МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**И.Е. Могилевский, М.А. Терентьев,
Н.Е. Шапкина**

Пособие для подготовки к тестированию по математическому анализу. I семестр

Москва
Физический факультет МГУ
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. **Дифференцирование** 3
§1. Дифференцирование по формулам 3
§2. «Гладкая сшивка» 5
§3. Особенности функции 7
§4. Вычисление n-ной производной 12
§5. Дифференциалы 15

Глава 2. **Интегрирование** 18
§1. Замена переменной в интеграле 18
§2. Интегрирование по частям 22
§3. Интегрирование рациональных функций 28
§4. Интегрирование иррациональных функций 34

Глава 3. **Образцы тестовых заданий** 39
Вариант 1 39
Вариант 2 41
Ключи к вариантам 43

Список литературы 44

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Дифференцирование по формулам

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, где $a = const$;
2. $(\sin x)' = \cos x$;
3. $(\cos x)' = -\sin x$;
4. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
5. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
8. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
9. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
10. $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$, где $a = const$, $a > 0$;
11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, где $a = const$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Основные правила вычисления производной. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные в точке x, $f(u)$ имеет производную в точке $u = u(x)$, а c — постоянная величина, то в указанной точке

1. $(cu)' = cu'$;
2. $(u + v)' = u' + v'$;
3. $(u - v)' = u' - v'$;
4. $(uv)' = u'v + v'u$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;

6. $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Примеры.

Во всех последующих примерах предполагается, что выполнены условия применимости правил 1-6.

Пример 1.1.1. *Найдите производную функции* $u(x) = f(x)^{g(x)}$.

Решение. Представим $u(x)$ в виде показательной функции и найдем ее производную по правилам формального дифференцирования:

$$u(x) = f(x)^{g(x)} \Longleftrightarrow u(x) = e^{g(x)\ln f(x)} \Longrightarrow$$

$$u'(x) = e^{g(x)\ln f(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) =$$

$$= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Пример 1.1.2. *Найдите производную функции* $u(x) = (\sin x)^x$ *в точке* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся предложенным подходом:

$$u(x) = (\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}.$$

Тогда

$$u'(x) = e^{x \ln \sin x} \left(\ln \sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

Отсюда

$$u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(0 + \frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0.$$

Задача 1.1.3. *Найдите производную функции* $u(x) = x^{\sin x}$ *в точке* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 1.

Пример 1.1.4. *Найдите производную функции* $u(x) = (\cos 2x)^{\sin x}$ *в точке* $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение.

$$u(x) = (\cos 2x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(\cos 2x)},$$

тогда

$$u'(x) = e^{\sin x \ln(\cos 2x)} \left(\cos x \ln(\cos 2x) - \sin x \cdot \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} \right).$$

Тогда

$$u'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}(\ln 2 + 1).$$

Задача 1.1.5. *Найдите производную функции* $u(x) = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$ *в точке* $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{e^2} e^2 \left(\frac{4}{\pi} - 4\ln\frac{\pi}{4}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите производную функции

1. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

   Ответ: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$.

2. $y = \log_3 \sqrt[5]{1 - x^4}$.

   Ответ: $-\dfrac{4x^3}{5\ln 3\left(1 - x^4\right)}$.

3. $\log_{(x^2+4)}\left(2x^3 + 1\right)$.

   Ответ: $\dfrac{6x^2}{\left(2x^3+1\right)\ln\left(x^2+4\right)} - \dfrac{2x\ln\left(2x^3+1\right)}{\left(x^2+4\right)\ln^2\left(x^2+4\right)}$.

4. $y = \left(x^2 + 1\right)^{x^2+1}$.

   Ответ: $2x\left(x^2+1\right)^{x^2+1}\left[\ln\left(x^2+1\right)+1\right]$.

5. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

   Ответ: $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln(\sin x)\right)$.

6. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

   Ответ: $(\operatorname{tg} x)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{x} + \dfrac{2\ln x}{\sin 2x}\right)$.

§ 2. «Гладкая сшивка»

Пример 1.2.1. *Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0 = 2$:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & \text{если } x \leqslant x_0, \\ ax^2 + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Решение. Отметим, что непрерывность функции в точке является необходимым условием дифференцируемости в этой точке, поэтому задача может быть сформулирована эквивалентным образом: Подберите параметры a и b так, чтобы функция была дифференцируемой в точке x_0.

Необходимым и достаточным условием непрерывности функции в точке является равенство левого и правого пределов функции в этой точке; необходимым и достаточным условием дифференцируемости — равенство левой и правой производных:

$$\begin{cases} \left(x^2+4x-3\right)\big|_{x=2} = \left(ax^2+b\right)\big|_{x=2}, \\ (2x+4)\big|_{x=2} = 2ax|_{x=2}, \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = 4a+b, \\ 8 = 4a. \end{cases}$$

Отсюда $a=2, \quad b=1$.

Задача 1.2.2. *Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$:*

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b, \text{ \textit{если} } x \leqslant x_0, \\ \cos x, \text{ \textit{если} } x > x_0. \end{cases}$$

Ответ: $a=-1, \quad b=\sqrt{2}$.

Пример 1.2.3. *Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0 = 0,5$:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, \text{ \textit{если} } x \leqslant x_0, \\ b\arcsin x, \text{ \textit{если} } x > x_0. \end{cases}$$

Решение. Запишем условия непрерывности и дифференцируемости для функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\begin{cases} \left(x^2+a\right)\big|_{x=0,5} = b\arcsin x|_{x=0,5}, \\ 2x|_{x=0,5} = \left.\dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0,5}, \end{cases} \iff \begin{cases} 0,25+a = b\dfrac{\pi}{6}, \\ 1 = \dfrac{2b}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Отсюда $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = 0,25\cdot\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-1\right)$.

Задача 1.2.4. *Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0 = 1$:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} + 2, \text{ \textit{если} } x \leqslant x_0, \\ \ln x + b, \text{ \textit{если} } x > x_0. \end{cases}$$

Ответ: $a=-1, \quad b=1$.

Задачи для самостоятельного решения.

