МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет
Кафедра математики

Д.А. Грачев

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Москва

2012

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие полностью охватывает как традиционный материал, так и некоторые вопросы, которые выходят за рамки стандартной программы и в курсе математического анализа обычно не рассматриваются. Сюда можно отнести логарифмический признак и признак Раабе, теорему Мертенса, некоторые методы суммирования рядов и ряд других вопросов. Всего в пособии разобрано более полусотни задач различной сложности, причем некоторые из них за счет выбора нетрадиционных доказательств решены более просто и наглядно (например, показано, что исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд можно непосредственно с помощью определения сходимости, хотя обычно для решения данной задачи применяется интегральный признак Коши-Маклорена).

В настоящем пособии сделана попытка сохранить стиль и структуру взятого за образец учебника "Математический анализ в вопросах и задачах", ставшего классическим для многих поколений студентов физического факультета МГУ. Это стремление проявилось также и при выборе названия пособия.

Автор выражает глубокую благодарность Валентину Федоровичу Бутузову за внимание к работе, редакторскую поддержку и ценные критические замечания.

§1. Понятие числового ряда. Критерий Коши и необходимое условие сходимости.

Основные понятия и теоремы

1. Определение числового ряда. Понятие сходимости ряда. Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел. Составим из ее элементов выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Определение 1: выражение вида (1) принято называть *числовым рядом* или просто *рядом*, а элементы a_n — *членами* данного ряда.

Определение 2: *n-ой частичной суммой ряда* (1) называется сумма n его первых членов. Будем обозначать ее символом S_n, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 3: ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм. Предел S последовательности $\{S_n\}$ при этом называют *суммой* ряда (1), и пишут равенство

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

В случае, когда $\{S_n\}$ не имеет предела, ряд (1) называется *расходящимся*.

Важнейшей задачей теории рядов является нахождение признаков, позволяющих судить о сходимости или расходимости данного ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда под суммой ряда понимается сумма в некотором обобщенном смысле, что позволяет суммировать ряды, которые по определению 3 расходятся [1]. Так, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$ в смысле нашего определения расходится (последовательность $1, 0, 1, 0, \ldots$ его частичных сумм не имеет предела), однако еще Л. Эйлер приписывал ему сумму, равную $1/2$ [2]. Далее под сходимостью рядов понимается только сходимость в смысле определения 3.

2. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости числового ряда. Сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности его частичных сумм, поэтому справедлива

Теорема 1 (критерий Коши сходимости ряда): для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при всяком натуральном p и всех $n \geq N$ имело место неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Следствие 1: если ряд (1) сходится, то последовательность

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

является бесконечно малой. Обычно r_n называют *n-м остатком ряда* (1).

Следствие 2: для сходимости числового ряда (1) необходимо, чтобы последовательность $\{a_n\}$ его членов являлась бесконечно малой.

3. Некоторые свойства сходящихся рядов. Из определения суммы ряда и арифметических свойств сходящихся последовательностей вытекают следующие теоремы.

Теорема 2: пусть даны два числовых ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n.$$

Пусть эти ряды сходятся и имеют суммы S и S' соответственно. Тогда ряд

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta a'_n)$$

также сходится при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем его сумма равна $\alpha S + \beta S'$.

Следствие: если ряд а) сходится, а ряд б) расходится, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ ряд в) является расходящимся.

Теорема 3: отбрасывание любого конечного числа членов ряда (или добавление к ряду любого конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения: а) числового ряда; б) n-ой частичной суммы ряда; в) сходящегося ряда и его суммы; г) расходящегося ряда.

2. Приведите примеры: а) сходящегося ряда; б) расходящегося ряда с неограниченной последовательностью частичных сумм; в) расходящегося ряда, последовательность частичных сумм которого ограничена.

3. Каждому ряду однозначно соответствует последовательность его частичных сумм. Покажите, что справедливо также и обратное утверждение: всякую последовательность можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда.

4. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии сходимости числового ряда. Какие следствия из нее вытекают?

5. Какие свойства сходящихся числовых рядов вам известны? Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы.

6. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых: а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся? Ответ обоснуйте.

Примеры решения задач

1. Пользуясь определением, доказать сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$\triangle$ Преобразуем выражение для n-ой частичной суммы данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Очевидно, последовательность $\{S_n\}$ сходится и имеет предел, равный $1/3$. Тем самым, сходится и наш ряд, причем его сумма равна $1/3$. $\blacktriangle$

2. Пользуясь определением, доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

△ Достаточно показать, что последовательность частичных сумм данного ряда не ограничена. Для этого воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n},$$

доказательство которых предоставляется читателю, и оценим величину S_n:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} >$$

$$> \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln(n+1).$$

Итак, последовательность $\{S_n\}$ не ограничена сверху и потому расходится. Следовательно, расходится и рассматриваемый ряд. ▲

3. Пользуясь определением, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Рассмотреть два случая: случай *гармонического ряда* (когда $\alpha = 1$) и случай *обобщенного гармонического ряда* (когда $\alpha > 1$).

△ Докажем расходимость гармонического ряда. Положим $n = 2^k$, тогда

$$S_n = S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} > \frac{k}{2}.$$

Из последней оценки следует, что для любого сколь угодно большого $A > 0$ всегда можно указать номер $n = 2^k$ такой, что $S_n > k/2 > A$ (достаточно взять $k > 2A$). Тем самым, подпоследовательность $\{S_{2^k}\}$ не ограничена. Значит, не ограничена и последовательность частичных сумм гармонического ряда, откуда вытекает его расходимость.

Рассмотрим обобщенный гармонический ряд. Его частичные суммы

$$S_n' = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

монотонно возрастают, поэтому для доказательства сходимости достаточно проверить ограниченность последовательности $\{S_n'\}$. Возьмем какое-либо k с условием $n < 2^k$. Учитывая, что при положительном знаменателе сумма членов бесконечной геометрической прогрессии не меньше соответствующей суммы членов конечной, получим:

$$S'_n < S'_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{2^{k\alpha}}\right) \leq 1 + 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\right) =$$

$$= 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{2^{2\alpha}} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.$$

Найденная оценка верна для любого n. Ограниченность $\{S'_n\}$, а значит, и сходимость обобщенного гармонического ряда, доказана. ▲

ЗАМЕЧАНИЕ 1. n-й член гармонического ряда стремится к нулю, однако сам ряд при этом является расходящимся. Таким образом, условие $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ является лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как несложно заметить, при $\alpha \leq 0$ обобщенный гармонический ряд заведомо расходится. В §2 мы покажем, что он расходится также и при $0 < \alpha < 1$.

4. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.

△ Для а), б) и в) получаем соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0,001} = \lim_{n\to\infty} (0,001)^{1/n} = 1 \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 - 1/n} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} = \left[\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n\right]^3 = e^3 \neq 0.$$

Последовательность $\{\sin n\}$ также не может иметь нуль своим пределом. Действительно, если допустить, что это не так, то $\sin n = \sin((n-1)+1) =$ $= \sin(n-1)\cos 1 + \sin 1 \cos(n-1) \to 0$, откуда $\cos(n-1) \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку $\sin 1 \neq 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, в силу которого последовательности $\{\sin n\}$ и $\{\cos n\}$ не могут быть бесконечно малыми одновременно.

