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Из цикла $ABCFDA$ имеем

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a} + \mu\mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Из этих двух уравнений получим равенство

$$\mathbf{y} = \frac{(1-\mu)\mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a}}{1-\lambda\mu}.$$

Поэтому имеем

$$\sigma = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]\right| = \frac{1}{2}\,|[\lambda\mathbf{y} - \mathbf{a}, \mathbf{y}]| = \frac{1}{2}\,|[\mathbf{a}, \mathbf{y}]| =$$
$$= \frac{1}{2|1-\lambda\mu|}\,|[\mathbf{a}, (1-\mu)\mathbf{b} + (k-1)\mathbf{a}]| = \frac{|1-\mu|}{2|1-\lambda\mu|}\,|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \frac{|1-\mu|}{|1-\lambda\mu|}\,\frac{S}{k+1}.$$

Теперь воспользуемся условием, что $x > 0$. Векторы $\overrightarrow{KF}$ и $\overrightarrow{KE}$ коллинеарны, т. е. найдётся такое число $t \in \mathbb{R}$, что

$$\overrightarrow{KE} = t\overrightarrow{KF};$$
$$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AK} = \lambda\mathbf{y} - (1+x)\mathbf{a};$$
$$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DK} = \mathbf{y} - x\mathbf{a};$$
$$\lambda\mathbf{y} - (1+x)\mathbf{a} = t\mathbf{y} - tx\mathbf{a} \Leftrightarrow \lambda = t = \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \lambda = m = 2.$$

Возможны два случая $\mu = 2$ и $\mu = -2$. В первом случае имеем

$$\sigma = \frac{1}{4}S.$$

Во втором случае имеем

$$\sigma = \frac{9}{20}S.$$

Семинар 4

# ВЕКТОРНОЕ И ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

## § 1. Векторное уравнение прямой в форме Плюккера

Задача 1. Векторное уравнение прямой в форме Плюккера. (Пример 3 стр. 198.) Пусть в пространстве зафиксирован некоторый полюс $O$, выбраны векторы $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{M}$, причём $\langle \overrightarrow{M}, \mathbf{a} \rangle = 0$. Докажите, что множество $l$ всех точек пространства, радиус–векторы $\mathbf{r}$ которых удовлетворяют уравнению

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M},$$

есть прямая.

Решение. Пусть

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2}.$$

По формуле двойного векторного произведения имеем

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \left[ \left[ \mathbf{a}, \overrightarrow{M} \right] \mathbf{a} \right] = -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \left[ \mathbf{a}, [\mathbf{a}, \overrightarrow{M}] \right] = \\ = -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \left( \mathbf{a} \left\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{M} \right\rangle - \overrightarrow{M} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \right) = \overrightarrow{M}.$$

Следовательно, точка $M_0(\mathbf{r}_0) \in l$. Тогда уравнение $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M}$ эквивалентно

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \| \mathbf{a} \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}.$$

Обратно, если нам задано уравнение прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$. Тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t \Rightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0 \Rightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = M := [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}].$$

Задача 2. (Пример 5 стр. 199.) Найдите радиус–вектор $\mathbf{x}$ общей точки прямой $l$ :

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0, \quad \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{M} \rangle = 0$$

и плоскости $P$ :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle \neq 0.$$

Решение. Перепишем уравнение прямой в виде векторного параметрического уравнения:

$$\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2} + \mathbf{a}t.$$

Тогда имеем

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = D \Leftrightarrow t\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle + \frac{\left\langle [\mathbf{a}, \overrightarrow{M}], \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{a}|^2} = D,$$

$$t = \frac{D|\mathbf{a}|^2 - \left\langle [\mathbf{a}, \overrightarrow{M}], \mathbf{n} \right\rangle}{|\mathbf{a}|^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle}.$$

Радиус–вектор $\mathbf{x}$ общей точки имеет следующий вид:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \left( \left[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}\right] + \frac{D|\mathbf{a}|^2 - \left\langle [\mathbf{a}, \overrightarrow{M}], \mathbf{n} \right\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{a} \right).$$

Задача 3. (Пример 6 стр. 199.) Напишите нормальное уравнение плоскости $P$, заданной параметрически уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}\tau + \mathbf{b}t, \quad \tau, t \in \mathbb{R}.$$

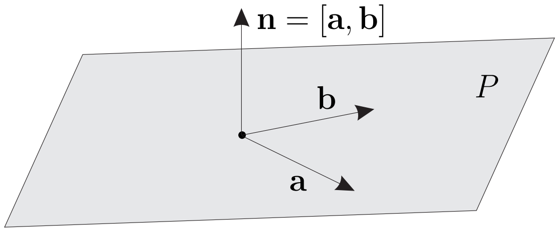


Рис. 49. К задаче 3.