Подберите параметры a и b так, чтобы функция была непрерывной и дифференцируемой в точке x_0

1.
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \leqslant x_0, \\ \dfrac{a}{x}+b, \text{ если } x > x_0, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

Запишите в ответ $f(2)$.
Ответ: 4.

2.
$$f(x)=\begin{cases} b\sin x, \text{ если } x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, x_0\right], \\ a\operatorname{tg} x + 1, \text{ если } x \in \left[x_0, \dfrac{\pi}{3}\right], \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Запишите в ответ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
Ответ: -1.

3.
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, \text{ если } x \leqslant x_0, \\ e^{3x-3}, \text{ если } x > x_0, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

Запишите в ответ $f(-1)$.
Ответ: 3.

4.
$$f(x)=\begin{cases} a\arcsin x + b, \text{ если } x \leqslant x_0, \\ \arccos x, \text{ если } x > x_0, \end{cases} \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Запишите в ответ $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.

5.
$$f(x)=\begin{cases} be^x, \text{ если } x \leqslant x_0, \\ \ln(x+1)+a, \text{ если } x > x_0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Запишите в ответ $f(e-1) - f(-1)$.
Ответ: $2-\dfrac{1}{e}$.

§ 3. Особенности функции

В этом разделе рассматривается исследование функции на непрерывность и дифференцируемость, а если функция имеет разрыв — анализируется тип точки разрыва.

Будем считать, что функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$.

Определение 1.3.1 *Функция называется непрерывной в точке a, если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 1.3.1 *Для того, чтобы функция была непрерывна в точке a, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

Классификация точек разрыва.

1. Точка устранимого разрыва: существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, но либо $f(x)$ не определена в точке a, либо $f(a) \neq b$.

2. Точка разрыва первого рода: оба односторонних предела существуют, но
$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x).$$

3. Точка разрыва второго рода: в точке a не существует по крайней мере один из односторонних пределов.

Классическим примером точки устранимого разрыва является точка $x = 0$ у функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Хорошо известно, что данная функция имеет предел в точке $x = 0$, равный 1 (первый замечательный предел), однако она не определена в точке $x = 0$. Если доопределить ее, положив $f(0) = 1$, получим непрерывную на всей числовой оси функцию, то есть разрыв будет устранен.

В качестве примера точки разрыва первого рода можно рассмотреть точку $x = 0$ у функции $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. В данном случае существуют оба односторонних предела

$$\lim_{x \to -0} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \to +0} f(x) = 0,$$

которые не равны друг другу.

Примерами точки разрыва второго рода будет точка $x = 0$ у функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (не существуют оба односторонних предела) и точка $x = 0$ у функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (не существует предел справа, предел слева существует и равен нулю).

Пример 1.3.1. *Исследуйте функцию на непрерывность и дифференцируемость, определите тип точек разрыва, если они имеются:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{4x^2-4x-3}, & \text{если } x < 2, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Решение. Можно утверждать, что эта функция непрерывна и дифференцируема во всех точках, кроме, быть может, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ и $x = 2$. Эти точки требуют отдельного исследования. Точка $x = 0$ не будет точкой разрыва, так как $f(x) = \frac{1}{x}$ только при $x \geqslant 2$.

В точке $x = \frac{3}{2}$ функция не определена, однако $\lim\limits_{x\to 3/2} f(x)$ существует и равен $0,25$, следовательно, это точка устранимого разрыва.

В точке $x = -\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to -1/2} f(x) = \infty$, следовательно, это точка разрыва второго рода.

В точке $x = 2$ $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 0,2$, а $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 0,5$, то есть оба предела существуют, но не равны между собой. Это точка разрыва первого рода.

Задача 1.3.2. *Определите тип точек разрыва функции:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}, & \text{если } x < 1, \\ \ln x, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$ — точка устранимого разрыва; $x = 1$ — точка разрыва 1 рода; $x = -2$ — точка разрыва 2 рода.

Пример 1.3.3. *Исследуйте функцию*

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \sin \dfrac{3}{x-2}, & \text{если } x \neq 2, \\ 0, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

на непрерывность и дифференцируемость в точке $x = 2$.

Решение. Исследуем функцию на непрерывность:

$$\lim_{x\to 2} (x-2)^2 \sin \frac{3}{x-2} = 0,$$

так как бесконечно малая функция $(x-2)^2$ умножается на ограниченную $\sin\dfrac{3}{x-2}$.

Так как функция одной переменной дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда существует производная в этой точке [1], то исследование на дифференцируемость сводится к проверке наличия производной в точке $x=2$:

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x-2)^2\sin\dfrac{3}{2+\Delta x-2}}{\Delta x}=0,$$

значит, функция дифференцируема в точке $x=2$.

Задача 1.3.4. *Исследуйте функцию*

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & \textit{при } x\neq 1,\\ 0, \ \textit{при } x=1.\end{cases}$$

на непрерывность и дифференцируемость в точке $x=1$.

Ответ: функция непрерывна, но не дифференцируема.

Задачи для самостоятельного решения.

Исследуйте функции на непрерывность и дифференцируемость и установите характер точек разрыва

1.
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}, & -1\leqslant x<0,\\ |2x-1|, & 0\leqslant x<3,\\ x^2+1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

Ответ: $x=0$ — точка разрыва второго рода, $x=3$ — точка разрыва первого рода, в точке $x=\dfrac{1}{2}$ функция непрерывна, но не дифференцируема; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

2.
$$f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x\leqslant -3,\\ -x^3-20, & -3<x\leqslant 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$$

Ответ: в $x=-3$ функция непрерывна, но не дифференцируема; точка $x=0$ — точка разрыва первого рода; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

3.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x}, & x < 1, \\ x^2 - x + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$ — точка устранимого разрыва; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

4.
$$f(x) = \begin{cases} x^{-0,5} \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$ — точка разрыва второго рода; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

5.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$ — точка устранимого разрыва; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

6.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^3}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$ — точка разрыва второго рода; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

7.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{x}{2} + 1, & x < 0, \\ \sqrt{1-x}\,, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Ответ: в точке $x = 1$ функция непрерывна, но не дифференцируема; в остальных точках области определения функция непрерывна и дифференцируема.