Таким образом, ряды а)-г) расходятся, поскольку ни для одного из них не выполнено необходимое условие сходимости. ▲

5. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

△ а) Фиксируем произвольное положительное ε и выберем в качестве N число $[1/\varepsilon] + 1$. Тогда при любом натуральном p и всех $n \geq N$ имеем

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

что в силу неравенства (2) и означает сходимость данного числового ряда.

б) Оценивая модуль разности $(n+p)$-й и n-й частичных сумм, получаем

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \ldots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} +$$

$$+ \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $N = [2/\varepsilon] + 1$, тогда при любом p и всех $n \geq N$ в силу последней оценки $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. По теореме 1 ряд сходится, что и требовалось доказать. ▲

6. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

△ Ради удобства сформулируем теорему 1 в форме критерия Коши для расходимости ряда. Согласно правилу построения отрицания, для расходимости (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно $\varepsilon > 0$ с условием, что для любого номера N найдутся натуральные p и $n \geq N$, для которых выполнено неравенство $|S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1/4$. Тогда при $p = n$ для ряда а) имеет место оценка

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} >$$

$$> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

а для ряда б) — аналогичная оценка

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n+3)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2}} = \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}.$$

В соответствии с критерием Коши, расходимость рядов а) и б) доказана. ▲

7. Доказать, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с положительными монотонно убывающими членами сходится, то последовательность $\{na_n\}$ является бесконечно малой.

△ Вновь воспользуемся теоремой 1. Поскольку данный ряд сходится, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всяком p и всех $n \geq N$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу монотонного убывания $\{a_n\}$ следует, что

$$pa_{n+p} < \varepsilon/2.$$

Полагая в этом неравенстве $p = n$, получим $2na_{2n} < \varepsilon$. Если же взять $p = n+1$, то $(2n+2)a_{2n+1} < \varepsilon$, откуда тем более $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$. Таким образом, $na_n < \varepsilon$ при любом (как четном, так и нечетном) n, если только $n > N^* = 2N$. Это и означает, что последовательность $\{na_n\}$ бесконечно малая. ▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, исследуйте на сходимость числовые ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right); \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n; \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right); \quad \text{ж)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}; \quad \text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Найдите суммы сходящихся рядов.

2. Покажите, что следующие ряды являются расходящимися:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-5}{n(n^2+1)}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right); \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n; \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}.$$

3. Исследуйте ряды на сходимость, используя критерий Коши:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}; \quad \text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

4. Доказать, что если ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то сходится также и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Справедливо ли обратное утверждение? Если нет, приведите контрпример.

5. Пусть последовательность $\{na_n\}$ сходится и имеет своим пределом число, отличное от нуля. Докажите расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

§2. Числовые ряды с положительными членами.

Основные понятия и теоремы

1. Теоремы сравнения. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называют *рядом с положительными членами*, если при всех n выполнено неравенство $a_n \geq 0$. Если же при всех n имеет место неравенство $a_n > 0$, то такой ряд называют *рядом со строго положительными членами.* Чтобы подчеркнуть, что речь идет именно о таких рядах, мы будем для их членов использовать обозначение p_n (вместо a_n).

Сформулируем критерий сходимости рядов с положительными членами.

Теорема 4: ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

На основе теоремы 4 доказываются теоремы сравнения — ключевые теоремы, с помощью которых устанавливаются практически все основные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Теорема 5 (первая теорема сравнения): пусть даны два числовых ряда с положительными членами:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{и} \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} p'_n.$$

Пусть, начиная с некоторого N, для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$p_n \leq p'_n. \tag{3}$$

Тогда сходимость ряда б) влечет за собой сходимость ряда а), а из расходимости ряда а) вытекает расходимость ряда б).

Теорема 6 (вторая теорема сравнения): если в условии теоремы 5 дополнительно потребовать, чтобы ряды а) и б) были рядами со строго положительными членами, а неравенство (3) заменить неравенством

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p'_{n+1}}{p'_n}, \tag{4}$$

то ее утверждение также будет иметь место.

Теорема 7 (теорема сравнения в предельной форме): если для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p'_n$$

со строго положительными членами существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p'_n} = L \neq 0, \tag{5}$$

то они сходятся или расходятся одновременно.

2. Признаки Коши и Даламбера. Поочередно применяя первую и вторую теоремы сравнения к ряду с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \tag{6}$$

и ряду, составленному из элементов геометрической прогрессии, мы получим следующие два важных признака.

Теорема 8 (признак Коши): пусть, начиная с некоторого номера N, все члены ряда (6) удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{p_n} \leq q < 1 \qquad (\sqrt[n]{p_n} \geq 1).$$

Тогда рассматриваемый ряд сходится (соответственно, расходится).

Теорема 9 (признак Даламбера): пусть, начиная с некоторого номера N, все члены ряда (6) строго положительны и удовлетворяют неравенству

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq q < 1 \qquad \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq 1\right).$$

Тогда рассматриваемый ряд сходится (соответственно, расходится).

На практике обычно используют предельные формы данных признаков.

Теорема 10 (признак Коши в предельной форме): если существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = L,$$

то ряд (6) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорема 11 (признак Даламбера в предельной форме): если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L,$$

то ряд (6) сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Признак Коши является более сильным, чем признак Даламбера, поскольку существуют ряды, к которым первый применим, а второй — нет (см. пример 4). При этом всякий раз, когда действует признак Даламбера, действует и признак Коши [1].

В заключение этого пункта сформулируем еще одну полезную теорему.

Теорема 12 (обобщенный признак Коши в предельной форме): если для членов ряда (6) существует верхний предел

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = L,$$

то данный ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

3. Признаки Раабе, Гаусса и Коши-Маклорена. Признаки Коши и Даламбера весьма грубы — они не позволяют судить о сходимости или расходимости даже такого простого ряда, как гармонический ряд. Более тонкие признаки можно получить, если сравнивать данный ряд с рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд из элементов геометрической прогрессии. Сформулируем предельную форму признака, основанного на сравнении с обобщенным гармоническим рядом.

Теорема 13 (признак Раабе в предельной форме): пусть все члены ряда (6), начиная с некоторого номера N, строго положительны, и существует

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1\right) = L.$$

Тогда ряд (6) сходится при $L > 1$ и расходится при $L < 1$.

Следующая теорема является естественным обобщением теорем 11 и 13.

Теорема 14 (признак Гаусса): пусть, начиная с некоторого номера N, все члены ряда (6) строго положительны и удовлетворяют при $n \geq N$ соотношению

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

где ε — некоторое положительное число. Тогда ряд (6) сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$. Если же $\lambda = 1$, то он сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leq 1$.

