Глава 17. Несобственные интегралы

В главе 5 было введено понятие определённого интеграла от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$. При введении этого понятия (и изучении его свойств) существенными были два момента: 1) промежуток интегрирования (сегмент $[a,b]$) — ограниченное множество (для неограниченного промежутка введённое определение интеграла не пригодно); 2) функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a,b]$ (определённый интеграл от неограниченной на сегменте функции не существует). Различные задачи в математике и её приложениях приводят к необходимости обобщить понятие определённого интеграла на случаи, когда либо промежуток интегрирования неограниченный, либо подынтегральная функция является неограниченной. В результате появляются понятия несобственных интегралов первого и второго рода.

17.1 Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < +\infty$ и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$. Очевидно, он является функцией переменной A. Рассмотрим

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем обозначать его так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

и называть <u>несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ по полупрямой $[a,+\infty)$</u>.

Если указанный предел существует (~~не~~ существует), то говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится).

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty, a]$: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{a} f(x)dx$ и несобственный интеграл по всей числовой прямой: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_{B}^{A} f(x)dx$.

Примеры.

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^A\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$.

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\sin x\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty}(1-\cos A)$ — не существует, т.е. $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin x\,dx$ расходится.

3) $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, где $a>0$, α — произвольное число.

Если $\alpha\neq1$, то $\int\limits_{a}^{A}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_a^A = \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right)$.

(Отсюда следует, что) если $\alpha>1$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-\alpha}=0$, а если $\alpha<1$, то $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{1-\alpha}=+\infty$, т.е. при $\alpha<1$ этот предел не существует.

Если $\alpha=1$, то $\int\limits_{a}^{A}\frac{dx}{x} = \ln A-\ln a\to+\infty$ при $A\to+\infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{a}^{A}\frac{dx}{x}$ не существует.

Таким образом, данный интеграл сходится, если $\alpha>1$ (при этом $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$), и расходится, если $\alpha\leq1$.

В рассмотренных примерах первообразная для подынтегральной функции выражалась через элементарные функции, и это помогло установить сходимость (или расходимость) несобственного интеграла. Однако первообразная для подынтегральной функции может не быть элементарной функцией. Например, рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Функция $\frac{\sin x}{x}$ является непрерывной на полупрямой $[0, +\infty)$ (можно считать, что в точке $x = 0$ функция доопределена по непрерывности, т.е. её значение при $x = 0$ равно 1), поэтому она имеет первообразную, которую обозначим $F(x)$. Согласно определению несобственного интеграла первого рода

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} [F(A) - F(0)].$$

Но поскольку мы не знаем выражение для первообразной $F(x)$ (она не является элементарной функцией), то вопрос о существовании предела $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ (т.е. вопрос о сходимости данного несобственного интеграла) остаётся пока открытым. Для ответа на этот вопрос нужны признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

17.2 Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода).

Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ число A, такое, что $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Введём обозначение
$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)\,dx.$$
По определению сходимость несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ означает существование предела $\lim\limits_{A\to\infty}\Phi(A)$. В свою очередь, для того чтобы существовал этот предел, необходимо и достаточно (согласно критерию Коши существования предела функции $\Phi(A)$ при $A\to\infty$), чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists A$, такое, что $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ выполнялось неравенство
$$|\Phi(A'')-\Phi(A')|<\varepsilon,\ \text{т.е.}\ \left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$
Теорема 1 доказана.

Пример. Рассмотрим снова несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ и чтобы установить, сходится он или расходится, воспользуемся критерием Коши. С этой целью получим оценку для интеграла $\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{x}dx$. Так как
$$\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{A'}^{A''}\frac{d(-\cos x)}{x}=-\frac{\cos x}{x}\Big|_{A'}^{A''}-\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x}{x^2}dx$$
(здесь мы воспользовались формулой интегрирования по частям), то
$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\frac{1}{A''}+\frac{1}{A'}+\left|\int_{A'}^{A''}\frac{dx}{x^2}\right|=\frac{1}{A'}+\frac{1}{A''}+\left|-\frac{1}{x}\Big|_{A'}^{A''}\right|\le$$
$$\le\frac{2}{A'}+\frac{2}{A''}.$$
Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и возьмем $A=\frac{4}{\varepsilon}$. Тогда $\forall A'>A$ и $\forall A''>A$ получим:
$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\frac{2}{A'}+\frac{2}{A''}<\frac{4}{A}=\varepsilon.$$

Откуда следует (в силу критерия Коши), что несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Замечание. Мы ещё вернёмся к этому интегралу и сможем его вычислить (в следующей главе). Оказывается, что он равен $\frac{\pi}{2}$.