§ 4. Вычисление n-ной производной

Основные формулы.

$$(f(ax))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax);$$

$$(f(x+b))^{(n)} = f^{(n)}(x+b).$$

Формула Лейбница:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Формулу Лейбница удобно применять, если у одной из функций отличны от нуля только производные до m-го порядка.

Производные n-ного порядка от функций x^m, $m \in \mathbb{N}$; $\sin x$; $\cos x$; $\ln x$.

1. $(x^m)^{(n)} = \begin{cases} n(n-1)...(n-m+1)x^{n-m}, \ m < n, \\ n!, \ m = n, \\ 0, \ n > m. \end{cases}$
2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.
3. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.
4. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n}$.

Эти формулы можно получить, дифференцируя функцию несколько раз и находя закономерность. Далее полученный результат следует обосновать методом математической индукции.

Получим последнюю формулу. Действительно,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\ln x)'' = (-1)\cdot\frac{1}{x^2}; \quad (\ln x)''' = (1\cdot 2)\cdot\frac{1}{x^3}; \ ...$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)!\frac{1}{x^n}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ формула верна. Пусть она верна для $n = k$:

$$(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{1}{x^k},$$

тогда

$$(\ln x)^{(k+1)} = \left((\ln x)^{(k)}\right)' = \left((-1)^{k+1}(k-1)!\frac{1}{x^k}\right)' =$$

$$= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)\frac{1}{x^{k+1}} = (-1)^{k+2}k!\frac{1}{x^{k+1}},$$

что соответствует формуле для производной $(k+1)$-го порядка функции $\ln x$. Следовательно, формула для производной $(\ln x)^{(n)}$ верна.

Пример 1.4.1. *Найдите производную тридцатого порядка функции* $\ln(2x+1)$ *в точке* $x = 0,5$.

Решение. Воспользуемся формулой для n-ной производной функции $y = \ln x$, учитывая, что при каждом дифференцировании будет появляться множитель 2:

$$\big(\ln(2x+1)\big)^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{2^n}{(2x+1)^n}.$$

При $n = 30$ в точке $x = 0,5$ имеем

$$\big(\ln(2x+1)\big)^{(30)}\Big|_{x=0,5} = (-1)^{30+1}\cdot(30-1)!\cdot\frac{2^{30}}{(2x+1)^{30}}\Big|_{x=0,5} = -29!$$

Возможен вариант решения:

$$\big(\ln(2x+1)\big)^{(n)} = \big(\ln(x+0,5)+\ln 2\big)^{(n)} = \big(\ln(x+0,5)\big)^{(n)} =$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{1}{(x+0,5)^n}.$$

В точке $x = 0,5$ производная, естественно, равна тому же числу $-29!$

Задача 1.4.2. *Найдите производную семнадцатого порядка функции* $y(x) = \cos 3x$ *в точке* $x = \frac{\pi}{6}$.

Совет. Не стоит дифференцировать эту функцию семнадцать раз, лучше воспользоваться формулой, даже если ее придется вывести. С другой стороны, можно воспользоваться тем фактом, что для $\sin x$ и $\cos x$ четвертая производная равна самой функции (тогда 17-я производная любой из этих функций совпадает с первой производной, так как остаток от деления 17 на 4 равен единице).

Ответ: -3^{17}.

Пример 1.4.3. *Найдите производную двадцатого порядка функции* $y(x)=\left(x^2+5x\right)\cdot e^{x+2}$ *в точке* $x=-1$.
Решение. Воспользуемся формулой Лейбница, так как уже третья и все последующие производные первого множителя обратятся в нуль.

$$y^{(n)}(x)=\left(x^2+5x\right)\cdot\left(e^{x+2}\right)^{(n)}+n\cdot(2x+5)\cdot\left(e^{x+2}\right)^{(n-1)}+\\+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\left(e^{x+2}\right)^{(n-2)}.$$

Так как $\left(e^{x+2}\right)^{(n)}=e^{x+2}$, то

$$y^{(20)}(x)\Big|_{x=-1}=e\cdot[(1-5)+20(-2+5)+190\cdot 2]=436e.$$

Задача 1.4.4. *Найдите производную десятого порядка функции* $y(x)=\left(x^2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)\sin x$ *в точке* $x=\dfrac{\pi}{2}$.
Ответ: 90.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 1.4.5. *Найдите производную двадцатого порядка функции* $y(x)=\left(4x^3+2x^2-5\right)\sin 2x$ *в точке* $x=1$.
Решение. Воспользуемся формулой Лейбница, так как уже четвертая производная первого множителя обратится в нуль:

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x)&=(\sin 2x)^{(n)}\cdot\left(4x^3+2x^2-5\right)+\\&+C_n^1\cdot(\sin 2x)^{(n-1)}\cdot\left(4x^3+2x^2-5\right)'+\\&+C_n^2\cdot(\sin 2x)^{(n-2)}\cdot\left(4x^3+2x^2-5\right)''+\\&+C_n^3\cdot(\sin 2x)^{(n-3)}\cdot\left(4x^3+2x^2-5\right)'''=\\&=\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)2^n\cdot\left(4x^3+2x^2-5\right)+\\&+n\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)2^{n-1}\cdot\left(12x^2+4x\right)+\\&+\frac{n(n-1)}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)2^{n-2}\cdot(24x+4)+\\&+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sin\left(2x+\frac{\pi(n-3)}{2}\right)2^{n-3}\cdot 24.\end{aligned}$$

Выражение выглядит громоздким, но оно дает возможность проверить правильность вычисления производных. Теперь подставим в полученное выражение для n-ной производной значения $n = 20$ и $x = 1$. Тогда

$$y^{(20)}(x)\Big|_{x=1} = \sin 2 \cdot 2^{20} \cdot 1 + 20 \sin\left(2 + \frac{19\pi}{2}\right) \cdot 2^{19} \cdot 16 +$$
$$+190 \cdot \sin(2 + 9\pi) \cdot 2^{18} \cdot 28 + 1140 \cdot \sin\left(2 + \frac{17\pi}{2}\right) \cdot 2^{17} \cdot 24 =$$
$$= 2^{20}\left(3260 \cos 2 - 1329 \sin 2\right).$$

Задача 1.4.6. *Найдите производную десятого порядка функции $y(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right) e^{3x}$ в точке $x = -2$.*
Ответ: $7 \cdot 3^9 \cdot e^{-6}$.