Кроме теорем 13 и 14, существуют и другие, еще более тонкие и сложные признаки — например, признаки Куммера и Бертрана [2]. Однако в практическом плане их роль невелика, поскольку реально применяется один гораздо более простой и более сильный признак. Приведем его.

Теорема 15 (интегральный признак Коши-Маклорена): пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq m$, где m — фиксированное натуральное число. Тогда ряд

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с последовательностью $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int\limits_m^n f(x)dx.$$

4. Отсутствие универсального ряда сравнения. Несложно заметить следующую закономерность: чем «медленнее» сходится ряд, с которым сравнивается данный, тем «сильнее» получается соответствующий признак сходимости. Возникает вопрос: существует ли такой «предельно медленно» сходящийся ряд (назовем его *универсальным*), сравнение с которым позволило бы судить о сходимости любого наперед взятого ряда? К сожалению, ответ на него отрицательный (доказательство этого факта можно найти, например, в [1]). Аналогичная ситуация имеет место и с универсальным расходящимся рядом.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение и приведите пример: а) ряда с положительными членами; б) ряда со строго положительными членами. Какое условие является необходимым и достаточным условием сходимости таких рядов?

2. Сформулируйте теоремы сравнения. Останется ли справедливой первая из них, если неравенство $p_n \leq p'_n$ в ее условии заменить неравенством $p_n \leq cp'_n$, где $c > 0$ — некоторая постоянная? Ответ обоснуйте.

3. Справедлива ли теорема сравнения в предельной форме в случае, когда фигурирующий в ней предел равен нулю? Приведите примеры.

4. Сформулируйте и докажите теоремы о признаках Коши и Даламбера. Можно ли неравенства $\sqrt[n]{p_n} \leq q < 1$ и $p_{n+1}/p_n \leq q < 1$ в условиях этих теорем заменить, соответственно, неравенствами $\sqrt[n]{p_n} < 1$ и $p_{n+1}/p_n < 1$? Ответ обоснуйте.

5. Сформулируйте теоремы о признаках Коши и Даламбера в предельной форме. Что можно сказать о сходимости соответствующего ряда, если пределы, фигурирующие в этих теоремах, равны единице? Рассмотрите данный вопрос на примерах гармонического ряда и обобщенного гармонического ряда с общим членом $p_n = 1/n^2$.

6. Сформулируйте теоремы о признаках Гаусса и Раабе в предельной форме. На сравнении с каким рядом они основаны?

7. Получите предельные формы признаков Даламбера и Раабе как следствия признака Гаусса.

8. Сформулируйте интегральный признак Коши-Маклорена. Докажите с его помощью сходимость обобщенного гармонического ряда при $\alpha > 1$.

9. Что такое универсальный ряд сравнения? Существует ли он?

Примеры решения задач

1. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

в случае, когда $0 < \alpha < 1$.

$\triangle$ При каждом $0 < \alpha < 1$ для любого номера n справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то расходится, в силу первой теоремы сравнения, и рассматриваемый ряд. $\blacktriangle$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вывод о расходимости обобщенного гармонического ряда при $0 < \alpha < 1$ можно сделать и на основе второй теоремы сравнения.

В самом деле, оба ряда в примере 1 являются рядами со строго положительными членами, причем неравенство (4) выполняется для них одновременно с неравенством (3).

2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right).$$

$\triangle$ Найдем асимптотическое представление для n-го члена данного ряда при $n \to \infty$:

$$p_n = \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) = \ln\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \ln\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \ln\left[1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)\right] -$$

$$- \ln\left[1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) -$$

$$-\left[-\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(-\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] = \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставляя в (5) полученное выражение для p_n и полагая $p'_n = 1/n^2$, имеем

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \pi^2 \neq 0.$$

Обобщенный гармонический ряд с n-м членом $p'_n = 1/n^2$ сходится. Следовательно, по теореме 7, сходится и рассматриваемый ряд. $\blacktriangle$

3. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

$\triangle$ Воспользуемся признаком Даламбера в предельной форме. Получаем для рядов а) и б) соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1} n!}{1000^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)! n^n}{3^n n! (n+1)^{n+1}} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1.$$

Таким образом, ряд а) является сходящимся, а ряд б) — расходящимся. $\blacktriangle$

4. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n}; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$\triangle$ Воспользуемся признаком Коши в предельной форме. Получаем для рядов а) и б) соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(-1)^n + 2}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Таким образом, ряды а) и б) сходятся. $\blacktriangle$

Заметим, что для членов ряда а) в примере 4 не существует предела последовательности $\{p_{n+1}/p_n\}$. Тем самым, для этого ряда действует признак Коши, но не действует признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}.$$

$\triangle$ Применим обобщенный признак Коши в предельной форме. Учитывая, что верхний предел последовательности $\{(-1)^n\}$ достигается при четных n, имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[2k]{8k^3}(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Итак, в силу теоремы 12, рассматриваемый ряд сходится. $\blacktriangle$

6. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right)^{\alpha}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \qquad p > 0, q > 0.$$

$\triangle$ а) Поскольку при $n \to \infty$ для членов ряда имеет место представление

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{q-p}{p+n}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha(q-p)}{p+n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1\right) = \alpha(q-p).$$

В силу признака Раабе в предельной форме, ряд сходится при $\alpha(q-p) > 1$.

б) При $n \to \infty$ для отношения n-го и $(n+1)$-го членов ряда получаем

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\exp\left[(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[-1 + (n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] = \exp\left[\frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1\right) = p - 0,5.$$

Таким образом, по признаку Раабе в предельной форме, данный ряд сходится при $p > 1,5$. ▲

7. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\beta} n}, \quad \beta > 0; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

△ а) Воспользуемся интегральным признаком Коши-Маклорена, полагая $m = 2$ и $f(x) = 1/(x\ln^{\beta} x)$. Легко видеть, что введенная функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 15 — она неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq 2$. Тем самым, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости числовой последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x\ln^{\beta} x}dx = \frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta}\Bigg|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} \quad \text{при} \quad \beta \neq 1,$$

и

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x\ln^{\beta} x}dx = \ln(\ln x)\Bigg|_{x=2}^{x=n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \quad \text{при} \quad \beta = 1.$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$. Таким образом, рассматриваемый ряд является сходящимся при $\beta > 1$ и расходящимся при $\beta \leq 1$.

б) Из неравенства $n! < n^n$, справедливого при любом $n \geq 2$, а также монотонного возрастания функции $f(x) = \ln x$, имеем $\ln(n!) < n \ln n$, или

$$\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln(n!)}.$$

Учитывая доказанную в предыдущем примере расходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

заключаем на основании теоремы 5, что данный ряд также расходится.▲

8. Пусть все члены p_n некоторого ряда строго положительны. Доказать, что если существует такое $\alpha > 0$, что для всех n, начиная с некоторого номера N, выполнено неравенство

$$\frac{\ln p_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha \qquad \left(\frac{\ln p_n^{-1}}{\ln n} \leq 1\right),$$

то этот ряд сходится (расходится).