Признак сравнения

Пусть $f(x) \geq 0$ на полупрямой $[a, +\infty)$ и пусть $\forall A > a$ существует определённый интеграл $\int_a^A f(x)\,dx = \Phi(A)$. Функция $\Phi(A)$ (интеграл с переменным верхним пределом) является, очевидно, неубывающей функцией переменной A (поскольку $f(x) \geq 0$). Поэтому для существования предела $\lim\limits_{A\to\infty} \Phi(A)$ (т.е. для сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$) необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(A)$ была ограниченной на полупрямой $[a, +\infty)$. Это позволяет сформулировать следующий признак сравнения.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $[a, +\infty)$, интегрируемы на любом сегменте $[a, A]$, где $A > a$, и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, +\infty).$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \qquad (17.1)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad (17.2)$$

а из расходимости интеграла (17.2) следует расходимость интеграла (17.1).

Доказательство. Введём обозначение:

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)\,dx,\quad G(A)=\int_a^A g(x)\,dx.$$

Из условий теоремы следует, что $\forall A\geq a$ выполняются неравенства

$$0\leq \Phi(A)\leq G(A). \qquad (17.3)$$

Если интеграл (17.2) сходится, то функция $G(A)$ ограничена на $[a,+\infty)$, поэтому в силу (17.3) функция $\Phi(A)$ также ограничена и, значит, интеграл (17.2) сходится.

А если интеграл (17.2) расходится, то функция $\Phi(A)$ будет неограниченной на $[a,+\infty)$, поэтому в силу (17.3) функция $G(A)$ также будет неограниченной и, следовательно, интеграл (17.1) расходится.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. (признак сравнения в предельной форме.)

(со стр. 7)

Следствие. Пусть $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ на полупрямой $[a,+\infty)$; $\forall A>a$ существуют определенные интегралы $\int_a^A f(x)\,dx$ и $\int_a^A g(x)\,dx$ и существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Тогда: 1) если $k>0$, то интегралы (17.1) и (17.2) сходятся или расходятся одновременно;

2) если $k=0$, то из сходимости интеграла (17.1) следует сходимость интеграла (17.2), а из расходимости интеграла (17.2) следует расходимость интеграла (17.1).

Докажите это следствие.

На стр. 6

<u>Следствие 1.</u> Если на полупрямой $[a, +\infty)$, где $a>0$, функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \le f(x) \le \frac{c}{x^\alpha}, \text{ где } c \text{ — положительное число, } \alpha>1,$$

то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится;

если же $f(x) \ge \frac{c}{x^\alpha}$, где $c>0$, $\alpha \le 1$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Утверждение следует из теоремы 2 и того факта, что $\int\limits_a^\infty \frac{c}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

<u>Примеры.</u> 1) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\frac{1}{x}\,dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x} > 0$ на полупрямой $[1, +\infty)$. Так как $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, то для применения признака сравнения возьмём $g(x) = x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$.

Интеграл $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится, если $1-\alpha>1$, т.е. $\alpha<0$, и расходится, если $1-\alpha \le 1$, т.е. $\alpha \ge 0$, а поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{\alpha-1}} = 1,$$

то, согласно следствию 2, интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\frac{1}{x}\,dx$ сходится, если $\alpha<0$, и расходится, если $\alpha \ge 0$.

2) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int\limits_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^\alpha e^{-x} > 0$ на $[1, +\infty)$.

Для применения признака сравнения возьмём $g(x)=\frac{1}{x^2}$, для которой $\int_1^\infty g(x)dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}=0$ для любого α, то интеграл $\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$ сходится для любого α.

3) Интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (он называется интегралом Пуассона) сходится. Докажите это, взяв в качестве функции сравнения $g(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Признак Дирихле-Абеля

Признак сравнения (теорема 2) относится к неотрицательным (подынтегральным) функциям. В этом отношении он аналогичен признаку сравнения для (числовых) рядов с положительными членами. Для исследования сходимости несобственных интегралов от знакопеременных функций бывает полезен (при определенных условиях) признак Дирихле-Абеля (аналогичный признаку Дирихле-Абеля для числовых рядов). Он относится к несобственным интегралам вида

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx.$$

Теорема 3 (признак Дирихле-Абеля).

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a,+\infty)$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$ $(F'(x)=f(x))$;

2) функция $g(x)$ не возрастает на полупрямой $[a, +\infty)$, стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x)$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся критерием Коши (теорема 1). С этой целью рассмотрим интеграл $\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx$, где $A' > a$ и $A'' > a$. Преобразуем его по формуле интегрирования по частям, учитывая, что $f(x)dx = dF(x)$:

$$\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\, dF(x) = g(x)F(x)\Big|_{A'}^{A''} - \int\limits_{A'}^{A''} F(x)g'(x)dx. \quad (17.4)$$

Так как функция $F(x)$ ограничена (по условию), то $\exists M > 0$, такое, что $\forall x \in [a, +\infty): |F(x)| \le M$, а поскольку $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то $g'(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$ на полупрямой $[a, +\infty)$.