Задачи для самостоятельного решения.
Найдите производную функции указанного порядка n.

1. $f(x) = \left(x^3 + x^2 + x + 1\right) e^x, \quad n = 10.$
   Ответ: $\left(x^3 + 31x^2 + 291x + 821\right) e^x$.
2. $f(x) = \ln(x^2 + x), \quad n = 10$ в точке $x = 1$.
   Ответ: $-9! \cdot \left(1 + \dfrac{1}{1024}\right)$.
3. $f(x) = (1 - x^2) \sin 2x, \quad n = 20.$
   Ответ: $2^{20}\left[(1 - x^2)\sin 2x + 20x \cos 2x + 95 \sin 2x\right]$.
4. $f(x) = \left(\dfrac{3}{\pi}x + 2\right) \cos x, \quad n = 13$ в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$.
   Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{39}{\pi} - \dfrac{11}{4}\right)$.
5. $f(x) = \sin x \cdot e^{3x}, \quad n = 4.$
   Ответ: $\left(\sin x \cdot 3^4 + 4\cos x \cdot 3^3 - 6 \sin x \cdot 3^2 - 4 \cos x \cdot 3 + \sin x\right) e^{3x}$.

§ 5. Дифференциалы

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется линейная функция аргумента Δx: $dy = f'(x_0)\Delta x$. Для независимой переменной $dx = \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$. Таким образом, $dy = f'(x)dx$ в произвольной точке x. Дифференциал k-ого порядка определяется по рекуррентной формуле $d^k f(x) = d\left(d^{k-1} f(x)\right)$ при условии, что все предыдущие дифференциалы являются функциями только переменной x (dx рассматривается как постоянный множитель), приращение независимой переменной dx при вычислении второго и последующих дифференциалов берется тем же самым, что и при вычислении первого дифференциала.

Пример 1.5.1. *Вычислите* $df(x)$, $d^2f(x)$, $d^3f(x)$ *для функции* $\sin\sqrt{x}$ *в точке* $x_0=\dfrac{\pi^2}{4}$.

Решение. Найдем поочередно первый, второй и третий дифференциалы функции:

$$df(x)=f'(x)dx=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx;$$

$$d^2f(x)=d(df(x))=d\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx\right)=\left(\frac{-\sin\sqrt{x}}{4x}-\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x^3}}\right)dx^2;$$

$$d^3f(x)=d(d^2f(x))=d\left(\left(\frac{-\sin\sqrt{x}}{4x}-\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x^3}}\right)dx^2\right)=$$

$$=\left(-\frac{\cos\sqrt{x}}{8\sqrt{x^3}}+\frac{\sin\sqrt{x}}{4x^2}+\frac{\sin\sqrt{x}}{8x^2}+\frac{3\cos\sqrt{x}}{8\sqrt{x^5}}\right)dx^3=$$

$$=\left(-\frac{\cos\sqrt{x}}{8\sqrt{x^3}}+\frac{3\sin\sqrt{x}}{8x^2}+\frac{3\cos\sqrt{x}}{8\sqrt{x^5}}\right)dx^3.$$

В точке $x_0=\dfrac{\pi^2}{4}$ дифференциалы соответственно равны:

$$df(x)=0;\ d^2f(x)=-\frac{1}{\pi^2}dx^2;\ d^3f(x)=\frac{6}{\pi^4}dx^3.$$

Задача 1.5.2. *Вычислите* $df(x)$, $d^2f(x)$ *для функции* $f(x)=\arccos x$ *в точке* $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $df(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}dx$; $d^2f(x)=-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}dx^2$.

Пример 1.5.3. *Вычислите, округлив до четырех знаков после запятой*

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-df(x)|_{x_0}-\frac{1}{2}d^2f(x)\Big|_{x_0}$$

в данной точке x_0 *при данных значениях* Δx *и* $f(x_0+\Delta x)$, *если* x *— независимая переменная. Рассмотрите*

$$f(x)=\sin\sqrt{x}\,,\ x_0=\frac{\pi^2}{4},\ \Delta x=\frac{\pi}{10},\ f(x_0+\Delta x)=0,9953.$$

Решение. Дифференциалы этой функции были найдены выше. Подставляя их и заданные в условии задачи величины в искомое выражение, имеем

$$0,9953 - 1 - 0 + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0,0003.$$

Задача 1.5.4. *Вычислите, округлив до четырех знаков после запятой*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - df(x)|_{x_0} - \frac{1}{2}d^2 f(x)\Big|_{x_0}$$

в данной точке x_0 при данных значениях Δx и $f(x_0 + \Delta x)$, если x — независимая переменная. Рассмотрите

$$f(x) = \arccos x,\ x_0 = \frac{1}{2},\ \Delta x = 0,2,\ f(x_0 + \Delta x) = 0,7954,$$

число π возьмите равным $3,1416$.
Ответ: $-0,0363$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите дифференциал функции указанного порядка n: $f(x) = \cos\left(x^3\right)$, $n = 3$.
   Ответ: $d^3 f = \left[-54x^3\cos\left(x^3\right) + \left(27x^6 - 6\right)\sin\left(x^3\right)\right] dx^3$.
2. Найдите дифференциал функции указанного порядка n: $f(x) = \ln(x^2 - x - 2), n = 5$ в точке $x = 3$, если $dx = \dfrac{1}{2}$.
   Ответ: $24\left(\dfrac{1}{2^5} + \dfrac{1}{2^{15}}\right)$.
3. Найдите дифференциал функции указанного порядка n: $f(x) = \sin(3x)$, $n = 24$, в точке $x = \dfrac{\pi}{6}$, если $dx = \dfrac{1}{3}$.
   Ответ: 1.
4. Найдите $d^3 u - d^2 u \cdot dx$, если $u(x) = e^{x^2}$.
   Ответ: $e^{x^2}\left(8x^3 - 4x^2 + 12x - 2\right) dx^3$.
5. Вычислите, округлив до 5 знаков после запятой:

   $$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - df(x)|_{x_0} - \frac{1}{2}d^2 f(x)\Big|_{x_0}$$

   в точке x_0, если $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$, $f(x_0 + \Delta x) = -0,2954$, π возьмите равным $3,1416$.
   Ответ: $0,0031$.