Решение. Согласно определению плоскости векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются линейно независимыми и поэтому определён вектор нормали к плоскости $\mathbf{n} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Перепишем уравнение плоскости в следующем виде:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}\tau + \mathbf{b}t \Rightarrow \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

## § 2. Стереометрические задачи на векторное произведение

Задача 4. (Пример 7 стр. 200.) В тетраэдре $ABCD$ биссекторная плоскость двугранного угла с ребром $[CD]$ пересекает ребро $[AB]$ в точке $F$. Докажите, что

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}.$$

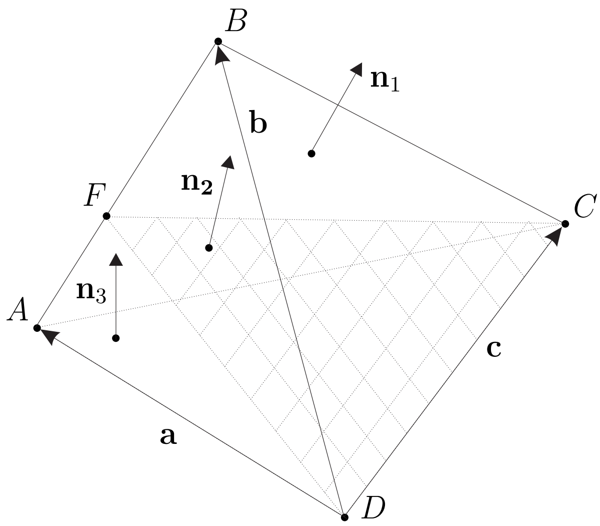


Рис. 50. К задаче 4.

Решение. Положим

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{DC};$$

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{c}, \mathbf{a}], \quad \mathbf{a}_1 = [\mathbf{c}, \mathbf{b}];$$

$$\varphi = \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1), \quad |AF| = \mu|AB|.$$

Тогда

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\,|[\mathbf{c}, \mathbf{a}]| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}_1|, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}\,|[\mathbf{c}, \mathbf{b}]| = \frac{1}{2}|\mathbf{a}_1|.$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}_1$ плоскости $(BCD)$ равен

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}_1;$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}_2$ биссекторной плоскости $(FCD)$ равен

$$\mathbf{n}_2 = [\mathbf{c}, \overrightarrow{DF}] = [\mathbf{c}, \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})] = \mu\mathbf{a}_1 + (1 - \mu)\mathbf{b}_1.$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}_3$ плоскости $(ACD)$ равен

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{b}_1.$$

Поскольку плоскость $(FCD)$ — биссекторная, то

$$\angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \angle(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3).$$

Поэтому имеем

$$\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\rangle}{|\mathbf{n}_2||\mathbf{n}_3|} \Leftrightarrow \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle}{|\mathbf{n}_1|} = \frac{\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\rangle}{|\mathbf{n}_3|}.$$

Поэтому

$$\frac{\mu|\mathbf{a}_1|^2 + (1-\mu)\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mu\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle + (1-\mu)|\mathbf{b}_1|^2}{|\mathbf{b}_1|}.$$

Поскольку по определению

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle = |\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1|\cos\varphi,$$

то в результате получим равенство

$$[(1-\mu)|\mathbf{b}_1| - \mu|\mathbf{a}_1|](\cos\varphi - 1) = 0 \Rightarrow \frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mu}{1-\mu},$$

поскольку $0 < \varphi < \pi$. Поэтому

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{\mu|AB|}{(1-\mu)|AB|} = \frac{|AF|}{|AB| - |AF|} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

З а д а ч а 5. (Пример 8 стр. 201.) Пусть $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ — боковые рёбра четырёхугольной усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$. Ребро $[CC_1]$ перпендикулярно плоскости $(ABCD)$, $|CC_1| = |A_1B_1| = 2$, $|AB| = 4$, $\angle BAD = 60°$. На ребре $[BC]$ взята точка $M$ так, что $|BM| = 3$, и через точки $B_1$, $M$ и центр $O$ ромба $ABCD$ проведена плоскость. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью грани $AA_1C_1C$.