Пусть (для определённости) $A'' \ge A'$. Тогда из (17.4) получим:

$$\left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx \right| \le \left| g(A'')F(A'') \right| + \left| g(A')\cdot F(A') \right| -$$
$$- M\int\limits_{A'}^{A''} g'(x)dx \le M\left(g(A'') + g(A')\right) - M\left(g(A'') - g(A')\right) =$$
$$= 2Mg(A').$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как

$g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\exists A > a$, такое, что $\forall A' > A$ выполняется неравенство $g(A') < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Следовательно, $\forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ получаем неравенство

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) g(x)\, dx \right| \leq 2M g(A') < \varepsilon,$$

а это и означает, согласно критерию Коши, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) g(x)\, dx$ сходится. Теорема 3 доказана.

Примеры. 1) Исследовать, для каких значений α сходится интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$.

Положим $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^{\alpha}$.
Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на полупрямой $[1, +\infty)$ и имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$. Тем самым, условие 1) теоремы 3 выполнено.

Если $\alpha > 0$, то функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ убывает на полупрямой $[1, +\infty)$, стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет непрерывную производную $g'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 также выполнено.

По теореме 3 интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ сходится, если $\alpha > 0$.

Отметим, что для $\alpha = 1$ сходимость этого интеграла уже была доказана (с помощью критерия Коши).

Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что для $\alpha \leq 0$ данный интеграл расходится (для $\alpha = 0$ это уже было доказано в § 17.1).

2) Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx$ (он называется интегралом Френеля). Представим его в виде

$$\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int\limits_0^1 \sin(x^2)dx + \int\limits_1^\infty \sin(x^2)dx.$$

Первое слагаемое в правой части равенства — это определённый интеграл от непрерывной функции (он существует), а во втором слагаемом сделаем замену переменной $x = \sqrt{t}$, $1 \leq t < \infty$. Тогда $x^2 = t$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ и для второго слагаемого получаем:

$$\int\limits_1^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Интеграл в правой части равенства сходится (см. пример 1, здесь $\alpha = \frac{1}{2} > 0$). Следовательно, сходится и интеграл Френеля.

Но нужно сделать одну оговорку. Мы произвели замену переменных в несобственном интеграле. Правомерно ли это? Ответ таков: при определённых условиях имеет место теорема о замене переменной в несобственном интеграле (см. [Ильин, Позняк]). Мы не будем рассматривать эту теорему, отметим только, что к интегралу Френеля она применима.

Замечание. Как мы знаем, необходимым условием сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ является условие: [$a_n \to 0$ при $n \to \infty$.] [Можно подумать (проводя аналогию между числовыми рядами и несобственными интегралами), что необходимым условием сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ должно быть условие

$$f(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Однако это не так, и контрпримером служит интеграл Френеля. Этот интеграл сходится, но при этом $f(x) = \sin(x^2)$ не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

17.3 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ расходится.

Отметим, что если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться критерием Коши сходимости несобственных интегралов первого рода и неравенством $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| \le \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)|\,dx \right|$ (если правая часть неравенства меньше ε, то и левая часть меньше ε).

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

В § 17.2 было доказано, что этот интеграл сходится при $\alpha>0$ и расходится при $\alpha\le 0$.

Если $\alpha>1$, то интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится абсолютно, т.е. сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$. Для доказательства этого можно воспользоваться признаком сравнения: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $\alpha>1$.

Докажем, что для $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно. Для этого нужно доказать, что $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ расходится, если $0<\alpha\le 1$.

Так как $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, то для доказательства расходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ достаточно доказать (в силу признака сравнения), что расходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ сходится (для $0<\alpha\le 1$) (это нетрудно доказать с помощью признака Дирихле – Абеля, сделайте это), а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{2x^\alpha}$ расходится, если $0<\alpha\le 1$. Поэтому интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx$ также расходится, если $0<\alpha\le 1$.

Итак, несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно, если $0<\alpha\le 1$; сходится абсолютно, если $\alpha>1$; расходится, если $\alpha\le 0$.

17.4 Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полусегменте $(a, b]$, где $a<b$, не ограничена на этом полусегменте, но ограничена на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$ (здесь δ — произвольное положительное число, такое, что $a+\delta<b$). Точку a назовём особой точкой функции $f(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha>0$, на полусегменте $(0; 1]$. Она неограничена на этом полусегменте (так как $\frac{1}{x^\alpha}\to\infty$ при $x\to 0$), но ограничена на любом сегменте вида $[\delta, 1]$, где $0<\delta<1$ (на этом сегменте $0<f(x)\leq\frac{1}{\delta^\alpha}$). Точка $x=0$ является особой точкой этой функции.

Вернёмся к функции $f(x)$, неограниченной на полусегменте $(a, b]$ и ограниченной на любом сегменте вида $[a+\delta, b]$. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $\delta>0$ и $a+\delta<b$. (Отметим, что на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ не интегрируема в силу неограниченности, т.е. определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует). Интеграл $\int_{a+\delta}^b f(x)dx$ является функцией переменной δ. Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Он может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть этот предел несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$

по полусегменту $(a,b]$ и будем обозначать его так же, как определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если указанный предел существует (не существует), то говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится).

