Линейная алгебра–5
Операторы в евклидовых и унитарных пространствах

1. Сопряженный оператор

Пусть $\mathbb{U}$ — **УП**, $\mathbf{A}$ — **ЛО** в $\mathbb{U}$. Оператор $\mathbf{A}^*$ называется сопряженным по отношению к **ЛО** $\mathbf{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Теорема. *Сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ обладает следующими свойствами:*
1) $\mathbf{A}^*$ — линейный оператор;
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$;
3) $(\alpha\mathbf{A})^* = \bar{\alpha}\mathbf{A}^*$;
4) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$;
5) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

Доказательство. 1) Докажем, что $\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{U}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}, \quad \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}.$$

Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{U}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z})).$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{z}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z})) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}),$$

т.е.

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{A}^*\mathbf{z}.$$

Далее, для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y})).$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \bar{\alpha}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}),$$

т.е.

$$\mathbf{A}^*(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}^*\mathbf{y}.$$

Линейность сопряженного оператора доказана.

2) Докажем, что $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$. Для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ имеем:

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}^*\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} + \mathbf{B}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*)\mathbf{y}).$$

Таким образом,

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*)\mathbf{y}),$$

т.е.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*.$$

3) Равенство $(\alpha\mathbf{A})^* = \bar{\alpha}\mathbf{A}^*$ доказывается аналогично:

$$((\alpha\mathbf{A})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$
$$= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \bar{\alpha}\mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

4) Докажем равенство $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$. Имеем:

$$((\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x}, \mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, (\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*)\mathbf{y}).$$

5) Докажите самостоятельно. □

Понятие сопряженного оператора в евклидовом пространстве вводится аналогично.

Задача. Сформулируйте и самостоятельно докажите теорему о свойствах сопряженного оператора для случая евклидова пространства.

2. Примеры сопряженных операторов

1. Сопряженные операторы для нулевого и единичного операторов совпадают с этими операторами.

Задача. Докажите самостоятельно.

2. В трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов линейный оператор определен равенством

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}],$$

где $[,]$ — векторное произведение, $\mathbf{a}$ — некоторый фиксированный вектор. Найдем сопряженный оператор для $\mathbf{A}$. Для произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ имеем:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{x}], \mathbf{y}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle = (\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}).$$

Здесь символом $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ обозначено смешанное произведение трех векторов. Таким образом,

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = [\mathbf{y}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{y}] = -\mathbf{A}\mathbf{y} \iff \mathbf{A}^* = -\mathbf{A}.$$

3. Матрица сопряженного оператора

Пусть $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ — произвольный базис **УП** $\mathbb{U}$, в котором задан **ЛО** $\mathbf{A}$, A_f — матрица этого **ЛО** в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, G_f — матрица Грама базиса $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Найдем матрицу A_f^* сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе.

Пусть X_f, Y_f — столбцы координат векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Тогда столбцы координат векторов $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{y}$ суть $A_f X_f$ и $A_f^* Y_f$ соответственно. Напомним, что скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выражается через координаты этих векторов по формуле

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_f^T G_f \bar{Y}_f,$$

где G_f — матрица Грама. Теперь определяющее соотношение сопряженного оператора

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$$

записывается в виде

$$(A_f X_f)^T G_f \bar{Y}_f = X_f^T G_f \overline{A_f^* Y_f}$$

или, эквивалентно,

$$X_f^T A_f^T G_f \bar{Y}_f = X_f^T G_f \bar{A}_f^* \bar{Y}_f.$$

Поскольку равенство должно выполняться для любых столбцов X_f, Y_f, получаем

$$A_f^T G_f = G_f \bar{A}_f^*.$$

Выразим отсюда матрицу A_f^*:

$$A_f^* = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f}.$$

Это и есть интересующее нас выражение для матрицы сопряженного оператора.

Формула для матрицы сопряженного в случае евклидова пространства выводится аналогично и имеет вид

$$A_f^* = G_f^{-1} A_f^T G_f.$$

В случае ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, когда матрица Грама G_e представляет собой единичную матрицу, выражения для матрицы A_e^* сопряженного оператора упрощаются; для унитарного пространства имеем

$$A_e^* = \bar{A}_e^T,$$

для евклидова пространства

$$A_e^* = A_e^T.$$

Отметим, что операция транспонирования матрицы с последующим комплексным сопряжением называется операцией эрмитова сопряжения.