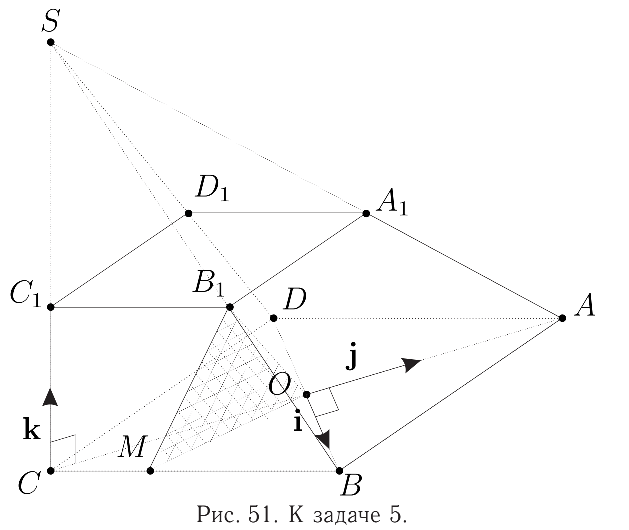


Рис. 51. К задаче 5.

Р е ш е н и е. Введём правый ортонормированный базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ :

$$\mathbf{i} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|}, \quad \mathbf{j} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}, \quad \mathbf{k} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|}.$$

В этом базисе имеем

$$\overrightarrow{OB} = (2, 0, 0),$$

поскольку $|OB| = |AB| \sin 30^\circ = 4 \cdot 1/2 = 2$;

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} = (0, 2\sqrt{3}\,, 0),$$

поскольку $\left|\overrightarrow{OA}\right| = |AB| \cos 30^\circ = 4 \cdot \sqrt{3}\,/2 = 2\sqrt{3}\,$;

$$\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2),$$

поскольку $|CC_1| = 2$;

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = (0, 2\sqrt{3}\,, 0) + (2, 0, 0) = (2, 2\sqrt{3}\,, 0);$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = (1/2, \sqrt{3}\,/2, 0),$$

поскольку

$$|CB| = 4, \quad |BM| = 3 \Rightarrow |CM| = 1 \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = (1, \sqrt{3}\,, 0),$$

поскольку

$$\frac{|C_1B_1|}{|CB|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{1}{2};$$

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CM} = (0, 2\sqrt{3}\,, 0) - (1/2, \sqrt{3}\,/2, 0) = (-1/2, 3\sqrt{3}\,/2, 0);$$

$$\begin{gathered}\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = -\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \\ = (-1/2, -\sqrt{3}\,/2, 0) + (0, 0, 2) + (1, \sqrt{3}\,, 0) = (1/2, \sqrt{3}\,/2, 2);\end{gathered}$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}_1$ плоскости $(B_1MO)$ равен

$$\mathbf{n}_1 = \left[\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB_1}\right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{vmatrix} = (3\sqrt{3}\,, 1, -\sqrt{3}\,).$$

Нормальный вектор $\mathbf{n}_2$ плоскости $(AA_1C_1C)$, параллельной векторам $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, равен, очевидно, $\mathbf{i}$. Поэтому для угла между плоскостями $(B_1MO)$ и $(AA_1C_1C$ получаем выражение

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{31}}.$$

Семинар 5

# СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

## § 1. Смешанное произведение

Задача 1. (Пример 3 стр. 206.) Докажите, что объём тетраэдра равен $1/6$ модуля смешанного произведения любых трёх некомпланарных векторов, образующих рёбра тетраэдра.

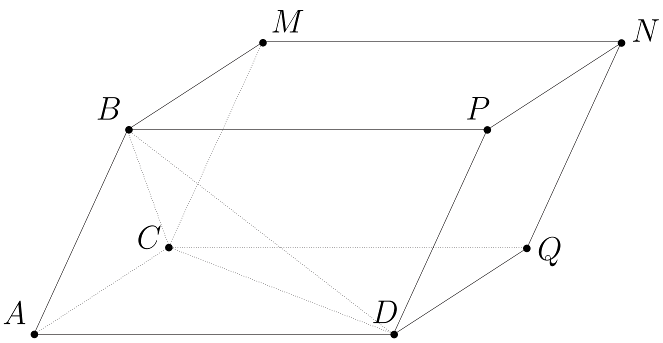


Рис. 52. К задаче 1.

Решение. Достроив тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $ACQDBMNP$, получим

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} h S_{ACD},$$

где $h$ — длина высоты, опущенной из вершины $B$ на плоскость $(ACD)$,

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ACQD}$$

— это площадь треугольника $ACD$. Таким образом, имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} h S_{ACQD} = \frac{1}{6} \left| \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle \right|.$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Поэтому

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle;$$
$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle.$$

Задача 2. (Пример 5 стр. 207.) Дан тетраэдр, определяемый двумя отрезками, которые принадлежат скрещивающимся прямым. Докажите, что объём тетраэдра не изменится, если сдвинуть эти отрезки, не меняя их длин, вдоль соответствующих прямых.