Аналогично определяются несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по полусегменту $[a,b)$, где b – особая точка $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$, и несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$ по интервалу (a,b), где a и b – особые точки $f(x)$ (и других особых точек на сегменте $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет): $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx$.

Если ~~[illegible]~~ внутренняя точка c сегмента $[a,b]$ является особой точкой функции $f(x)$ как на сегменте $[a,c]$, так и на сегменте $[c,b]$, и других особых точек на сегменте $[a,b]$ у функции $f(x)$ нет, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется как сумма двух пределов: $\lim\limits_{\delta_1\to+0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \lim\limits_{\delta_2\to+0}\int_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx$. Если оба предела существуют, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а если хотя бы один из пределов не существует, то — расходится.

<u>Примеры.</u> 1) Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Особой точкой функции $\frac{1}{x^\alpha}$ является точка $x=0$. Поэтому, согласно определению,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\delta^1, & \text{если } \alpha\neq 1 \\ \left.\ln x\right|_\delta^1, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1-\delta^{1-\alpha}), & \text{если } \alpha\neq 1 \\ -\ln\delta, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, если $0<\alpha<1$, и расходится, если $\alpha \geq 1$.

2) Аналогично доказывается, что несобственные интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, где $a<b$, сходятся, если $0<\alpha<1$, и расходятся, если $\alpha \geq 1$.

Для несобственных интегралов второго рода имеют место признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим некоторые из них для несобственных интегралов по полусегменту $(a, b]$, где a — особая точка функции.

<u>Теорема 4 (критерий Коши сходимости несобственных интегралов второго рода).</u>

Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по полусегменту $(a, b]$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$, такое, что $\forall \delta'$ и δ'', удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$, $0<\delta''<\delta$, выполняется неравенство

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

<u>Доказательство.</u> Введем обозначение

$$\Phi(\delta) = \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

По определению сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ означает существование предела $\lim\limits_{\delta\to+0} \Phi(\delta)$.

В свою очередь, для того чтобы существовал этот предел, (согласно критерию Коши существования одностороннего предела функции) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$, такое, что $\forall \delta'$ и δ'', удовлетворяющих условиям $0<\delta'<\delta$, $0<\delta''<\delta$, выполнялось неравенство

$$|\Phi(\delta')-\Phi(\delta'')|<\varepsilon, \text{ т.е. } \left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 4 доказана.

<u>Теорема 5 (признак сравнения).</u>

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$: 1) определены на полусегменте $(a, b]$, где a — особая точка этих функций, интегрируемы на любом сегменте $[a+\delta, b]$, где $a<a+\delta<b$, и 2) удовлетворяют неравенствам

$$0\le f(x)\le g(x), \quad x\in(a, b]. \qquad (17.5)$$

Тогда из сходимости интеграла

$$\int_a^b g(x)\,dx \qquad (17.6)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (17.7)$$

а из расходимости интеграла (17.7) следует расходимость интеграла (17.6).

Следствие. Если вместо условия (17.5) выполнены условия

$$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ на полусегменте } (a, b]$$

$$\text{и } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0,$$

то интегралы (17.6) и (17.7) сходятся или расходятся одновременно.

Докажите теорему 5 и её следствие самостоятельно.

Примеры. 1) Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} > 0$ и имеет особую точку $x = 1$. Возьмём $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Эта функция также положительная и имеет ту же особую точку $x = 1$.

Так как $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}} = \frac{1}{2} > 0$

и интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ сходится (здесь $\alpha = \frac{1}{2} < 1$),

то, согласно следствию из теоремы 5, интеграл

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ сходится.

2) Рассмотрим (несобственный) интеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$.

Представим его в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$, $I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$.

Интеграл I_1 является несобственным интегралом второго рода, поскольку $x = 0$ — особая точка функции $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ $\left(\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \right)$. Возьмём в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1>0$ и интеграл $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то, согласно следствию из теоремы 5, интеграл I_1 сходится.

Интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода. Он сходится — это было установлено в § 17.2. Таким образом, несобственный интеграл $I = I_1 + I_2$ сходится.

3) Исследовать, при каких значениях α сходится интеграл $I=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx$.

Представим его в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \int_0^1 x^\alpha e^{-x}dx$, $I_2 = \int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx$.