△ Непосредственно из условия следует, что при всех $n \geq N$ выполнено неравенство

$$0 < p_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}} \qquad \left(p_n \geq \frac{1}{n}\right).$$

Поскольку обобщенный гармонический ряд с общим членом $1/n^{1+\alpha}$ при любом $\alpha > 0$ сходится (а гармонический расходится), то справедливость данного утверждения вытекает из теоремы 5. ▲

Установленный признак называется *логарифмическим.* Как и признаки Раабе и Гаусса, он основан на сравнении исходного ряда со сходящимся обобщенным гармоническим рядом (и расходящимся гармоническим).

9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}.$$

$\triangle$ Воспользуемся логарифмическим признаком. Так как

$$\frac{\ln p_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 2$$

при всех натуральных n, удовлетворяющих неравенству

$$n > e^{e^{e^2}},$$

то рассматриваемый ряд, по логарифмическому признаку, сходится. $\blacktriangle$

10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \text{где} \quad p_n = \left(\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx\right)^{-1}.$$

$\triangle$ При любом $n \geq 1$ функции $f(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$ и $g(x) = x$ интегрируемы на сегменте $[0, n]$, причем всюду на этом сегменте $f(x) > g(x)$. Отсюда

$$\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx > \int\limits_0^n xdx = \frac{n^2}{2},$$

или, что то же самое,

$$0 < p_n < \frac{2}{n^2}.$$

Поскольку ряд в правой части последнего неравенства сходится, то сходится, по теореме 5, и рассматриваемый ряд. $\blacktriangle$

11. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\}$, если

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$\triangle$ Сведем данную задачу к эквивалентной задаче о сходимости ряда. Запишем x_n в виде

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k),$$

и преобразуем в полученной формуле выражение для разности x_{k+1} и x_k:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + 2\frac{k-k-1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}.$$

Итак, сходимость последовательности $\{x_n\}$ эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}.$$

Докажем, что последний сходится. Для этого воспользуемся сходимостью обобщенного гармонического ряда с общим членом $1/k^{\frac{3}{2}}$, и соотношением

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+1/k}\left(1+\sqrt{1+1/k}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Применение теоремы 7 завершает доказательство.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, причем ее предел в силу сходимости полученного ряда можно представить в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}. \quad \blacktriangle$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. Используя теоремы сравнения, а также признаки Даламбера и Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}};$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+1/n)^n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}; \quad \text{ж) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

7. Пользуясь обобщенным признаком Коши в предельной форме, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/3)}{2^n}.$$

8. Используя признак Раабе в предельной форме, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\right)^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

9. Пользуясь интегральным признаком Коши-Маклорена, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln(\ln n))^q}.$$

10. Используя логарифмический признак, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln x}, \quad x > 0; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}.$$

11. Применяя асимптотические формулы и теорему сравнения в предельной форме, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \cdot \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right); \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right);$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p; \qquad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}, \quad a > 0, b > 0;$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1/(n^2+1)} - 1\right); \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2} - \sin\frac{\pi n}{2n+1}\right); \quad \text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{n^\alpha} - 1\right).$$

12. Исследовать на сходимость ряды со следующими общими членами:

$$\text{а)} p_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx; \qquad \text{б)} p_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x} dx; \qquad \text{в)} p_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

13. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\}$, если

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}.$$

§3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признаки сходимости рядов со знакопеременными членами.

Основные понятия и теоремы

1. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Кроме рядов с положительными (неотрицательными) членами, на практике нередко приходится иметь дело с рядами, члены которых знакопеременны. Важную роль в теории таких рядов играют понятия *абсолютной* и *условной* сходимостей. Дадим определения этих понятий.

Определение 4: числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{8}$$

Определение 5: числовой ряд (7) называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а соответствующий ряд (8) из модулей расходится.

Следующая теорема показывает, что требование сходимости ряда (7), присутствующее в определении 5, оказывается излишним в определении 4.

Теорема 16: если ряд является абсолютно сходящимся, то он сходится.

2. Перестановки членов ряда. Как известно, сумма конечного числа вещественных слагаемых при любой их перестановке не меняется. Возникает вопрос: остается ли справедливым переместительное свойство для суммы сходящегося ряда, когда число слагаемых бесконечно? Положительный ответ на него, как показывают следующие две теоремы, имеет место лишь для абсолютно сходящегося ряда, тогда как условно сходящийся ряд переместительным свойством не обладает.

Теорема 17 (теорема Коши): если ряд (7) сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из него путем некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и ряд (7).

Теорема 18 (теорема Римана): если ряд (7) сходится условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с любым наперед заданным значением суммы L (не исключая при этом $L = \pm\infty$).

3. Признаки сходимости рядов со знакопеременными членами. Очевидно, что при исследовании ряда (7) на абсолютную сходимость можно использовать любой из признаков предыдущего параграфа, поскольку в этом случае мы имеем дело с рядом из модулей (8). Однако ни один из признаков, рассмотренных в §2, не позволяет сделать более тонкого вывода об условной сходимости ряда (7).

Сформулируем признаки, которые позволяют устанавливать сходимость ряда (7) и в тех случаях, когда он не является абсолютно сходящимся.

Определение 6: числовой ряд (7) называется *знакочередующимся*, если все его соседние члены имеют разные знаки. Общий член a_n знакочередующегося ряда удобно записывать в виде

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n, \tag{9}$$

где $b_n \geq 0$ при всех натуральных n.

Определение 7: знакочередующийся ряд (7) называется *рядом Лейбница*, если последовательность $\{b_n\}$ в (9) монотонно стремится к нулю.

Теорема 19 (признак Лейбница): всякий ряд Лейбница сходится, причем для любого номера n справедливо неравенство

$$|S_n - S| \leq b_n,$$

где $\{S_n\}$ — последовательность его частичных сумм, а S — его сумма.

Следующие два важных признака применяются к числовым рядам вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{10}$$

Теорема 20 (признак Абеля): ряд (10) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{11}$$

а последовательность $\{b_n\}$ при этом является монотонной и ограниченной.

Теорема 21 (признак Дирихле): ряд (10) сходится, если ряд (11) имеет ограниченную последовательность частичных сумм, а последовательность $\{b_n\}$ при этом монотонно стремится к нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 19 является следствием теоремы 21. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в (11) $a_n = (-1)^{n-1}$ и заметить, что последовательность частичных сумм ряда $1-1+1-1+\ldots$ ограничена.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение и приведите пример: а) абсолютно сходящегося ряда; б) ряда, сходящегося условно.

2. Что можно сказать о сходимости абсолютно сходящегося ряда? Докажите соответствующее утверждение, используя теорему о необходимом и достаточном условии сходимости (критерий Коши для числового ряда).

3. Справедливо ли переместительное свойство для суммы: а) условно сходящегося ряда; б) ряда, сходящегося абсолютно?

4. Что такое знакочередующийся ряд? Всегда ли такой ряд является сходящимся? Ответ обоснуйте.

5. Что такое ряд Лейбница? Всегда ли такой ряд является сходящимся?

6. Сформулируйте теоремы о признаках Абеля и Дирихле.