Матрица A, удовлетворяющая условию

$$A = \bar{A}^T,$$

называется эрмитовой. Таким образом, эрмитова матрица — это матрица, не изменяющаяся при операции эрмитова сопряжения.

Задача. Докажите, что матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Задача. Докажите, что собственные значения операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ совпадают.

Рассмотрим формулу, выражающую матрицу сопряженного оператора в евклидовом пространстве, т.е. формулу

$$A_f^* = G_f^{-1} A_f^T G_f,$$

с тензорной точки зрения. Записав эту формулу в виде

$$\overset{*}{a}{}_l^k = g^{ki} a_i^j g_{lj} = g^{ki} g_{lj} a_i^j$$

(проверьте!), видим, что тензор, соответствующий сопряженному к $\mathbf{A}$ оператору, получается из тензора, соответствующего оператору $\mathbf{A}$, подъемом нижнего и опусканием верхнего индексов.

4. Самосопряженный оператор

Оператор $\mathbf{A}$, действующий в **ЕП** (в **УП**), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*,$$

или, иными словами, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выполняется соотношение

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay}).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве, называются эрмитовыми, а в евклидовом пространстве — симметричными.

Теорема. *Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в произвольном базисе удовлетворяла соотношению*

$$A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f}$$

в случае унитарного пространства или соотношению

$$A_f = G_f^{-1} A_f^T G_f$$

в случае евклидова пространства.

Доказательство очевидным образом вытекает из формул, связывающих матрицы оператора $\mathbf{A}$ и сопряженного оператора $\mathbf{A}$, полученных в предыдущем параграфе.

Преобразуем полученные формулы. Имеем:

$$A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f} \iff$$
$$\bar{A}_f = G_f^{-1} A_f^T G_f \iff G_f \bar{A}_f = A_f^T G_f.$$

Матрица Грама удовлетворяет условию $G_f = \bar{G}_f^T$ (почему?); следовательно,

$$G_f\bar{A}_f = A_f^T G_f \iff G_f\bar{A}_f = A_f^T\bar{G}_f^T = (\bar{G}_f A_f)^T \iff$$
$$G_f\bar{A}_f = \overline{(G_f\bar{A}_f)^T}.$$

Таким образом, для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_f\bar{A}_f$ была эрмитовой.

В случае евклидова пространства аналогичный результат формулируется следующим образом: для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_f A_f$ была симметричной.

Если базис ортонормированный, то получаем следующее:

(1) для того чтобы оператор в унитарном пространстве был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была эрмитовой: $A_e = \bar{A}_e^T$;
(2) для того чтобы оператор в евклидовом пространстве был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была симметричной: $A_e = A_e^T$.

Выше была доказана теорема об изоморфности линейных пространств билинейных форм и линейных операторов в данном евклидовом пространстве. Именно, было установлено, что каждой билинейной форме $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в евклидовом пространстве отвечает линейный оператор $\mathbf{A}$ такой, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}).$$

При этом тензор, соответствующий **БФ**, получается из тензора, соответствующего **ЛО**, с помощью операции опускания индекса:

$$b_{jk} = g_{jl}a_k^l;$$

в матричных обозначениях

$$B_f = G_f A_f.$$

Таким образом, получаем, что симметричным (самосопряженным) операторам отвечают при таком сопоставлении симметричные билинейные формы.

5. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

Теорема. *Все* ***ХЧ*** *самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. 1. Эрмитов оператор. Любое **ХЧ** λ эрмитова оператора $\mathbf{A}$ является его **СЗ** (почему?), так что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — соответствующий **СВ**. Умножим это равенство скалярно на $\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Поскольку оператор $\mathbf{A}$ эрмитов, имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Таким образом,

$$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x})$$

и, так как $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \neq 0$ (почему?), получаем $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Симметричный оператор. Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора $\mathbf{A}$ в каком-либо ортонормированном базисе; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ в унитарном пространстве, имеющий в некотором ортонормированном базисе этого унитарного пространства матрицу A_e. Так как матрица A_e симметрична и все ее элементы вещественны, то она эрмитова. Поэтому соответствующий оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ также эрмитов и все его **ХЧ** вещественны. Остается заметить, что характеристические многочлены операторов $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ совпадают, а значит, совпадают и их характеристические числа. □