Глава 2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Замена переменной в интеграле

При вычислении интегралов наиболее распространены задачи, основанные на замене переменной интегрирования. Одним из приемов вычисления интегралов с помощью замены переменной является тождественное преобразование подынтегрального выражения с выделением дифференциала новой переменной интегрирования. Приведем несколько равенств, которые помогают это сделать.

1. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right);$
2. $x^2dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right);$
3. $\sin xdx = -d\cos x;$
4. $\cos xdx = d\sin x;$
5. $x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}\,d\left(x^2+a^2\right);$
6. $\frac{dx}{x} = d\ln x;$
7. $\frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}d\ln\left(x^2+a^2\right);$
8. $\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = d\left(\sqrt{x^2+a^2}\right).$

При выделении дифференциала новой переменной в определенном интеграле нужно следить за тем, чтобы функция перехода от старой переменной к новой была непрерывной на промежутке, по которому производится интегрирование.

Также здесь и далее нам понадобится формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ — любая первообразная $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Эта формула справедлива для кусочно непрерывных функций

$f(x)$, при этом требуется,чтобы $F(x)$ была непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в точках непрерывности $f(x)$.

Пример 2.1.1. *Найдите* $3\int\limits_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}\,dx.$

Решение. Сначала найдем совокупность всех первообразных подынтегральной функции (неопределенный интеграл):

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+4}\ d\left(x^2+4\right) = \frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Далее воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$3\int\limits_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}\,dx = 3\left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right) = 19.$$

Задача 2.1.2. *Найдите* $2\int\limits_0^{\sqrt{e}} \frac{x}{x^2+e}dx.$

Ответ: $\ln 2$.

Пример 2.1.3. *Найдите* $36\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx.$

Решение. Сначала найдем совокупность всех первообразных подынтегральной функции (неопределенный интеграл):

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg}^3 x\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

Далее воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$36\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \frac{36}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 = \frac{\pi^4}{9}.$$

Задача 2.1.4. *Найдите* $12\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Ответ: $\pi^{1,5}$.

Пример 2.1.5. *Найдите* $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(24\sin^2 x\cos x - 4\sin 2x\right) dx.$

Сначала найдем совокупность всех первообразных подынтегральной функции (неопределенный интеграл):

$$\int \left(24\sin^2 x\cos x - 4\sin 2x\right) dx = \int \left(24\sin^2 x\cos x - 8\sin x\cos x\right) dx =$$

$$= \int \left(24\sin^2 x - 8\sin x\right) d(\sin x) = 8\sin^3 x - 4\sin^2 x + C.$$

Далее воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(12\sin^2 x\cos x - 4\sin 2x\right) dx = 8 - 4 - \left(-8\cdot\frac{1}{8} - 4\cdot\frac{1}{4}\right) = 6.$$

Задача 2.1.6. *Найдите* $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin 2x - 3\sin^3 x\right) dx.$

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите интеграл.

1. $\int \dfrac{x^2 dx}{x^2+16}.$

   Ответ: $x - 4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{4} + C.$

2. $\int\limits_0^1 \dfrac{x^5 - x + 1}{x^2+1} dx.$

   Ответ: $\dfrac{\pi - 1}{4}.$

3. $\int \dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$

   Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x+1} + C.$

4. $\int \dfrac{x^3 dx}{\cos^2\left(x^4\right)}.$

   Ответ: $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{tg}\left(x^4\right) + C.$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$
Ответ: $e - 1$.

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}\, \cos^2 x}.$
Ответ: $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$.

7. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx}{\cos^2 x}.$
Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

8. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx.$
Ответ: $\ln 2$.

9. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}.$
Ответ: $\dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{e^x}{2} + C$.

10. а) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}.$
Ответ: $0,5 - \ln 5$.
б) $\displaystyle\int\limits_{-2}^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}.$
Ответ: 0.

11. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}.$
Ответ: $-e^{\frac{1}{x}} + C$.

12. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x + 5)}{x} dx.$
Ответ: $\sin(\ln x + 5) + C$.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$
Ответ: $2\sqrt{\ln x} + C$.

14. $\int \frac{6x+5}{x^2+4}dx$.

Ответ: $3\ln\left(x^2+4\right)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

§ 2. Интегрирование по частям

Напомним формулы интегрирования по частям для неопределенного и определенного интеграла (условия их применимости приведены в [1]):

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx;$$

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Рассмотрим три типа интегралов, для которых удобно применять интегрирование по частям.

I. Интегралы от функций вида $P_n(x)\cdot f(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен порядка n, функция $f(x)$ — одна из функций $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, e^{kx} $(k\neq 0)$. Здесь $u(x)=P_n(x)$, $v'(x)=f(x)$. Однократное интегрирование по частям приводит к понижению степени многочлена на единицу в подынтегральном выражении, причем функция $v(x)$ оказывается одного с $f(x)$ типа. Повторное интегрирование по частям позволяет довести степень многочлена до нулевой, что и упрощает исходный интеграл.

Пример 2.2.1. *Найдите*

$$I_1=\int(3x+2)\cos x dx,\ \ I_2=\int\limits_0^\pi(3x+2)\cos x dx.$$

Решение. Многочлен, входящий в подынтегральную функцию, является многочленом первой степени, поэтому достаточно применить интегрирование по частям один раз.

$$I_1=\int(3x+2)\cos x dx=(3x+2)\sin x-\int 3\sin x dx= \\ =(3x+2)\sin x+3\cos x+C.$$

$$I_2=\int\limits_0^\pi(3x+2)\cos x dx=(3x+2)\sin x\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi 3\sin x dx=-6.$$

Задача 2.2.2. *Найдите*

$$I_1 = \int (2x+1)e^x dx, \ \ I_2 = \int\limits_{-1}^{1} (2x+1)e^x dx.$$

Ответ: $I_1 = (2x-1)e^x + C$; $I_2 = 4e$.