Если $\alpha\geq 0$, то интеграл I_1 является определённым интегралом от непрерывной функции, а если $\alpha<0$, то I_1 — несобственный интеграл второго рода, поскольку $x=0$ является особой точкой функции $f(x)=x^\alpha e^{-x}$ ($\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha e^{-x} = \infty$ при $\alpha<0$). В качестве функции сравнения при $\alpha<0$ возьмём $g(x)=x^\alpha$. Так как $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+0} e^{-x} = 1>0$, то, согласно следствию из теоремы 5, интегралы I_1 и $\int_0^1 x^\alpha dx$ при $\alpha<0$ сходятся или расходятся одновременно. Поскольку $\int_0^1 x^\alpha dx$ $\left(=\int_0^1\frac{dx}{x^{-\alpha}}\right)$ сходится, если $-\alpha<1$, т.е. $-1<\alpha<0$, и расходится, если $\alpha\leq -1$, то и интеграл I_1 сходится, если $-1<\alpha<0$, и расходится, если $\alpha\leq -1$.

Интеграл I_2 является несобственным интегралом первого рода. Он сходится для любого α — это было установлено в §17.2. Таким образом, несобственный интеграл $I = I_1 + I_2$ сходится, если $\alpha > -1$, и расходится, если $\alpha \le -1$.

17.5. Главное значение несобственного интеграла.

Рассмотрим пример: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$. По определению этот несобственный интеграл сходится (расходится), если существует (не существует) предел $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}} \int_B^A x\,dx$, т.е. $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2)$.

Поскольку этот предел не существует, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ расходится. Но если взять $B = -A$, то $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} x\,dx$ существует и равен нулю. Этот предел и называется главным значением несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$. Сформулируем общее определение.

Определение. Если существует $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$, то он называется главным значением несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (в смысле Коши) и обозначается так:

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

(V.p. — начальные буквы французских слов "Valeur principal", означающих "Главное значение").

Если несобственный интеграл ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$) сходится, то его значение равно, очевидно, главному значению этого интеграла. Но может быть так, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, т.е. не существует $\lim\limits_{\substack{B\to-\infty\\ A\to+\infty}} \int_B^A f(x)\,dx$, но имеет конечное главное значение.

Именно к такому случаю относится рассмотренный пример: $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0.$

Рассмотрим теперь несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$, причём особой точкой функции $f(x)$ является внутренняя точка c сегмента $[a, b]$.

По определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left[\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx\right]. \qquad (17.8)$$

Рассмотрим этот предел при условии, что $\delta_1 = \delta_2$.

<u>Определение.</u> Если существует

$$\lim_{\delta\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right],$$

то он называется главным значением несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (в смысле Коши) и обозначается так: $V.p.\int\limits_a^b f(x)dx.$

Отметим, что при этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ может быть расходящимся, т.е. может не существовать предел (17.8).

<u>Пример.</u> Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}.$$

Особой точкой функции $\frac{1}{x}$ является точка $x=0$. Этот несобственный интеграл расходится, поскольку

$\int\limits_{-1}^{-\delta_1}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\delta_2}^{2}\frac{dx}{x} = \ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \ln 2$, а предел $\lim\limits_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}}\left(\ln\frac{\delta_1}{\delta_2} + \ln 2\right)$

не существует. Если же $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то

$$\lim_{\delta\to+0}\left(\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x}+\int_{\delta}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\delta\to+0}\ln 2=\ln 2.$$

Таким образом, $V.p.\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\ln 2$.

17.6. Кратные несобственные интегралы.

Как и в случае одномерных интегралов, несобственный кратный интеграл — это либо интеграл от неограниченной функции, либо интеграл по неограниченной области, либо одновременно и то, и другое.

Пусть G — ограниченная квадрируемая область на плоскости (x, y) и пусть в области G (за исключением, быть может, точки $M_0(x_0, y_0)$) определена функция $f(x,y)$, неограниченная в любой окрестности точки M_0. Точка M_0 называется в этом случае особой точкой функции $f(x,y)$.

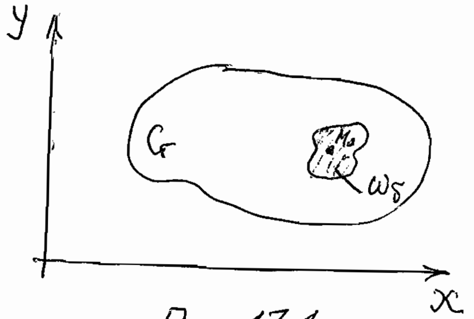

Рис. 17.1

Обозначим через ω_δ произвольную (квадрируемую) окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ. (рис. 17.1). Пусть для любой окрестности ω_δ функция $f(x,y)$ интегрируема в области $G-\omega_\delta$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{G-\omega_\delta} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Можно сказать, что при $\delta\to 0$ окрестность ω_δ стягивается к точке M_0. Этот предел может существовать и может не существовать. В любом случае будем называть его несобственным интегралом от функции $f(x,y)$ по области G.

(Для кратных несобственных интегралов обычно не вводят разделение на несобственные интегралы первого и второго рода, хотя по аналогии с одномерными интегралами данный несобственный интеграл следует отнести к несобственным интегралам второго рода).

Если указанный предел существует и не зависит от способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0, то говорят, что несобственный интеграл сходится, в противном случае — расходится.