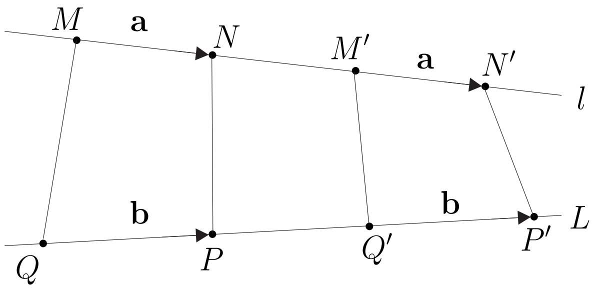


Рис. 53. К задаче 2.

Решение. Пусть $l$ и $L$ — это скрещивающиеся прямые; $M$, $N$, $M'$, $N'$ — это точки прямой $l$; $P$, $Q$, $P^{'}$, $Q^{'}$ — это точки прямой $L$, причём

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M^{'}N^{'}} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q^{'}P^{'}} = \mathbf{b}.$$

Тогда согласно задачи 1 имеем

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{QN} \right\rangle\right|, \quad V_{M'N'P'Q'} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{Q'N'} \right\rangle\right|;$$
$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'N'} + \overrightarrow{N'N} = \lambda\mathbf{b} + \overrightarrow{Q'N'} + \mu\mathbf{a};$$
$$\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{QN} \right\rangle = \lambda\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} \right\rangle + \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{Q'N'} \right\rangle + \mu\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \right\rangle = \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{Q'N'} \right\rangle.$$

Следовательно, $V_{MNPQ} = V_{M'N'P'Q'}$.

Задача 3. (Пример 6 стр. 208.) В тетраэдре $ABCD$ точки $M$, $N$, $P$, $Q$ лежат соответственно на рёбрах $[BC]$, $[AD]$, $[AB]$, $[CD]$, причём

$$|AP| = |PB|, \quad |AN| = |ND|, \quad |CQ| = |QD|, \quad |MC| = 2|BM|.$$

Пары точек $A_1, B_1$ и $C_1, D_1$ выбраны соответственно на отрезках $[NM]$ и $[PQ]$ так, что

$$|NA_1| = |A_1B_1| = |B_1M|; \quad |PC_1| = |C_1D_1| = |D_1Q|.$$

Найдите отношение объёмов $V_{ABCD}$ и $V_{A_1B_1C_1D_1}$.

Решение. Введём базис

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{AD}.$$

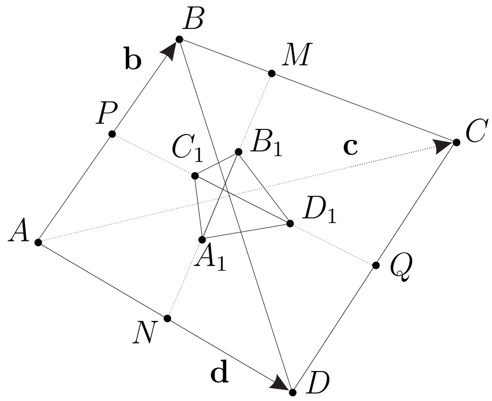


Рис. 54. К задаче 3.

В этом базисе имеем

$$\overrightarrow{C_1D_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})\right) = \\ = -\frac{1}{6}\mathbf{b} + \frac{1}{6}\mathbf{c} + \frac{1}{6}\mathbf{d};$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \\ = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{d} + \mathbf{b} + \frac{1}{3}(\mathbf{c}-\mathbf{b})\right) = \frac{2}{9}\mathbf{b} + \frac{1}{9}\mathbf{c} - \frac{1}{6}\mathbf{d};$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{C_1D_1} = \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{6}\mathbf{c} + \frac{1}{6}\mathbf{d};$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NA_1} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{3}\mathbf{d} + \frac{2}{9}\mathbf{b} + \frac{1}{9}\mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{6}\mathbf{d} - \frac{1}{9}\mathbf{b} - \frac{1}{18}\mathbf{c}.$$

Итак,

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{6}\left|\left\langle\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1}\right\rangle\right| = \\ = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2/9 & 1/9 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/9 & -1/18 & 1/6 \end{vmatrix}\langle\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle\right| = \\ = \frac{1}{216}\frac{1}{6}\left|\langle\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle\right| = \frac{V_{ABCD}}{216}.$$

З а д а ч а 4. (Пример 9 стр. 209.) Докажите тождество:

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = \mathbf{c}\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle - \mathbf{d}\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle.$$

Р е ш е н и е. По формуле двойного векторного произведения получим следующее равенство:

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]] = \mathbf{c}\langle[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{d}\rangle - \mathbf{d}\langle[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}\rangle = \mathbf{c}\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle - \mathbf{d}\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle.$$

З а д а ч а 5. (Пример 10 стр. 209.) Докажите, что

$$\langle[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{c},\mathbf{a}]\rangle = \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle^2.$$

Р е ш е н и е. В силу результата задачи 4 имеем

$$[[\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{c},\mathbf{a}]] = \mathbf{c}\langle[\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{a}\rangle - \mathbf{a}\langle[\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{c}\rangle = \mathbf{c}\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle;$$

$$\langle[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{c},\mathbf{a}]\rangle = \langle[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}\rangle\,\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle^2.$$

З а д а ч а 6. (Пример 13 стр. 210.) Даны векторы

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{DC}$$

трёх рёбер тетраэдра $ABCD$, выходящих из вершины $D$. Найдите вектор $\overrightarrow{DH}$ высоты тетраэдра, опущенной из вершины $D$ на плоскость $(ABC)$.