Примеры решения задач

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряды:

а)$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$; б)$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$; в)$1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

Если ряд является сходящимся, найти его сумму.

$\triangle$ а) Последовательность частичных сумм исследуемого ряда имеет вид

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots,$$

откуда следует, что данный ряд сходится, причем его сумма равна нулю. В то же время, соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots$$

расходится (чтобы проверить это, достаточно сравнить его с гармоническим рядом, используя первую теорему сравнения). Итак, данный ряд по определению 5 является условно сходящимся.

б) Оценим n-ю частичную сумму S_n данного ряда. Для этого воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1$$

(доказательство последнего неравенства см. в [1]). Полагая в выписанном разложении $x = 1$, получаем оценку

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) - \ln 2\right| = |S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1},$$

из которой вытекает сходимость последовательности $\{S_n\}$, а значит, и рассматриваемого ряда. В то же время, ряд из модулей его членов является гармоническим, и, следовательно, расходящимся. Тем самым, данный ряд сходится условно, причем его сумма в силу полученной оценки равна $\ln 2$.

в) Применим к ряду из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \dots,$$

соответствующему исходному ряду, признак Даламбера в предельной форме. Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

следует, что он сходится. Таким образом, исходный ряд является абсолютно сходящимся, а значит, и сходящимся в силу теоремы 16.

Теперь найдем сумму S данного ряда. Для этого представим n-й член

$$S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$ в виде

$$S_n = \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right] + 2 \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right] +$$
$$+2 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right] + \ldots + 2 \cdot \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right].$$
В этом представлении каждое из n выражений в квадратных скобках, за исключением последнего, представляет собой сумму соответствующего числа членов геометрической прогрессии со знаменателем $-1/2$, поэтому
$$S_n = \frac{2}{3}\cdot\left[1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right] + \frac{4}{3}\cdot\left[-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2^n}\right] + \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{(-1)^n}{2^n}\right] + \ldots + 2\cdot\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right] =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right) - \frac{4}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot(n-2) + 2\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{4}{9}\cdot\left(1 - \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}\right) - \frac{4}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot(n-2) + 2\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$
Переходя в последнем равенстве к пределу, получаем окончательный ответ:
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}. \quad \blacktriangle$$

2. Показать, что члены сходящегося ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$
можно переставить таким образом, чтобы он стал расходящимся.

$\triangle$ Очевидно, этот ряд сходится, поскольку является рядом Лейбница. В то же время, ряд из модулей его членов расходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 1/2$ (см. пример 1 §2). Тем самым, данный ряд сходится условно, что в силу теоремы Римана и означает, что его члены можно переставить таким образом, чтобы он стал расходящимся. В качестве примера приведем перестановку, при которой через каждые три положительных члена исходного ряда следует один отрицательный:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$
Докажем, что построенный ряд расходится. В силу очевидных неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}>\frac{2}{\sqrt{6n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{2}{\sqrt{6n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

имеем

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>0,$$

откуда следует, что для n-го члена построенного ряда справедлива оценка

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}.$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$$

является расходящимся; таким образом, на основе первой теоремы сравнения заключаем, что построенный нами ряд также расходится. ▲

3. Исследовать на сходимость следующие знакопеременные ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{2n}; \qquad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

△ а) Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}.$$

Она монотонно убывает на полупрямой $(100;+\infty)$, поскольку

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x})'(x+100)-\sqrt{x}(x+100)'}{(x+100)^2}=\frac{\frac{x+100}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+100)^2}<0 \quad \text{при} \quad x>100.$$

Тем самым, последовательность

$$b_n=\frac{\sqrt{n}}{n+100},$$

начиная с сотого номера, монотонно стремится к нулю. Итак, отбрасывая первые сто членов данного ряда, мы получаем ряд Лейбница, который сходится в силу теоремы 19 (напомним, что отбрасывание любого конечного числа членов ряда, согласно теореме 3 из §1, никак не влияет на его сходимость или расходимость).

б) Исследуемый ряд является рядом вида (10), у которого

$$a_n=\cos\frac{\pi n}{2} \quad \text{и} \quad b_n=\frac{1}{2n}.$$

Последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

имеет вид

$$0, -1, -1, 0, 0, -1, -1, 0, \ldots$$

и является, очевидно, ограниченной. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ при этом монотонно стремится к нулю, то данный ряд, в силу теоремы о признаке Дирихле, является сходящимся.

в) В силу очевидного соотношения

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

данный ряд можно представить в виде ряда (10) следующим образом:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n, \qquad \text{где} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n} \quad \text{и} \quad b_n = \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Последовательность $\{b_n\}$ в этом представлении является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом 1. В то же время, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$$

сходится, поскольку представляет собой ряд Лейбница (монотонность соответствующей бесконечно малой последовательности следует из неравенства

$$\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)' = -\frac{2}{x\ln^3 x} < 0,$$

справедливого при любом $x > 1$). Таким образом, данный ряд, по признаку Абеля, также сходится.▲

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right), \qquad k \neq 0;$$

$$\text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\ln n}; \qquad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}.$$

$\triangle$а) Поскольку при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}\right) = \sin\left[\pi n\left(1+\frac{k^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] =$$

$$= \sin\left(\pi n + \frac{\pi k^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi k^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n\left[\frac{\pi k^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\pi k^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = (-1)^n\left(\frac{\pi k^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то ряд из модулей членов данного ряда является расходящимся (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить его с гармоническим рядом, используя теорему сравнения в предельной форме и тот факт, что $k \neq 0$).

В то же время, n-й член рассматриваемого ряда можно записать в виде

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+k^2}+n\right)}{\sqrt{n^2+k^2}+n} =$$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \equiv (-1)^n b_n,$$

где последовательность $\{b_n\}$, начиная с некоторого номера, монотонно стремится к нулю. Таким образом, данный ряд является рядом Лейбница. Следовательно, по теореме 19 он сходится, причем сходится условно.

б) Данный ряд является рядом вида (10), у которого

$$a_n = \sin\frac{\pi n}{4} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\ln n}.$$

Последовательность $\{b_n\}$, как несложно заметить, монотонно стремится к нулю. Таким образом, согласно теореме о признаке Дирихле, для доказательства сходимости рассматриваемого ряда достаточно установить ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Воспользуемся формулой для разности косинусов, в силу которой имеем

$$\cos\left(\frac{\pi k}{4}+\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{4}-\frac{\pi}{8}\right) = -2\sin\frac{\pi k}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{8}.$$

Суммируя это соотношение по k от 1 до n, получим

$$\left(\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\right)+\left(\cos\frac{5\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\right)+\left(\cos\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi n}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=-2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{4},$$

откуда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8})}{2\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Из последней формулы следует, что при любом номере n

$$\left|S_n\right|=\frac{\left|\cos\frac{\pi}{8}-\cos(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8})\right|}{2\sin\frac{\pi}{8}}\le\frac{\left|\cos\frac{\pi}{8}\right|+\left|\cos(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8})\right|}{2\sin\frac{\pi}{8}}\le\frac{2}{2\sin\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Итак, последовательность $\{S_n\}$ ограничена, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь ряд из модулей, соответствующий исходному ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{\pi n}{4}\right|}{\ln n}. \qquad (*)$$