В любом случае несобственный интеграл обозначается так же, как и двойной интеграл:

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Наряду с произвольным стягиванием окрестности ω_δ к точке M_0 важную роль в ряде задач математической физики играет рассмотрение случая, когда ω_δ — круг радиуса δ с центром M_0.

Если существует $\lim\limits_{\delta\to 0}\iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)\,dx\,dy$ при условии, что ω_δ — круг радиуса δ с центром M_0, то этот предел называется главным значением несобственного интеграла $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ и обозначается так:

$$V.p.\iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

Если несобственный интеграл сходится, то его главное значение равно значению этого интеграла, но может быть так, что несобственный интеграл расходится, но имеет конечное главное значение (придумайте соответствующий пример).

Пусть теперь функция $f(x,y)$ определена в неограниченной области G и пусть последовательность $\{G_n\}$

ограниченных (квадрируемых) областей монотонно исчерпывает область G.

Это означает, что $G_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$.

Пример. Последовательность концентрических кругов с радиусами, равными n, монотонно исчерпывает всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в любой ограниченной квадрируемой области, содержащейся в области G. Рассмотрим числовую последовательность $\{I_n\}$, где

$$I_n = \iint\limits_{G_n} f(x,y)\,dx\,dy,$$

а последовательность $\{G_n\}$ монотонно исчерпывает область G.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности $\{G_n\}$, то говорят, что несобственный интеграл от функции $f(x,y)$ по области G сходится, в противном случае — расходится.

Обозначают несобственный интеграл по неограниченной области G обычным образом: $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$.

Пример 1. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

В качестве последовательности ограниченных квадрируемых областей G_n, монотонно исчерпывающей всю плоскость $\mathbb{R}^2$, возьмем сначала последовательность (концентрических) кругов $G_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \le n^2\}$. Для вычисления интеграла

$$I_n = \iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le n$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Получим

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r\, dr = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \pi$

Докажем, что для любой другой последовательности $\{\tilde{G}_n\}$ ограниченных квадрируемых областей, монотонно исчерпывающей плоскость R^2, соответствующая числовая последовательность $\{\tilde{I}_n\} = \{\iint\limits_{\tilde{G}_n} f(x,y)\,dx\,dy\}$ сходится и её предел также равен π.

Очевидно, что $\forall \tilde{G}_n \ \exists G_k$ (круг радиуса k с центром в начале координат), такой, что $\tilde{G}_n \subset G_k$. Поэтому

$$\tilde{I}_n = \iint\limits_{\tilde{G}_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy \le \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = I_k = \pi(1-e^{-k^2}) \le \pi.$$

Таким образом, $\{\tilde{I}_n\}$ – возрастающая ограниченная последовательность. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \le \pi$.

С другой стороны, $\forall G_n \ \exists \tilde{G}_{k_n'}$, такая, что $G_n \subset \tilde{G}_{k_n'}$, откуда следует, что $\tilde{I}_{k_n} \ge I_n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_{k_n} \ge \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \pi$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \le \pi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n \ge \pi$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{I}_n = \pi$, что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение позволяет сделать вывод: несобственный интеграл $\iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$ сходится и равен π.

Возьмём теперь в качестве последовательности $\{G_n\}$ последовательность $\{G_n'\}$ квадратов $G_n' = \{(x,y),\ -n \le x \le n,\ -n \le y \le n\}$. Тогда

$$I_n' = \iint\limits_{G_n'} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}dy = K_n^2,$$

где $K_n = \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = \pi$ (согласно доказанному), а $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, получим: $K^2 = \pi$, т.е.

$$K = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Этот несобственный интеграл называется интегралом Пуассона.

Так как e^{-x^2} – чётная функция, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$ и, следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (17.9)$$

В математической физике важную роль играет функция

$$\left[\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2}dt.\right]$$

Она носит название "интеграл ошибок." Из равенства (17.9) следует, что $\Phi(\infty) = 1$.

Кратные несобственные интегралы обладают удивительным (на первый взгляд) свойством, отличающим их от одномерных несобственных интегралов, а именно: для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны, т.е. если несобственный интеграл $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$ сходится, то несобственный интеграл $\iint\limits_{G} |f(x,y)|\,dx\,dy$ также сходится, и обратно.

Доказательство этого утверждения имеется в [Ильин, Позняк].

Возникает вопрос: почему для кратных несобственных интегралов это свойство имеет место, а у одномерных несобственных интегралов этого свойства нет?

Ответ таков: это свойство кратных несобственных интегралов обусловлено тем, что в определение их сходимости заложено <u>произвольное</u> стягивание окрестности ω_δ к точке M_0 в случае, когда M_0 – особая точка функции, и <u>произвольное</u> (монотонное) исчерпывание области G последовательностью $\{G_n\}$ в случае, когда G – неограниченная область. Для сравнения с определением сходимости одномерного несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ заметим, что в этом определении $\left(\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx\right)$ полупрямая $[a,+\infty)$ монотонно исчерпывается расширяющимися сегментами вида $[a, A]$ при $A\to\infty$, и не допускается какой-то другой способ монотонного исчерпывания этой полупрямой. Укажем один из таких (недопустимых) способов.