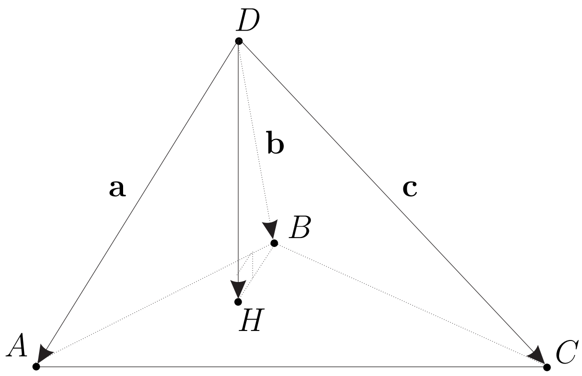


Рис. 55. К задаче 6.

Р е ш е н и е. Векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BH}$ компланарны.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b};$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

Поэтому найдутся такие числа $\lambda$ и $\mu$, что

$$\overrightarrow{BH} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mu(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

Отметим, что $\overrightarrow{DH} \perp (ABC)$ и поэтому вектор $\overrightarrow{DH}$ коллинеарен вектору

$$\mathbf{d} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right] = [\mathbf{c}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

Поэтому найдётся такое число $\nu$, что

$$\overrightarrow{DH} = \nu \mathbf{d}.$$

Из цикла $DHBD$ имеем

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{DB},$$

которое эквивалентно следующему равенству

$$\nu \mathbf{d} = (1-\lambda-\mu)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}.$$

Умножим обе части скалярно на вектор $\mathbf{d}$ и получим равенство

$$\begin{aligned}\nu|\mathbf{d}|^2 = \langle [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}], (1-\lambda-\mu)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}\rangle = \\ = (1-\lambda-\mu)\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle + \mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle + \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle.\end{aligned}$$

Итак,

$$\overrightarrow{DH} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle}{\left[[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\right]^2}\left([\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\right).$$

## § 2. Взаимный базис

З а д а ч а 7. (Пример 15 стр. 212.) Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ некомпланарны. Докажите, что векторы

$$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{f}_2 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \quad \mathbf{f}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$$

в этом порядке образуют правый базис.

Р е ш е н и е. Действительно,

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle^2 > 0.$$

В з а и м н ы й б а з и с. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это базис. Взаимный базис — это

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle}, \quad \mathbf{e}'_3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle}.$$

Взаимный базис обладает следующими свойствами:

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j\right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j; \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j; \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\rangle = \frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle}.$$

Задача 8. (Пример 16 стр. 212.) Найдите радиус–вектор $\mathbf{x}$ общей точки $M$ трёх плоскостей:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_3 \rangle = D_3,$$

где $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle \neq 0$.

Решение. Искомый вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_3 \rangle = D_3.$$

Пусть $\{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$. Будем искать вектор $\mathbf{x}$ в виде разложения по взаимному базису:

$$\mathbf{x} = y\mathbf{n}'_1 + z\mathbf{n}'_2 + t\mathbf{n}'_3.$$

Заметим, что

$$D_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}_1 \rangle = y\langle \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}_1 \rangle = y, \quad D_2 = z, \quad D_3 = t.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{x} = D_1\mathbf{n}'_1 + D_2\mathbf{n}'_2 + D_3\mathbf{n}'_3 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] + D_2[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle}.$$

Задача 9. (Пример 18 стр. 213.) Докажите, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ верно равенство

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

Решение. Пусть сначала $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0$, тогда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Тогда без ограничения общности имеем

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{b}.$$

Отсюда вытекают следующие равенства:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle;$$
$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = \alpha\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle;$$
$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{a} \rangle = \alpha\langle \mathbf{z}, \mathbf{b} \rangle + \beta\langle \mathbf{z}, \mathbf{c} \rangle.$$

Следовательно, первый столбец определителя является линейной комбинацией двух остальных. Итак, $\Delta = 0$ и равенство в этом случае имеет место.