Из доказанной теоремы следует, что все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Теорема. *Симметричный оператор имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень λ_0. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень веществен и, стало быть, является собственным значением оператора $\mathbf{A}$. В таком случае оператор $\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}$ вырожден, т.е. $\det(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}) = 0$, и его ядро представляет собой собственное подпространство оператора $\mathbf{A}$, принадлежащее собственному значению λ_0. □

Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — **СЗ**, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ — соответствующие **СВ** самосопряженного оператора $\mathbf{A}$. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Имеем:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

Умножим первое из данных выражений скалярно на $\mathbf{x}_2$, а второе — на $\mathbf{x}_1$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (\lambda_1\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),$$
$$(\mathbf{x}_1,\mathbf{A}\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1,\lambda_2\mathbf{x}_2) = \bar{\lambda}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2).$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{A}\mathbf{x}_2), \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_2$$

и вычитая второе из полученных равенств из первого, находим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = 0.$$

Поскольку по условию $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, отсюда следует, что $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = 0$, что и требовалось. □

Теорема. *Ортогональное дополнение любого инвариантного подпространства самосопряженного оператора также является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Пусть P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, т.е. $\forall \mathbf{x} \in P$ имеем $\mathbf{A}\mathbf{x} \in P$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{y} \in P^{\perp}$; требуется доказать, что $\mathbf{A}\mathbf{y} \in P^{\perp}$. Для вектора $\mathbf{y}$ справедливо равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in P$. Далее, $\forall \mathbf{x} \in P$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \in P$, поэтому $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Имеем

$$0 = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}),$$

т.е. вектор $\mathbf{A}\mathbf{y}$ ортогонален любому вектору $\mathbf{x} \in P$; иными словами, $\mathbf{A}\mathbf{y} \in P^{\perp}$, что и требовалось. □

Теорема. *Для того чтобы оператор* $\mathbf{A}$ *в* ***ЕП*** $\mathbb{E}$ *(в* ***УП*** $\mathbb{U}$*) был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в* $\mathbb{E}$ *(в* $\mathbb{U}$*) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть в $\mathbb{E}$ (в $\mathbb{U}$) существует **ОНБ** из **СВ** оператора $\mathbf{A}$. В этом базисе матрица оператора диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — **СЗ** данного оператора, и, стало быть, симметрична и эрмитова. Однако оператор, имеющий в **ОНБ** симметричную (эрмитову) матрицу, является самосопряженным.

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном пространстве имеется по крайней мере один **СВ** и, следовательно, одномерное собственное подпространство P. Ортогональное дополнение $P^{\perp}$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно доказанной выше теореме, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$. Ограничение оператора $\mathbf{A}$ на инвариантное подпространство $P^{\perp}$ представляет собой самосопряженный оператор в $P^{\perp}$, который обладает собственным вектором, лежащим в $P^{\perp}$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора $\mathbf{A}$. Нормируя их, получим **ОНБ**, состоящий из **СВ** оператора $\mathbf{A}$. □

6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Рассмотрим самосопряженный оператора $\mathbf{A}$ в **ЕП** $\mathbb{E}$ (или в **УП** $\mathbb{U}$). Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — **ОНБ** в пространстве, состоящий из **СВ** оператора $\mathbf{A}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — **СЗ** оператора $\mathbf{A}$.

Взяв произвольный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$, разложим его по базису $\mathbf{e}$ и найдем его образ при действии оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x^j \mathbf{e}_j) = x^j \mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \mathbf{e}_j;$$

мы воспользовались тем фактом, что $\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) = \lambda_j \mathbf{e}_j$. Обратите внимание, что в последней сумме мы вынуждены отказаться от использования правила суммирования Эйнштейна, так как индекс суммирования j встречается в общем члене суммы три раза.

Выражение $x^j \mathbf{e}_j$ (нет суммирования) представляет собой ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x}$ на одномерное собственное подпространство оператора $\mathbf{A}$, порожденное собственным вектором $\mathbf{e}_j$; обозначив оператор ортогонального проектирования через $\mathbf{P}_j$, получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j(\mathbf{x})$$

или

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j.$$

Таким образом, самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ представлен в виде линейной комбинации ортогональных проекторов $\mathbf{P}_j$ на одномерные собственные подпространства, порожденные попарно ортогональными собственными векторами оператора $\mathbf{A}$, причем коэффициентами этой линейной комбинации являются собственные значения оператора $\mathbf{A}$.

