

# Семестр 3

## Демонстрационный вариант

### для теста №2 по математическому анализу

(числовые и функциональные ряды, несобственные интегралы, сходимость, равномерная сходимость, интегралы Эйлера)

#### 1. Ряды с положительными членами

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся, а какие – нет:

а)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{2}{n}\right)^{n^2}$       б)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \operatorname{arctg} n$       в)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n}$

#### 2. Абсолютная и условная сходимость ряда

Определить, при каких значениях параметра  $p$  ряд сходится абсолютно, а при каких - условно:

а)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$       б)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ .

#### 3. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Определить, сходится ли равномерно или неравномерно на указанном промежутке:

а) функциональная последовательность  $f_n(x) = \frac{x \cdot \sqrt{n}}{1 + n^2 x^2}$  на множестве  $x \in (0; +\infty)$ ;  
б) функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$  на множестве  $x \in (1; 2]$ .

#### 4. Область сходимости степенного ряда

Определите область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x+1)^n}{3n^2 - 2}$ .

Обратите внимание на необходимость исследования поведения ряда в граничных точках интервала сходимости!

## 5. Суммирование степенных рядов

Применяя, если требуется, почленное дифференцирование или интегрирование, вычислите сумму ряда, считая, что  $x$  принадлежит области сходимости ряда:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

## 6. Сходимость несобственных интегралов

Определить, сходятся или расходятся несобственные интегралы (не забудьте, если нужно, исследовать сходимость на нижнем пределе интегрирования!):

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$

б)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} dx$

в)  $\int_0^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-x}}$

## 7. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Определить, сходится ли интеграл равномерно или неравномерно на указанном промежутке:

а)  $\int_0^{\infty} p e^{-px} dx$  на множестве  $p \in [0; 2)$ ;

б)  $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  на множестве  $p \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ;

б)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  на множестве  $p \in \left[0; \frac{3}{5}\right)$ .

## 8. Интегралы Эйлера

Выразить интеграл через В или Г функцию:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^4} dx$  - рекомендуется замена переменной  $\frac{1}{1+x} = t$ ;

б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \cdot \sin^6 x dx$  - рекомендуется замена переменной  $\sin^2 x = t$ ;

в)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$  - рекомендуется замена переменной  $x^2 = t$ .