Пример 2.2.3. *Найдите*

$$I_1 = \int \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} dx, \ \ I_2 = \int\limits_{0}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} dx.$$

Решение. Многочлен, входящий в подынтегральную функцию, является многочленом второй степени, поэтому интегрирование по частям придется применить два раза.

$$I_1 = \int \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} dx = \frac{\left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x}}{0,5} - \int \frac{(2x-2)e^{0,5x}}{0,5} dx =$$

$$= 2\left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} - \left(4(x-1)\frac{e^{0,5x}}{0,5} - 4\int \frac{e^{0,5x}}{0,5} dx\right) =$$

$$= 2\left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} - 8(x-1)e^{0,5x} + 16e^{0,5x} + C =$$

$$= e^{0,5x}\left(x^2 - 10x + 27\right) + C.$$

При вычислении определенных интегралов удобнее при каждом интегрировании выполнять подстановку пределов для выражения $u(x) \cdot v(x)\big|_a^b$, но в данном случае первообразная уже найдена, поэтому просто воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$I_2 = \int\limits_{0}^{2} \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x} dx = e^{0,5x}\left(x^2 - 10x + 27\right)\Big|_0^2 = 11e - 27.$$

Задача 2.2.4. *Найдите*

$$I_1 = \int \left(2x^2 - x + 1\right) \cos 2x dx, \ \ I_2 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2x^2 - x + 1\right) \cos 2x dx.$$

Ответ: $I_1 = \dfrac{\left(2x^2 - x + 1\right) \sin 2x}{2} + \dfrac{(4x-1)\cos 2x}{4} - \dfrac{\sin 2x}{2} + C$;
$I_2 = \dfrac{1-\pi}{2}$.

Пример 2.2.5. *Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x}$, причем $F(0) = 27$. Найдите $F(2)$.*
РЕШЕНИЕ. Совокупность первообразных функции $\left(x^2 - 2x + 3\right) e^{0,5x}$ найдена выше, а из условия $F(0) = 27$ можно найти константу C. Действительно,

$$F(0) = e^{0,5x} \left(x^2 - 10x + 27\right)\Big|_{x=0} + C = 27,$$

следовательно, $C = 0$. Отсюда $F(2) = 11e$.
Задача 2.2.6. *Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right) \cos 2x$, причем $F(0) = 0$. Найдите $F(\pi)$.*
Ответ: π.

II. Интегралы от функций $g(x)f(x)$, где $g(x)$ — одна из функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$, а $f(x)$ — многочлен.

Здесь $u(x) = g(x)$, $v'(x) = f(x)$. Интегрирование по частям позволяет привести исходный интеграл к интегралу от отношения многочленов (в случае $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$) или от отношения многочлена и квадратичной иррациональности (в случае $\arcsin x$ и $\arccos x$).
Пример 2.2.7. *Найдите*

$$I_1 = \int \arccos 2x dx, \;\; I_2 = \int\limits_{-0,25}^{0,25} \arccos 2x dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$I_1 = \int \arccos 2x dx = x \arccos 2x + \int \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx =$$

$$= x \arccos 2x + \int \frac{d\left(1 - 4x^2\right)}{(-4)\sqrt{1 - 4x^2}} = x \arccos 2x - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2} + C.$$

$$I_2 = \int\limits_{-0,25}^{0,25} \arccos 2x dx = \left(x \arccos 2x - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2}\right)\Bigg|_{-0,25}^{0,25} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 2.2.8. *Найдите $I_1 = \int 2x \operatorname{arctg} x dx$, $I_2 = \int\limits_0^1 2x \operatorname{arctg} x dx$.*

Ответ: $I_1 = \left(x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x - x + C$; $I_2 = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Пример 2.2.9. *Пусть* $F(x)$ *— одна из первообразных функции* $f(x) = x\ln^2 x$, *причем* $F(1) = \dfrac{-e^2+1}{4}$. *Найдите* $F(e)$.

Решение. Найдем первообразную функции $x\ln^2 x$ двукратным интегрированием по частям:

$$\int x\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\frac{2\ln x}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \frac{x^2}{4} + C.$$

Из условия $F(1) = \dfrac{-e^2+1}{4}$ можно найти константу C. Действительно,

$$F(1) = \left(\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{x=1} + C = \frac{1}{4} + C,$$

следовательно, $C = -\dfrac{e^2}{4}$. Далее нетрудно вычислить, что $F(e) = 0$.

III. Интегралы от функций

$$e^{ax}\sin bx;\ e^{ax}\cos bx;\ \sin(k\ln x);\ \cos(k\ln x),\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ k \neq 0.$$

Эти интегралы берутся с помощью двукратного интегрирования по частям, причем не важно, какую функцию принять за $u(x)$, а какую за $v(x)$. Рассмотрим неопределенный интеграл от первой из приведенных функций, остальные вычисляются аналогично.

$$I = \int e^{ax}\sin bx dx = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \int ae^{ax}\frac{\cos bx}{b}dx =$$
$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b^2}\int ae^{ax}\sin bx dx.$$

Последний интеграл в цепочке равенств есть искомый интеграл I. Таким образом, мы получаем уравнение для искомой величины I:

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I \Longleftrightarrow$$
$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Замечание 2.2.1 *Появление константы C в последнем равенстве может выглядеть неожиданно с точки зрения алгебры. Приведенные уравнения вполне корректны, если считать I переменной типа «множество всех функций, отличающихся на константу». Арифметические действия для таких переменных (сложение, вычитание, умножение на ненулевую константу, добавление функции) производятся поэлементно, а роль нулевой переменной играет множество всех констант (умножение всякой переменной на ноль по определению дает нулевую переменную) — последнее и приводит после аккуратных преобразований к появлению константы в ответе.*

Подводя итог, отметим, что интегралы этого типа берутся двукратным интегрированием по частям, после чего получается уравнение относительно искомого интеграла.