Пусть теперь $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \neq 0$. Значит, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — это базис. Рассмотрим тогда взаимный базис $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$. Разложим тогда векторы $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ по взаимному базису:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно известной формуле получаем следующее равенство:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \rangle \cdot \Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \rangle \cdot \Delta = \Delta.$$

Теперь вычислим все элементы определителя. Действительно, имеем

$$\alpha_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle, \quad \alpha_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle, \quad \alpha_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle;$$
$$\beta_1 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle, \quad \beta_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle, \quad \beta_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{c} \rangle;$$
$$\gamma_1 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{a} \rangle, \quad \gamma_2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{b} \rangle, \quad \gamma_3 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{c} \rangle.$$

Итак, равенство доказано.

Семинар 6

# ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

## § 1. Прямые и плоскости с точки зрения скалярного, векторного и смешанного произведений

Задача 1. (Пример 1 стр. 219.) Напишите параметрическое векторное уравнение прямой $l$, заданной как линия пересечения двух непараллельных плоскостей

$$P_1 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1; \quad P_2 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2.$$

Решение.

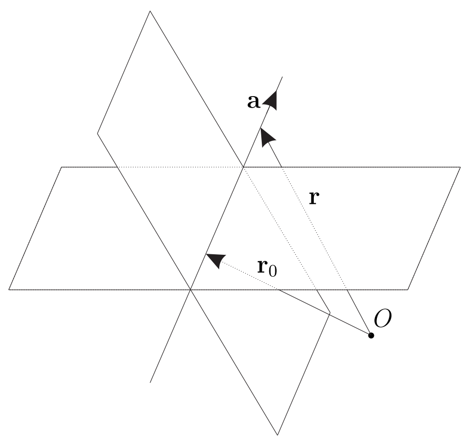


Рис. 56. К задаче 1.

Первый способ. Следствием указанных уравнений плоскостей является следующее векторное уравнение:

$$\mathbf{n}_1 \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle - \mathbf{n}_2 \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_2 \mathbf{n}_1 - D_1 \mathbf{n}_2,$$

которое в свою очередь можно переписать в форме Плюккера

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M},$$

где
$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], \quad \overrightarrow{M} = D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2.$$
Теперь перепишем в следующем виде
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

Второй способ. Направляющий вектор искомой прямой равен $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Вектор $\mathbf{r}_0$ начальной точки прямой ищем как радиус–вектор основания перпендикуляра, опущенного из полюса на искомую прямую, т. е. как решение следующих уравнений:
$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{a} \rangle = 0.$$
Из результата задачи 8 семинара 11 имеем
$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1] + 0 \cdot [\mathbf{n}_2, \mathbf{a}]}{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{a} \rangle} = \frac{[\mathbf{a}, D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$
Уравнение имеет следующий вид:
$$\mathbf{r} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2} + [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]t.$$

Задача 2. (Пример 3 стр. 221.) Найдите ортогональную проекцию $M^*(\mathbf{r}^*)$ точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $l$, являющуюся линией пересечения непараллельных плоскостей
$$P_1: \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1; \quad P_2: \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2.$$

Решение. Вектор $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ — это направляющий вектор прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M^*} \perp \mathbf{a}$. Итак, для радиус–вектора $\mathbf{r}^*$ справедливо следующая система уравнений:
$$\langle \mathbf{r}^*, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2,$$
$$\langle \mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{a} \rangle = D_3.$$
Из результата задачи 8 семинара 11 имеем
$$\mathbf{r}^* = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{a} \rangle} =$$
$$= \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2] + \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}$$

Задача 3. Пучок плоскостей, проходящих через заданную прямую. Напишите уравнения всех плоскостей, проходящих через прямую $l$, которая является линией пересечения плоскостей:
$$P_1: \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad P_2: \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}.$$

Пусть $P^*$ — это произвольная плоскость, содержащая прямую $l$ :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}^* \rangle = D^*.$$

Направляющий вектор прямой $l$ равен $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Поэтому нормальный вектор $\mathbf{n}^*$ плоскости $P^*$ ортогонален вектору $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Иначе говоря, вектор $\mathbf{n}^*$ компланарен с векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Поскольку векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ по условию являются линейно независимыми, то

$$\mathbf{n}^* = \alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Произвольная точка $M_0(\mathbf{r}_0) \in l$ принадлежит одновременно всем трём плоскостям $P_1$, $P_2$ и $P^*$. Поэтому имеем

$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \langle \mathbf{r}_0, \alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2 \rangle = D^* \Rightarrow D^* = \alpha D_1 + \beta D_2.$$

Итак, уравнение произвольной плоскости $P^* \ni l$ имеет следующий вид:

$$\alpha \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle - D_1 \right) + \beta \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle - D_2 \right) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Обратно, это уравнение является уравнением плоскости содержащей прямую $l$.