Поскольку при любом $n\ge 2$ справедливы неравенства

$$n>\ln n \quad \text{и} \quad \left|\sin\frac{\pi n}{4}\right|\ge\sin^2\frac{\pi n}{4},$$

то

$$\frac{\left|\sin\frac{\pi n}{4}\right|}{\ln n}>\frac{\left|\sin\frac{\pi n}{4}\right|}{n}\ge\frac{\sin^2\frac{\pi n}{4}}{n}=\frac{1-\cos\frac{\pi n}{2}}{2n}. \qquad (**)$$

Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1-\cos\frac{\pi n}{2}}{2n}\right) \qquad (***)$$

«составлен» из рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{2n},$$

первый из которых расходится, а второй — сходится в силу результата примера 3-б). Принимая во внимание следствие теоремы 2 из §1, заключаем, что ряд $(***)$ расходится. Но тогда ряд $(*)$, по первой теореме сравнения, также расходится в силу неравенства $(**)$. Таким образом, исходный ряд сходится условно.

в) Поскольку $\operatorname{arctg} n \geq \pi/4$ при любом $n \geq 1$, то

$$\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

Принимая во внимание, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$$

расходится, заключаем на основе первой теоремы сравнения, что ряд из модулей, соответствующий исходному ряду, также является расходящимся.

В то же время, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

сходится, поскольку является рядом Лейбница, а последовательность $\{b_n\} = \{\operatorname{arctg} n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом $\pi/2$. Итак, данный ряд, в силу теоремы о признаке Абеля, сходится условно. ▲

5. При каких значениях параметра p ряды

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p} \qquad \text{и} \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + (-1)^n\right)^p}$$

являются абсолютно сходящимися, а при каких — сходятся условно?

△а) Очевидно, что при $p \leq 0$ исследуемый ряд заведомо расходится, поскольку в этом случае не выполнено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Тогда последовательность $\{1/n^p\}$ монотонно стремится к нулю, и, как показано в примере 4-б), при любом n справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi k}{4} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 21, и данный ряд сходится.

Чтобы выяснить, при каких значениях параметра p имеет место абсолютная сходимость, воспользуемся оценкой

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{\left|\sin \frac{\pi n}{4}\right|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{4}}{n^p} = \frac{1 - \cos \frac{\pi n}{2}}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{2n^p},$$

и применим первую теорему сравнения. На основе левого неравенства заключаем, что исследуемый ряд, в силу сходимости соответствующего обобщенного гармонического ряда, сходится абсолютно при $p > 1$.

Если же $0 < p \leq 1$, то ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$$
расходится, тогда как ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{2n^p}$$
является сходящимся по теореме о признаке Дирихле (доказательство этого факта практически дословно повторяет рассуждения примера 3-б)). Принимая во внимание следствие теоремы 2 из §1, заключаем, что ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos\frac{\pi n}{2}}{2n^p} \right)$$
расходится. Но тогда, в силу правого неравенства последней оценки, расходится и ряд из модулей членов данного ряда. Таким образом, при $0 < p \leq 1$ имеет место лишь условная сходимость.

б) При $p \leq 0$ не выполнено необходимое условие сходимости, в силу чего ряд заведомо является расходящимся.

Найдем асимптотическое представление для n-го члена данного ряда в случае, когда $p > 0$. Используя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, получаем при $n \to \infty$:
$$\frac{(-1)^n}{\big(n + (-1)^n\big)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^p} \cdot \left(1 + p\frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$
Ряды
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{и} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$$
сходятся при любом $p > 0$ (первый, очевидно, сходится по признаку Лейбница, тогда как сходимость второго следует из теоремы сравнения в предельной форме и сходимости соответствующего обобщенного гармонического ряда). Применяя теорему 2 из §1 и учитывая равенство
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\big(n + (-1)^n\big)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right),$$
заключаем, что данный ряд также является сходящимся при любом $p > 0$.

Теперь выясним, при каких значениях параметра имеет место абсолютная сходимость. Так как $p > 0$ и $n - 1 \le n + (-1)^n \le n + 1$, то

$$\frac{1}{(n+1)^p} \le \frac{1}{\bigl(n+(-1)^n\bigr)^p} \le \frac{1}{(n-1)^p}.$$

Очевидно, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^p}$$

сходится при $p > 1$, а ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

расходится при $0 < p \le 1$. Таким образом, на основе первой теоремы сравнения заключаем, что данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$, тогда как при $0 < p \le 1$ имеет место лишь условная сходимость. ▲

6. Является ли сходящимся знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad b_n \ge 0,$$

если $b_n \to 0$ при $n \to \infty$?

△ Вообще говоря, не является. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

Покажем, что он расходится. Для этого представим его n-й член в виде

$$(-1)^n \frac{2}{n} + \frac{1}{n},$$

и заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}$$

сходится как ряд Лейбница, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится как гармонический. Принимая во внимание следствие теоремы 2 из §1, заключаем, что рассматриваемый ряд является расходящимся. ▲

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример 6 подчеркивает принципиальный характер условия монотонности бесконечно малой последовательности $\{b_n\}$ в теореме о признаке Лейбница. Как мы видим, если от этого условия отказаться, то соответствующий знакочередующийся ряд, вообще говоря, расходится.

7. Пусть даны знакопеременные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Известно, что первый из этих рядов является сходящимся, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$

Можно ли утверждать, что второй ряд также является сходящимся?

△ Вообще говоря, этого утверждать нельзя. В самом деле, пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right).$$

Первый ряд сходится, поскольку является рядом Лейбница; при этом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

С другой стороны, n-й член второго ряда представляет собой сумму n-х членов сходящегося и расходящегося рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Принимая во внимание следствие теоремы 2 из §1, заключаем, что второй ряд расходится. ▲

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример 7 показывает, что теорема сравнения в предельной форме, сформулированная в §2 для рядов со строго положительными членами, неверна для рядов, члены которых знакопеременны.

8. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$$

достаточно взять, чтобы получить его сумму с точностью до 10^{-6}?

$\triangle$ Данный ряд, как несложно заметить, является рядом Лейбница. Согласно оценке суммы, приведенной в теореме 19, нужное число членов можно найти из неравенства $b_n = 1/\sqrt{n^2+1} \leq 10^{-6}$, откуда $n \geq 10^6$. $\blacktriangle$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

14. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если его члены переставить таким образом, что номер каждого члена изменится не больше, чем на m, где m — некоторое заданное число.

15. Зная, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

равна $\ln 2$ (см. пример 1-б)), найти суммы следующих рядов:

$$\text{а)} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

$$\text{б)} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

(Ряд а) получается из исходного в результате перестановки, при которой два последовательных положительных члена сменяются одним отрицательным, а ряд б) — в результате перестановки, при которой за одним положительным следуют два последовательных отрицательных.)

16. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}; \qquad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{\pi n}{4};$$

$$\text{г)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}; \qquad \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; \qquad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

17. Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряды:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{12}}{\ln n}; \qquad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}.$$

18. При каких значениях параметра p ряды

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin\frac{\pi n}{4}} \qquad \text{и} \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$

являются абсолютно сходящимися, а при каких — сходятся условно?

19. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

при любом $p > 0$ лежит между $1/2$ и 1.

20. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$$

достаточно взять, чтобы получить его сумму с точностью до 10^{-6}?

§4. Арифметические операции над рядами. Суммирование рядов.

Основные понятия и теоремы

1. Арифметические операции над сходящимися рядами. В предыдущих параграфах мы познакомились с такими действиями над числовыми рядами, как почленное сложение, одновременное умножение всех членов ряда на одно и то же число, отбрасывание (добавление) конечного числа членов, а также перестановки членов ряда. Перечисленные действия принято называть *арифметическими операциями* над рядами. В этом параграфе мы рассмотрим еще две операции подобного рода — расстановку скобок и операцию умножения рядов.

Теорема 22 (ассоциативное свойство сходящегося ряда): если некоторые группы слагаемых в сходящемся числовом ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

заключить в скобки, то его сходимость не нарушится и сумма не изменится (отметим, что заключенные в скобки слагаемые заменяются их суммой).

Перейдем к вопросу о произведении рядов. Введем следующее понятие.

Определение 8: *произведением* числовых рядов

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

называется ряд

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

где

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Теорема 23 (теорема Мертенса): если ряд а) имеет сумму A и сходится абсолютно, а ряд б) имеет сумму B и сходится условно, то ряд в) (произведение этих рядов) также сходится и имеет сумму AB.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условии теоремы 23 дополнительно потребовать, чтобы ряд б) сходился абсолютно и имел сумму B, то ряд в) будет также сходиться абсолютно и иметь сумму AB.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ряды а) и б) сходятся лишь условно, то их произведение в) может быть расходящимся рядом. В частности, квадрат условно сходящегося ряда (произведение двух одинаковых рядов) может быть рядом, который расходится (см. пример 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если все три ряда а), б) и в) сходятся и имеют суммы, соответственно равные A, B и C, то имеет место формула $AB = C$.

2. Суммирование рядов. При нахождении суммы S сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

в некоторых случаях удобно представить его n-й член в виде $u_n = v_{n+1} - v_n$. В этом представлении $v_{n+1} = S_n + v_1$, где $\{S_n\}$ — последовательность частичных сумм данного ряда. Тогда, если $v_n \to v_\infty$ при $n \to \infty$, то

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = v_\infty - v_1.$$

В частности, если n-й член исходного ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}}, \tag{12}$$

где $a_{n+k} = a_n + kd$, $d = \text{const}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, то при любом натуральном n

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}. \tag{13}$$

Иногда требуется просуммировать сходящийся ряд, n-й член которого является рациональной функцией от n. Как правило, в подобных случаях исходный ряд удается представить в виде линейной комбинации сходящихся рядов, суммы которых заранее известны. Для этого достаточно разложить его n-й член (например, с помощью метода неопределенных коэффициентов) на простые дроби, и применить теорему 2. Приведем некоторые полезные соотношения, которые часто используются при этом:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \qquad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \tag{14}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие арифметические операции над числовыми рядами вы знаете?

2. Приведите примеры, показывающие, что сумма расходящихся рядов может быть как сходящимся рядом, так и рядом, который расходится.

3. Что можно сказать о сумме двух рядов, один из которых сходится, а другой расходится? Ответ обоснуйте.

4. В чем заключается ассоциативное свойство сходящегося ряда?

5. Сформулируйте определение произведения числовых рядов. При каких условиях на перемножаемые ряды оно является: а) сходящимся рядом; б) абсолютно сходящимся рядом?

6. Является ли сходящимся рядом произведение двух условно сходящихся рядов?

Примеры решения задач

1. Доказать теорему 22 (ассоциативное свойство сходящегося ряда).

△ Пусть дан сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

который имеет сумму A. Очевидно, что любая группировка его членов, связанная с некоторой расстановкой скобок, порождает новый ряд вида

$$(a_1 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_3}) + \ldots = \sum_{s=1}^{\infty} b_s,$$

где $b_s = a_{k_{s-1}+1} + \ldots + a_{k_s}$ при $s = 1, 2, 3, \ldots$ и $k_0 = 0$. Несложно заметить, что последовательность $\{B_s\}$ частичных сумм этого нового ряда есть не что иное, как подпоследовательность $\{A_{k_s}\}$ последовательности частичных сумм исходного ряда. Но всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность [1], поэтому $B_s = A_{k_s} \to A$ при $s \to \infty$. Таким образом, при любой группировке членов сходящегося ряда его сходимость не нарушается и сумма не изменяется. ▲

2. Показать, что сумма произведения рядов

$$\text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

равна единице.

$\triangle$ Решим данную задачу двумя способами: 1) пользуясь определением произведения рядов; 2) используя теорему Мертенса.

1) Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},$$

то, согласно определению 8, n-й член произведения рядов а) и б) имеет вид

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \qquad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{(k-1)!} \quad \text{и} \quad b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1-1}}{(n-k+1-1)!} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!},$$

откуда следует, что $c_1 = 1$. С другой стороны, для $(n+1)$-го члена получаем

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n+1-k)!} =$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(n-k)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя биномиальную формулу Ньютона к выражению $(1-1)^n$, имеем

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0.$$

Отсюда следует, что $c_{n+1} = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Итак, поскольку $c_1 = 1$ и $c_n = 0$ при $n \geq 2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

2) Ряды а) и б) сходятся абсолютно (чтобы проверить это, достаточно применить признак Даламбера в предельной форме). В силу теоремы Мертенса это означает, что их произведение также является сходящимся рядом, причем сумма этого ряда равна произведению сумм рядов а) и б).

Оценим n-е частичные суммы A_n и B_n рядов а) и б). Для этого воспользуемся разложением функции e^x по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

где

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 1$$

(доказательство последнего неравенства см. в [1]). Поочередно полагая в этом разложении $x = 1$ и $x = -1$, получаем оценки

$$\left|\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) - e\right| = |A_n - e| = |R_{n+1}(1)| < \frac{3}{(n+1)!}$$

и

$$\left|\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - e^{-1}\right| = |B_n - e^{-1}| = |R_{n+1}(-1)| < \frac{3}{(n+1)!},$$

из которых следует, что суммы рядов а) и б) равны e и e^{-1}, соответственно. Таким образом, произведение этих рядов, согласно теореме Мертенса, имеет сумму $e \cdot e^{-1} = 1$. ▲

3. Показать, что квадрат условно сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

является рядом, который расходится.