Вопрос. Чему равен ранг оператора $\mathbf{P}_j$?

Каждый из проекторов $\mathbf{P}_j$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_j^2 = \mathbf{P}_j;$$

кроме того, в силу попарной ортогональности собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, имеем соотношение

$$\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k = \mathbf{O}.$$

Пользуясь этими соотношениями, вычислим квадрат оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{P}_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{P}_k \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k \mathbf{P}_j \mathbf{P}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \mathbf{P}_j.$$

При помощи индукции легко показать, что для любого целого числа s имеет место соотношение

$$\mathbf{A}^s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s \mathbf{P}_j.$$

Назовем самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны. В этом случае можно определить понятие квадратного корня $\sqrt{\mathbf{A}}$ из оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}} \iff \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}.$$

Выражение для оператора $\sqrt{\mathbf{A}}$ имеет вид

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\mathbf{P}_j.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

7. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = a_{jk}x^j x^k;$$

можно считать, что она представляет собой координатную запись некоторого квадратичного функционала $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$. Известно, что квадратичная форма может быть быть приведена к каноническому виду невырожденным преобразованием переменных (например, с помощью метода Лагранжа). Однако можно привести квадратичную форму к «почти каноническому», диагональному виду с помощью ортогонального преобразования.

Матрица A данной квадратичной формы симметрична, поэтому ее можно рассматривать как матрицу A_e симметричного оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом пространстве относительно некоторого **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Кроме того, известно, что из собственных векторов симметричного оператора можно составить **ОНБ** $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Очевидно, матрица перехода C от **ОНБ** $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к **ОНБ** $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ ортогональна (объясните!). В базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ матрица A_f оператора $\mathbf{A}$ диагональна и имеет вид $A_f = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — **СЗ** оператора $\mathbf{A}$. Матрица же исходной квадратичной формы в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ определяется выражением

$$C^T A C = C^{-1} A_e C = A_f,$$

поскольку матрица C ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$. Таким образом, в новых переменных y^j, связанных с первоначальными переменными x^j ортогональной матрицей перехода C, квадратичная форма принимает вид

$$Q(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2;$$

формулы преобразования координат при этом имеют вид

$$X = CY,$$

где C — ортогональная матрица.

8. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду

Теорема. *Пусть $A(x^1, \ldots, x^n)$, $B(x^1, \ldots, x^n)$ — две квадратичные формы, причем форма $B(x^1, \ldots, x^n)$ положительно определена. Существует невырожденное преобразование переменных, приводящее форму B к каноническому виду, а форму A — к диагональному.*

Доказательство. 1. Будем считать, что данные квадратичные формы представляют собой координатные записи квадратичных функционалов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в вещественном линейном пространстве V относительно некоторого базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (в дальнейшем для краткости будем писать «базис $\mathbf{e}$»). Поскольку квадратичный функционал $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ положительно определен, можно считать, что соответствующий симметричный билинейный функционал $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задает в пространстве V скалярное произведение; в этом случае матрица B_e представляет собой матрицу Грама базиса $\mathbf{e}$.

2. Рассмотрим базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ (кратко — «базис $\mathbf{f}$»), ортонормированный относительно введенного скалярного произведения. Этот базис можно построить, например, приводя квадратичную форму $B(x^1, \ldots, x^n)$ к каноническому виду методом Лагранжа или используя процесс ортогонализации. Обозначим матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ через C. Матрицы квадратичных форм $A(x^1, \ldots, x^n)$ и $B(x^1, \ldots, x^n)$ в базисе $\mathbf{f}$ имеют вид

$$B_f = C^T B_e C = I, \quad A_f = C^T A_e C; \tag{1}$$

разумеется, обе они симметричны (объясните почему).