Задача 4. (Пример 5 стр. 223.) Через линию пересечения двух плоскостей

$$P_1 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad P_2 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2$$

проведите плоскость, перпендикулярную плоскости

$$P_3 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_3 \rangle = D_3, \quad \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \neq 0.$$

Решение. Искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\alpha \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle - D_1 \right) + \beta \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle - D_2 \right) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0;$$
$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \alpha D_1 + \beta D_2, \quad \mathbf{n} = \alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2;$$
$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle + \beta \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \frac{\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle}{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle};$$
$$-\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle - D_1 \right) + \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle \left( \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle - D_2 \right) = 0.$$

Итак,

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle - \mathbf{n}_1 \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle \rangle = D_2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle - D_1 \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle;$$
$$\langle \mathbf{r}, [\mathbf{n}_3, [\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1]] \rangle = \langle D_2 \mathbf{n}_1 - D_1 \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle;$$
$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_3, [\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1] \rangle = \langle D_2 \mathbf{n}_1 - D_1 \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle.$$

Задача 5. (Пример 8 стр. 224.) Напишите уравнение плоскости, проходящей через общую точку плоскостей:

$$P_1 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad P_2 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad P_3 : \ \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_3 \rangle = D_3$$

при условии $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle \neq 0$.

Решение. Пусть плоскость $P^*$ :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}^* \rangle = D^*$$

удовлетворяет условию задачи. Тогда

$$\mathbf{n}^* = \alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 + \gamma\mathbf{n}_3, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0.$$

Точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ принадлежит одновременно всем четырём плоскостям тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1 \rangle = D_1, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2 \rangle = D_2, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_3 \rangle = D_3, \quad \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}^* \rangle = D^*.$$

Отсюда вытекает

$$D^* = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3.$$

Поэтому получим следующее уравнение плоскости:

$$\alpha\left(\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle - D_1\right) + \beta\left(\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle - D_2\right) + \gamma\left(\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_3 \rangle - D_3\right) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0.$$

Задача 6. (Пример 9 стр. 224.) Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r_1})$ и прямую $l$ :

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{M} \rangle = 0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой в векторном параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Уравнение плоскости такое

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1] \rangle = 0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D,$$

где

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1] = \overrightarrow{M} - [\mathbf{a}, \mathbf{r}_1], \quad D = \langle \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1] \rangle = \langle \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{r}_0] \rangle = \langle \mathbf{r}_1, \overrightarrow{M} \rangle.$$

Задача 7. (Пример 11 стр. 225.) Даны прямая $l$ :

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{M} \rangle = 0;$$

и плоскость $P$ :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}.$$

При каком условии $l$ и $P$ 1. имеют одну общую точку; 2. не пересекаются; 3. прямая лежит на плоскости.

Решение. Перепишем уравнение прямой в векторном параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2};$$

$$\langle \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \mathbf{n} \rangle = D \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle t = D - \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle.$$

Из этой формулы вытекает, что имеет место ситуация 1, если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle \neq \neq 0$; имеет место ситуация 2, если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = 0$, но $D \neq \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle$; имеет место ситуация 3, если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = 0$ и $D = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle$.

В первом случае справедлива следующее выражение для радиус-вектора общей точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{D - \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}\mathbf{a} = \\ = \frac{\mathbf{r}_0\langle \mathbf{n}, \mathbf{a}\rangle - \mathbf{a}\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0\rangle + D\mathbf{a}}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle} = \frac{D\mathbf{a} + [\mathbf{n}, [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle} = \frac{D\mathbf{a} + [\mathbf{n}, \overrightarrow{M}]}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle}.$$

Задача 8. (Пример 12 стр. 226.) Найдите ортогональную проекцию $M^*(\mathbf{r}^*)$ точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую $l : [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \overrightarrow{M}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{a}, \overrightarrow{M}\rangle = 0$.

Решение. Ясно, что $\langle \overrightarrow{M^* M_1}, \mathbf{a}\rangle = 0$. Отсюда получаем равенство

$$\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}^*, \mathbf{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{n}\rangle = D, \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}, \quad D = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{a}\rangle.$$

В силу результата задачи 7 имеем

$$\mathbf{r}^* = \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{a}\rangle\mathbf{a} + [\mathbf{a}, \overrightarrow{M}]}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Задача 9. (Пример 13 стр. 226.) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ и пересекающей ортогонально прямую $l$, заданную как пересечение двух плоскостей:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1\rangle = D_1 \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2\rangle = D_2, \quad [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}.$$