Разобьем полупрямую $[a,+\infty)$ на сегменты

$A_1=[a,a+1],\ A_2=[a+1,a+2],\ A_3=[a+2,a+3],\dots,\ A_n=[a+n-1,a+n],\dots$

и образуем последовательность $\{X_n\}$ множеств следующим образом:

X_1 содержит два сегмента (в порядке следования) с нечётными номерами (т.е. A_1 и A_3) и один сегмент с чётным номером (т.е. A_2);

X_2 содержит $2\cdot 2^2=8$ сегментов (в порядке следования) с нечётными номерами и два сегмента с чётными номерами (т.е. A_2 и A_4);

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

для любого n X_n содержит $n\cdot 2^n$ сегментов с нечётными номерами и n сегментов с чётными номерами (т.е. $A_2, A_4,\dots, A_{2n}$).

Очевидно, что $X_n \subset X_{n+1}$, $\forall n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = [a, \infty)$, т.е. последовательность множеств X_n монотонно исчерпывает полупрямую $[a, +\infty)$. Введём обозначение: $I_n = \int\limits_{X_n} f(x)\,dx$. Может случиться так, что $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ (т.е. несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится,) существует, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ не существует.

В качестве примера такого случая рассмотрим несобственный интеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$. Как было установлено в § 17.2, это интеграл сходится, т.е. существует $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A \frac{\sin x}{x}dx$. Но если разбить полупрямую $[0, \infty)$ на сегменты $A_n = [(n-1)\pi, n\pi]$, $n = 1, 2, \dots$ и образовать последовательность множеств $\{X_n\}$ так, как указано выше, то окажется, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} \frac{\sin x}{x} dx$ не существует (докажите это).

Если в определении сходимости одномерных несобственных интегралов вида $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ допустить произвольное исчерпывание полупрямой $[a, \infty)$, то множество сходящихся интегралов станет более узким, но зато понятия сходимости и абсолютной сходимости станут эквивалентными.

(Рассмотрим два важных) примера несобственных кратных интегралов.

Пример 2. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}\,dx\,dy,$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая (внутренняя точка ограниченной квадрируемой) ~~точка~~ области G, $M(x,y)$ — произвольная точка этой области, $r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ —

расстояние между точками M_0 и M, $\alpha > 0$ — фиксированное число. Так как $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}} \to \infty$ при $M \to M_0$, то M_0 — особая точка подынтегральной функции. Выясним, для каких значений α этот интеграл сходится.

Возьмём число $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы ε-окрестность точки M_0 (т.е. открытый круг радиуса ε с центром M_0) целиком содержалась в области G (рис. 17.2). В

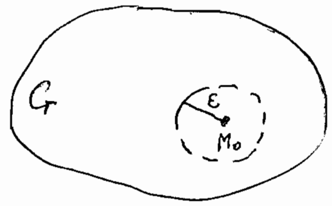

Рис. 17.2

области $G - \omega_\varepsilon$ функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ является непрерывной и ограниченной: $0 < \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}$.

Поэтому двойной интеграл

$$\iint\limits_{G-\omega_\varepsilon} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\, dx\, dy$$

существует. Интеграл $I_\varepsilon = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\, dx\, dy$ является несобственным интегралом. Очевидно, что сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла I_ε. Для исследования вопроса о сходимости несобственного интеграла I_ε нужно рассмотреть предел

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{\omega_\varepsilon - \omega_\delta} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\, dx\, dy, \qquad (17.10)$$

где ω_δ — произвольная окрестность точки M_0, диаметр которой равен δ и которая содержится в круге ω_ε.

Отметим, что подынтегральная функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ — положительная. Оказывается, что если функция $f(x,y) \geq 0$ в области G, то для сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{G} f(x,y)\, dx\, dy$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to 0} \iint\limits_{G-\omega_\delta} f(x,y)\, dx\, dy$ существовал хотя бы для какого-нибудь одного способа стягивания окрестности ω_δ к точке M_0 (доказательство этого утверждения можно провести аналогично тому, как в примере 1 была доказана независимость предела $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{G_n} e^{-x^2-y^2}dxdy$ от выбора последовательности $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей плоскость R^2).