△ Согласно определению 8, n-й член квадрата данного ряда имеет вид

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}.$$

Покажем, что $|c_n| \geq 1$ при любом номере n. Для этого просуммируем по k от 1 до n неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

(докажите справедливость этих неравенств самостоятельно). Имеем

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{n}{n} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Итак, квадрат исходного ряда является расходящимся рядом, поскольку для него не выполнено необходимое условие сходимости. ▲

4. Найти сумму S ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

$\triangle$ Легко видеть, что n-й член

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

рассматриваемого ряда имеет вид (12), где $a_n = n$, $d = 1$ и $m = 2$. Применяя формулу (13), имеем

$$v_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)},$$

откуда следует, что

$$S=\lim_{n\to\infty} v_n - v_1 = 0-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}. \quad \blacktriangle$$

5. Найти сумму S ряда:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots;$ б) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots.$

$\triangle$ а) Представим n-й член

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

данного ряда в виде

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}.$$

В силу соотношения 1)-(14)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}=\ln 2,$$

поэтому, согласно теореме 2 о почленном сложении сходящихся рядов, сумма исходного ряда равна $\ln 2+(\ln 2-1)=2\ln 2-1$.

б) Принимая во внимание результат примера а), а также учитывая, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{6\cdot 7}\right)+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)},$$

получаем для суммы рассматриваемого ряда значение $S=\ln 2-1/2$. $\blacktriangle$

6. Найти сумму S ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, \quad m \in \mathbb{N}; \qquad\qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

$\triangle$ а) Представляя n-ый член данного ряда в виде

$$u_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right),$$

получаем для его n-ой частичной суммы S_n следующее выражение:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=m+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right).$$

Так как m — фиксированное натуральное число, а сумма S определяется предельным переходом при $n \to \infty$, то можно считать, что $n > m$. Отсюда

$$S_n = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right).$$

Поскольку при $n \to \infty$ каждое из m слагаемых в сумме

$$\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+m}$$

стремится к нулю, то и вся эта сумма стремится к нулю при $n \to \infty$. Итак,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

б) Принимая во внимание результат примера а), а также учитывая, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)},$$

получаем для суммы рассматриваемого ряда значение

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}. \quad \blacktriangle$$

7. Найти сумму S ряда:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}.$$

$\triangle$ а) Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и представим n-ый член u_n данного ряда в виде суммы n-ых членов более простых сходящихся рядов:

$$u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{(n+2)(n+3)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{(A+B)n + A + 3B}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 3B = 0 \end{cases},$$

из которой следует, что $A = 3/2$ и $B = -1/2$. Таким образом, по теореме 2

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

В силу результата, полученного в примере 6-а), имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

из которого, в свою очередь, следуют соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные суммы в выражение для S, получаем $S = 1/4$.

б) Как и в примере 7-а), представим с помощью метода неопределенных коэффициентов n-ый член данного ряда в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{(n+1)^2} =$$
$$= \frac{(A+B)n^3 + (2A+B+C+D)n^2 + (A+2C)n + C}{n^2(n+1)^2}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ A+2C=2 \\ C=-1 \end{cases},$$

из которой следует, что $A=4$, $B=-4$, $C=-1$ и $D=-3$. Применяя к найденному разложению n-го члена

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n} - \frac{4}{n+1} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2} = \frac{4}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}$$

теорему 2, получаем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Сумма первого ряда в правой части последнего выражения равна единице, а суммы второго и третьего рядов находим, используя соотношение 2)-(14):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + 1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Итак, окончательно имеем

$$S = 4\cdot 1 - \frac{\pi^2}{6} - 3\cdot\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 7 - \frac{2\pi^2}{3}. \quad \blacktriangle$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

21. Найти суммы произведений следующих рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

22. Показать, что произведение двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

представляет собой абсолютно сходящийся ряд.

23. Найти суммы следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}; \quad \text{е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2};$$

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}; \quad \text{и) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}; \quad \text{к) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. а) Ряд сходится, $S = 1$; б) Ряд сходится, $S = 3/2$; в) Ряд расходится; г) Ряд сходится, $S = 3$; д) Ряд расходится; е) Ряд сходится, $S = 1 - \sqrt{2}$; ж) Ряд сходится, $S = 2/3$; з) Ряд расходится.

3. а) Ряд расходится; б) Ряд расходится; в) Ряд сходится; г) Ряд расходится (*Указание:* оценить $|S_{n+p} - S_n|$, выбрав $n = 2^k$ и $n + p = 2^{2k}$).

4. *Указание:* воспользоваться неравенством $a_1^2 + \ldots + a_n^2 < (a_1 + \ldots + a_n)^2$.

5. *Указание:* показать, что расходится n-й остаток исследуемого ряда.

6. Все ряды, кроме рядов е) и ж), являются сходящимися.

7. Все три ряда являются сходящимися.

8. а) Ряд сходится, если $q > p$; б) Ряд сходится, если $p/2 + q > 1$.

9. Ряд сходится при $p = 1$, $q > 1$ и при $p > 1$ (в этом случае q — любое).

10. а) Ряд сходится при $x < 1/e$; б) Ряд расходится.

11. а) Ряд сходится при $p > 0$; б) Ряд сходится при $\alpha > 1/2$; в) Ряд сходится при $p > 1$; г) Ряд сходится при $a + b > 1$; д) Ряд сходится; е) Ряд расходится; ж) Ряд сходится при $\alpha < -1$.

12. а) Ряд сходится; б) Ряд расходится; в) Ряд сходится.

13. Последовательность сходится (*Указание:* заменить $\{x_n\}$ рядом аналогично тому, как это сделано в примере 11).

15. а) $\frac{3}{2}\ln 2$; б) $\frac{1}{2}\ln 2$.

16. а) Ряд сходится; б) Ряд сходится; в) Ряд сходится; г) Ряд расходится; д) Ряд расходится; е) Ряд сходится.

17. а) Ряд сходится условно; б) Ряд сходится условно; в) Ряд расходится.

18. а) Ряд является абсолютно сходящимся при $p > 1$ и сходящимся условно при $1/2 < p \le 1$; б) Ряд является абсолютно сходящимся при $p > 1$ и сходящимся условно при $1/2 < p \le 1$.

19. *Указание:* доказать неравенства $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ и $S_{4n-1} > 1 - S_{2n}/2^p$ и воспользоваться тем фактом, что подпоследовательности частичных сумм $\{S_{2n}\}$, $\{S_{2n-1}\}$ и $\{S_{4n-1}\}$ сходятся и имеют один и тот же предел S, причем подпоследовательность $\{S_{2n}\}$ возрастает, а $\{S_{2n-1}\}$ — убывает.

20. Требуется взять не менее $1,32 \cdot 10^6$ членов.

21. а) $S = -\frac{1}{2}\ln 2$; б) $S = e - 1$.

23. а) $S = 3/4$; б) $S = -2/7$; в) $S = 1/2$; г) $S = 2(1 - \ln 2)$; д) $S = \pi^2/4 - 39/16$; е) $S = (4\ln 2 - 1)/6$; ж) $S = 2e$; з) $S = \pi^2/3 - 3$; и) $S = 3e^2$; к) $S = (\cos 1 - \sin 1)/2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.1. Изд. 4-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1982.

[2] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

[3] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.