Пример 2.2.10. *Найдите*

$$I_1 = \int \sin(\pi \ln x) dx, \;\; I_2 = \left(1+\pi^2\right) \int\limits_1^e \sin(\pi \ln x) dx.$$

Решение.

$$I_1 = \int \sin(\pi \ln x) dx = x \sin(\pi \ln x) - \int x \cos(\pi \ln x) \frac{\pi dx}{x} =$$

$$= x \sin(\pi \ln x) - \pi x \cos(\pi \ln x) + \pi \int \frac{-\pi x \sin(\pi \ln x)}{x} dx,$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{x \sin(\pi \ln x) - \pi x \cos(\pi \ln x)}{1+\pi^2}.$$

$$I_2 = \left(1+\pi^2\right) \int\limits_1^e \sin(\pi \ln x) dx =$$

$$= \left(1+\pi^2\right) \frac{x \sin(\pi \ln x) - \pi x \cos(\pi \ln x)}{1+\pi^2} \Bigg|_1^e = \pi(e+1).$$

Задача 2.2.11. *Найдите*

$$I_1 = \int e^{2x} \cos \pi x dx, \;\; I_2 = \left(4+\pi^2\right) \int\limits_0^1 e^{2x} \cos \pi x dx.$$

Ответ: $I_1 = \dfrac{e^{2x}(\pi \sin \pi x + 2 \cos \pi x)}{4+\pi^2} + C$, $I_2 = -2\left(e^2+1\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите неопределенный интеграл

1. $\int x^2 \ln x dx.$

Ответ: $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$

2. $\int (x+1)\ln(x+1)dx.$

Ответ: $\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C.$

3. $\int\limits_0^{e-1} (x+1)\ln(x+1)dx.$

Ответ: $\frac{e^2+1}{4}.$

4. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

Ответ: $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$

5. $\int \arccos x dx.$

Ответ: $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

6. $\int\limits_{1/2}^{1} \arccos x dx.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$

7. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$

Ответ: $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right) + C.$

8. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

Ответ: $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

Ответ: $\frac{\pi - 2\ln 2}{4}.$

10. $\int x^2 \sin x dx.$

Ответ: $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

11. $\int \left(x^4 + x^2 + 1\right) e^x dx.$

Ответ: $e^x \left(x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 26x + 27\right) + C.$

12. $\int\limits_0^1 \left(x^4 + x^2 + 1\right) e^x dx.$

Ответ: $11e - 27.$

§ 3. Интегрирование рациональных функций

При интегрировании рациональной функции — отношения двух многочленов $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — удобно представить подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей.

Пусть многочлен в знаменателе имеет два действительных корня x_1, x_2 кратности k_1, k_2 соответственно и комплексные корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ кратности k_3. Напомним формулу представления правильной рациональной дроби в виде суммы для данного случая

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}(x^2+px+q)^{k_3}} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_{k_3}x+N_{k_3}}{(x^2+px+q)^{k_3}}.$$

Коэффициенты A_{k_1} и B_{k_2} удобно искать методом вычеркивания: они получаются вычеркиванием $x - x_j$ из знаменателя исходной рациональной дроби с последующей подстановкой $x = x_j$ в получившуюся дробь. При большем количестве корней у многочлена в знаменателе формула строится аналогично.

Каждое из полученных слагаемых несложно интегрируется в элементарных функциях.

Нам понадобится интеграл $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, где $p - \dfrac{q^2}{4} < 0$:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx =$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{\frac{M}{2}\cdot 2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)+N-M\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx =\\ &= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-M\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Нет необходимости запоминать эту общую формулу, проще выполнять указанные преобразования в каждом конкретном случае.

Пример 2.3.1. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$.

Решение. Сначала найдем неопределенный интеграл от функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$, а потом воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы дробей:

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}.$$

Оба корня простые, поэтому коэффициенты A и B удобно найти методом вычеркивания:

$$A=\left.\frac{1}{\cancel{x}(x+2)}\right|_{x=0}=\frac{1}{2};\quad B=\left.\frac{1}{x\cancel{(x+2)}}\right|_{x=-2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x}=\int\frac{dx}{2x}-\int\frac{dx}{2(x+2)}=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C.$$

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2+2x}=\left.\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}\right|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Задача 2.3.2. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-x}$.

Ответ: $\ln\dfrac{4}{3}$.

Пример 2.3.3. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+2x^2}$.

Решение. Сначала найдем неопределенный интеграл от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2}$, а потом воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница.

$$\frac{1}{x^3+2x^2} = \frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+2}.$$

Коэффициенты A_2 и B можно найти методом вычеркивания:

$$A_2 = \left.\frac{1}{\cancel{x^2}(x+2)}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}; \quad B = \left.\frac{1}{x^2\cancel{(x+2)}}\right|_{x=-2} = \frac{1}{4}.$$

Для того, чтобы найти A_1, удобно привести дроби к общему знаменателю и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства:

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{x^3+x^2} \iff$$
$$\frac{1}{2}(x+2) + A_1\left(x^2+2x\right) + \frac{1}{4}x^2 = 1.$$

Отсюда $A_1 = -\dfrac{1}{4}$. Все коэффициенты найдены, тогда

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2} = -\int \frac{dx}{4x} + \int \frac{dx}{2x^2} + \int \frac{dx}{4(x+2)} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C.$$

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+2x^2} = -\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln 4 - \left(0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3\right) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2}{3} + 1\right).$$

Задача 2.3.4. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Ответ: $\ln\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}$.