3. Матрица A_f симметрична, базис $\mathbf{f}$ — ортонормированный, поэтому можно считать, что A_f — матрица некоторого самосопряженного (симметричного) оператора $\mathbf{A}$. Рассмотрим ортонормированный базис $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$. В этом базисе матрица A_g оператора $\mathbf{A}$ диагональна, $A_g = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $\mathbf{A}$. Матрица D перехода от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{g}$ ортогональна (объясните почему!), $D^{-1} = D^T$. Вычислим матрицы квадратичных функционалов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{g}$:

$$A_g = D^T A_f D = D^{-1} A_f D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n);$$
$$B_g = D^T B_f D = D^{-1} I D = I.$$

Таким образом, в базисе $\mathbf{g}$ матрица функционала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ диагональна, а матрица функционала $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ — единичная. Таким образом, доказано существование базиса, в котором оба квадратичных функционала имеют диагональный вид:

$$A(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2,$$
$$B(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{j=1}^{n} (y^j)^2.$$

Здесь через y^j обозначены координаты, соответствующие базису $\mathbf{g}$.

4. Разработаем алгоритм построения такого базиса. Коэффициенты λ_j определяются как корни характеристического уравнения

$$\det(A_f - \lambda I) = 0.$$

Учитывая соотношения (1), получаем:

$$0 = \det(A_f - \lambda I) = \det(C^T A_e C - \lambda C^T B_e C) = (\det C)^2 \det(A_e - \lambda B_e).$$

Таким образом, коэффициенты λ_j определяются как корни «характеристического многочлена» $\det(A_e - \lambda B_e)$; этот многочлен называют иногда λ-многочленом матриц A_e и B_e.

Далее, столбец координат $X_{f,j}$ каждого собственного вектора $\mathbf{g}_j$ оператора $\mathbf{A}$ относительно базиса $\mathbf{f}$ определяется как нетривиальное решение однородной линейной системы

$$(A_f - \lambda_j I) X_{f,j} = 0,$$

где λ_j — соответствующее собственное значение. Учитывая соотношения (1), можем записать

$$(C^T A_e C - \lambda_j C^T B_e C) X_{f,j} = 0,$$
$$C^T (A_e - \lambda B_e) C X_{f,j} = 0.$$

Умножая последнее уравнение слева на матрицу $(C^T)^{-1}$ и учитывая, что столбец $CX_{f,j}$ представляет собой столбец собственного вектора $\mathbf{g}_j$ оператора $\mathbf{A}$ относительно базиса $\mathbf{e}$, получаем

$$(A_e - \lambda_j B_e) X_{e,j} = 0.$$

Столбцы $X_{e,j}$ представляют собой координаты векторов общего для обеих форм диагонализирующего базиса относительно исходного базиса, т.е. матрица, составленная из этих столбцов, является матрицей искомого преобразования переменных.

Таким образом, процедура одновременного приведения двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена, состоит в следующем:

(1) выясняем, какая из двух форм положительно определена; пусть B — матрица положительно определенной формы, A — матрица другой формы;

(2) решая уравнение $\det(A - \lambda B) = 0$, находим коэффициенты формы A в новом (диагонализирующем) базисе;

(3) решая для каждого найденного λ линейную систему $(A - \lambda B)X = 0$, находим столбцы матрицы P перехода от исходного базиса к диагонализирующему; формулы преобразования переменных при этом имеют вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

5. Доказательство существенно укорачивается, если пользоваться тензорным языком. Пусть a_{jk}, b_{jk} — симметричные 2-ковариантные тензоры, представляющие данные квадратичные (или, эквивалентно, симметричные билинейные) формы, причем матрица $B = (b_{jk})$ положительно определена. Будем считать тензор b_{jk} метрическим тензором евклидова пространства. Согласно известной теореме, каждой билинейной форме соответствует линейный оператор, матрица которого получается из матрицы формы с помощью операции подъема индекса. Так как данные билинейные формы симметричны, им отвечают самосопряженные операторы с матрицами

$$b^{jl} a_{lk} = a^j_k, \quad b^{jl} b_{lk} = \delta^j_k,$$

где b^{jl} — контравариантный метрический тензор (матрица (b^{jl}) является обратной для матрицы (b_{jl})). Оба указанных оператора (обратите внимание, что второй из них — единичный) имеют диагональные матрицы в базисе, состоящем из собственных векторов оператора a^j_k, координаты которых находятся из уравнений

$$\det(a^j_k - \lambda \delta^j_k) = 0, \quad (a^j_k - \lambda \delta^j_k) x^k = 0.$$

Опуская в приведенных уравнениях индекс j с помощью метрического тензора b_{jl}, получаем

$$\det(a_{kl} - \lambda b_{kl}) = 0, \quad (a_{kl} - \lambda b_{kl}) x^k = 0,$$

что и требовалось.

□