Решение. Пусть $M_0(\mathbf{r}_0)$ — это радиус–вектор основания перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на прямую $l$. Тогда, очевидно, имеем

$$\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}\rangle = 0, \quad \mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]; \\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{a}\rangle =: D;$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1] + D[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{\left|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]\right|^2} = \\ = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2] + \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{\left|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]\right|^2}; \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t.$$

Задача 10. (Пример 14 стр. 227.) Составьте уравнение плоскости $P$, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ и перпендикулярной линии $l$ пересечения плоскостей:

$$P_1 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1\rangle = D_1; \quad P_2 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2\rangle = D_2, \quad [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}.$$

Решение. Вектор $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ является направляющим вектором прямой — линии пересечения плоскостей. Поэтому этот вектор является вектором нормали искомой плоскости. Векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ должны быть компланарны для искомой плоскости. Поэтому уравнение следующее:

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \rangle = 0.$$

Задача 11. (Пример 15 стр. 227.) Составьте уравнение прямой, лежащей в плоскости $P$ :

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$$

и пересекающей под прямым углом прямую $l$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t,$$

при условии, что $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \neq 0$, $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$.

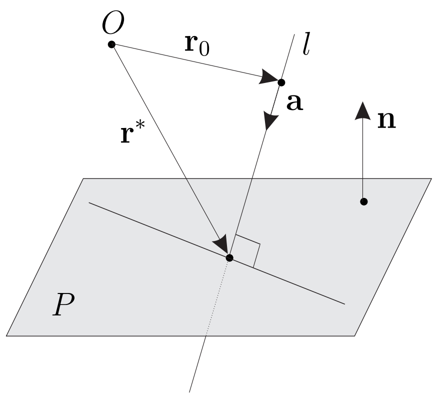


Рис. 57. К задаче 11.

Решение. Точка $M^*(\mathbf{r}_*)$ — общая единственная для прямой $l$ и плоскости $P$ является и точкой искомой прямой $l^*$. Радиус–вектор этой точки находится как единственное решение следующей системы уравнений:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t^*, \quad \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{n} \rangle = D \Rightarrow t^* = \frac{D - \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle};$$

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_0 + \frac{D - \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle}\mathbf{a}.$$

Направляющий вектор $\mathbf{b}$ искомой прямой равен

$$\mathbf{b} = [\mathbf{n}, \mathbf{a}].$$

Итак, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_* + \mathbf{b}\tau.$$

З а д а ч а 12. (Пример 16 стр. 227.) Через прямую $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ проведите плоскость, перпендикулярную плоскости $P : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = D$, $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq 0$.

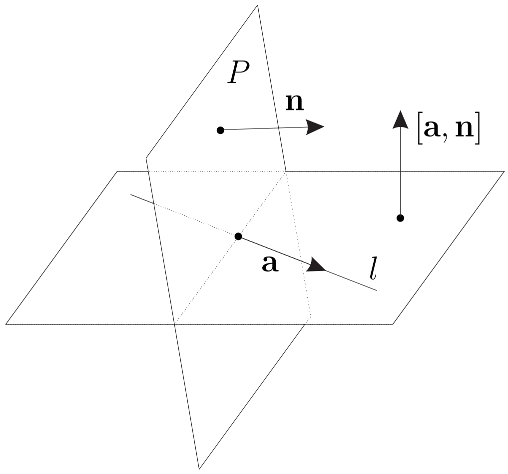


Рис. 58. К задаче 12.

Р е ш е н и е. Уравнение искомой плоскости

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{n}] \rangle = 0.$$

З а д а ч а 13. (Пример 17 стр. 228.) Найдите расстояние от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

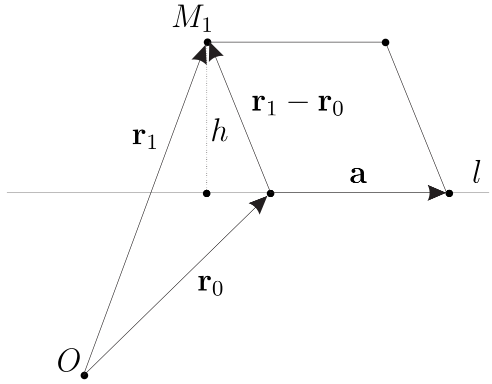


Рис. 59. К задаче 13.

Р е ш е н и е. Справедливы два равенства для площади $S$ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ :

$$S = h|\mathbf{a}|, \quad S = |[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]| .$$

Поэтому
$$h = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}.$$

Задача 14. (Пример 18 стр. 228.) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ и $L : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau$.

Решение. Рассмотрим параллелепипед, построенный на основании $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и боковыми гранями $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Объём $V$ этого параллелепипеда можно вычислить двояким способом:
$$V = |\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\rangle|\,, \quad V = h\,|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| \Rightarrow h = \frac{|\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\rangle|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}.$$