Воспользуемся этим утверждением и возьмём в (17.10) в качестве ω_δ круг радиуса δ с центром M_0 (рис. 17.3). Для вычисления интеграла $\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta}\frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}dxdy$

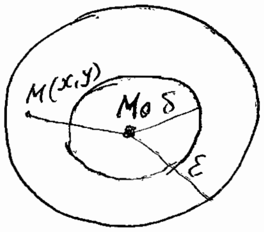

Рис. 17.3

перейдём к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\delta \le r = r_{M_0M} \le \varepsilon$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Тогда $\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta}\frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_\delta^\varepsilon \frac{1}{r^\alpha}\,r\,dr =$

$$= 2\pi\begin{cases}\left.\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_\delta^\varepsilon, & \text{если } \alpha\ne 2\\ \left.\ln r\right|_\delta^\varepsilon, & \text{если } \alpha=2\end{cases} = 2\pi\begin{cases}\dfrac{1}{2-\alpha}\left(\varepsilon^{2-\alpha}-\delta^{2-\alpha}\right), & \text{если } \alpha\ne 2\\ \ln\dfrac{\varepsilon}{\delta}, & \text{если } \alpha=2.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\iint\limits_{\omega_\varepsilon-\omega_\delta}\frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}dxdy$ существует и равен $\frac{2\pi\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}$, если $0<\alpha<2$, и этот предел не существует, если $\alpha\ge 2$.

Итак, несобственный интеграл

$$\iint\limits_G \frac{1}{r^\alpha_{M_0M}}dxdy$$

сходится, если $0<\alpha<2$, и расходится, если $\alpha\ge 2$.

Замечание 1. Мы рассмотрели двойные несобственные интегралы. Аналогично вводятся тройные и, вообще, n-кратные несобственные интегралы. Как и для двойного интеграла можно доказать, что n-кратный несобственный интеграл $\int\limits_{G}\cdots\int \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx_1\cdots dx_n$ (где $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ — некоторая внутренняя точка (ограниченной кубируемой) области G, а $M(x_1,\dots,x_n)$ — произвольная точка этой области) сходится, если $0<\alpha<n$, и расходится, если $\alpha\geq n$, в частности, тройной несобственный интеграл указанного вида сходится, если $0<\alpha<3$, и расходится, если $\alpha>3$.

Пример 3. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\iint\limits_{R^2-\omega_a} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy,$$

где R^2 — плоскость (x,y), ω_a — круг радиуса a с центром M_0, $M_0(x_0,y_0)$ — некоторая фиксированная точка плоскости, $M(x,y)$ — произвольная точка области $R^2-\omega_a$,

$r_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ — расстояние между точками M_0 и M, $\alpha>0$ — фиксированное число. Выясним, при каких значений α этот интеграл сходится.

Отметим, что подынтегральная функция $\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}$ является непрерывной, положительной и ограниченной в области $(R^2-\omega_a)$: $0<\frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\leq\frac{1}{a^{\alpha}}$.

В качестве последовательности квадрируемых областей G_n, монотонно исчерпывающей область $R^2-\omega_a$, возьмём последовательность колец, ограниченных окружностями радиусов a и n с центром M_0 (рис. 17.4).

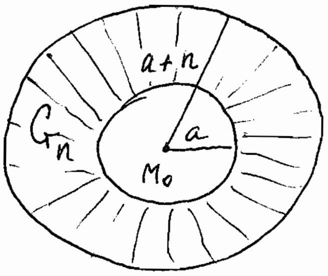

Рис. 17.4

Для вычисления двойного интеграла

$$I_n = \iint\limits_{G_n} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy$$

перейдем к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ a \le r = r_{M_0M} \le a+n,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Тогда $I_n = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^{n} \frac{1}{r^{\alpha}}\, r\,dr =$

$$= 2\pi \begin{cases} \left.\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_a^{a+n}, & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \left.\ln r\right|_a^{a+n}, & \text{если } \alpha = 2 \end{cases} = 2\pi \begin{cases} \dfrac{1}{2-\alpha}\left((a+n)^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}\right), & \text{если } \alpha \ne 2 \\ \ln\dfrac{a+n}{a}, & \text{если } \alpha = 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует и равен $\dfrac{2\pi a^{2-\alpha}}{\alpha-2}$, если $\alpha > 2$, и этот предел не существует, если $0 < \alpha \le 2$.

Как и в примере 1, можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ не зависит от выбора последовательности $\{G_n\}$, монотонно исчерпывающей область $R^2-\omega_a$.

Таким образом, несобственный интеграл

$$\iint\limits_{R^2-\omega_a} \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx\,dy$$

сходится, если $\alpha > 2$, и расходится, если $0 < \alpha \le 2$.

<u>Замечание 2.</u> Аналогично можно доказать, что n-кратный несобственный интеграл

$$\int\limits_{R^n-\omega_a}\!\!\cdots\!\int \frac{1}{r^{\alpha}_{M_0M}}\,dx_1 \cdots dx_n$$

(где R^n — n-мерное евклидово пространство, ω_a — n-мерный шар радиуса a с центром M_0) сходится, если $\alpha > n$, и расходится, если $0 < \alpha \leq n$.

Замечание 3. При исследовании на сходимость кратных несобственных интегралов часто используют признак сравнения и сравнивают подынтегральную функцию с функцией $\frac{c}{r^\alpha}$.