Пример 2.3.5. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{2x\,dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Квадратный трехчлен в знаменателе имеет комплексные корни, поэтому преобразуем как указано выше в (2.3.1). Сначала рассмотрим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2xdx}{x^2+2x+2} = \int \frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{2t-2}{t^2+1}dt =$$

$$= \int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln\left(t^2+1\right) - 2\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = x+1$. Так как переменная t изменяется от 0 до 1, то

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{2xdx}{x^2+2x+2} = \left(\ln\left(t^2+1\right) - 2\operatorname{arctg} t + C\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Задача 2.3.6. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x+2}{x^2+4x+5}dx.$

Ответ: $\ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 2.3.7. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2xdx}{\left(x^2-x+2\right)(x-2)}.$

Решение. Отметим, что первый из множителей в знаменателе имеет комплексные корни. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух простых дробей

$$\frac{2x}{(x^2-x+2)(x-2)} = \frac{Mx+N}{x^2-x+2} + \frac{A}{x-2},$$

причем коэффициент A можно найти методом вычеркивания:

$$A = \frac{2x}{\left(x^2-x+2\right)\cancel{(x-2)}}\Bigg|_{x=2} = 1.$$

Тогда

$$\frac{2x}{\left(x^2-x+2\right)(x-2)} = \frac{Mx+N}{x^2-x+2} + \frac{1}{x-2} \Longleftrightarrow$$
$$2x = (Mx+N)(x-2) + x^2 - x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2 и при x^0 в правой и левой частях последнего равенства, получаем $M = -1,\ N = 1$. Следовательно,

$$\int \frac{2x dx}{(x^2 - x + 2)(x - 2)} = \int \frac{-x + 1}{x^2 - x + 2} dx + \int \frac{dx}{x - 2}.$$

Найдем первый интеграл, следуя описанному выше способу:

$$\int \frac{-x+1}{x^2 - x + 2} dx = -\int \frac{x - 1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dx = -\int \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{7}{4}} dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{7}{4}\right)}{t^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + C,$$

где $t = x - \dfrac{1}{2}$. Тогда после подстановки пределов интегрирования $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$ получаем

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x dx}{(x^2 - x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{8}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Задача 2.3.8. *Найдите* $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{10 - 3x}{x^3 - 6x^2 + 10x} dx.$

Ответ: $\ln \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Если под интегралом стоит неправильная дробь (старшая степень числителя больше или равна старшей степени знаменателя), то из такой дроби следует выделить целую часть. Далее интегрируется многочлен и оставшаяся правильная дробь.

Пример 2.3.9. *Найдите интеграл* $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{x^2 + x + 2}.$

Решение. Поскольку старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, дробь является неправильной. Выделим из дроби под интегралом целую часть:

$$\frac{x^3}{x^2+x+2} = \frac{x^3+x^2+2x-\left(x^2+2x\right)}{x^2+x+2} = x - \frac{x^2+x+2+x-2}{x^2+x+2} = \\ = x - 1 + \frac{x-2}{x^2+x+2}.$$

Последняя дробь уже является правильной, ее проинтегрируем как показано выше. Итак,

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+x+2} = \int (x-1)dx + \int \frac{(x-2)dx}{x^2+x+2} = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\int \frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right]}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+2\right| - \frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}\,(2x+1)}{4} + C.$$

Задача 2.3.10. *Найдите интеграл* $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2-9x+20}$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + 9x + 125\ln|x-5| - 64\ln|x-4| + C$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите интеграл.

1. $\displaystyle\int\limits_3^8 \frac{xdx}{(x-2)(x+3)}$.

   Ответ: $\dfrac{3\ln 11 - \ln 6}{5}$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9x+20}$.

   Ответ: $\ln\left|\dfrac{x-5}{x-4}\right| + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-9x+20}$.

   Ответ: $15\ln|x-5| + 13\ln|x-4| + C$.

4. $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^2-9x+20}$.

   Ответ: $x + 21\ln|x-5| + 13\ln|x-4| + C$.

5. $\displaystyle\int\limits_{4}^{5} \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$

Ответ: $\displaystyle\bigl(-6\ln|x-2| + 2\ln|x-3| + \ln|x|\bigr)\Big|_4^5 = 6\ln\frac{2}{3}.$

6. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx.$

Ответ: $\ln|x| + \ln\left|x^2 + 4x + 5\right| - 3\operatorname{arctg}(x+2) + C.$

7. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx.$

Ответ: $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 3\right)\Big|_{-1}^{0} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$

8. $\displaystyle\int\limits_{5/2}^{7/2} \frac{8x}{8x - 4x^2 - 3} dx.$

Ответ: $\displaystyle\left(-3\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + 4\ln\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)\Big|_{5/2}^{7/2} = 4\ln 3 - 7\ln 2.$

9. $\displaystyle\int \ln\left(x^2 + x + 1\right) dx.$

Ответ: $\displaystyle\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2 + x + 1\right) - 2x + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

§ 4. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим два типа интегралов с иррациональными выражениями (предполагается, что все подынтегральные функции определены в рассматриваемой области интегрирования).

I. Интегралы содержащие дробно-линейную иррациональность:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

II. Простейшие интегралы, содержащие квадратичную иррациональность:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$$

Здесь выражение $R(x, y)$ обозначает рациональную функцию двух переменных x и y [1].

В случае I замена переменной $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ сводит интеграл от иррациональной функции переменной x к интегралу от рациональной функции переменной t:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \Longrightarrow x = \frac{b - t^n d}{ct^n - a},$$

откуда нетрудно найти dx.

Пример 2.4.1. *Найдите интеграл* $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+1}$.

Решение. Пусть $t = \sqrt{x+2}$, тогда $x = t^2 - 2, \quad dx = 2tdt$. Отсюда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+1} = 2\int \frac{t^3-2t}{t+1}dt = 2\int \left(t^2 - t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right] + C =$$
$$= \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} - x - 2 - 2\sqrt{x+2} + 2\ln\left|\sqrt{x+2}+1\right| + C.$$

Задача 2.4.2. *Найдите интеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Ответ: $2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$.

Пример 2.4.3. *Найдите интегралы*

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-1}dx; \quad \int\limits_0^{\frac{1}{64}} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-1}dx.$$

Решение. Сначала преобразуем неопределенный интеграл. Введем новую переменную так, чтобы подынтегральная функция стала рациональной дробью. Возьмем для этого $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $x = t^6$; $dx = 6t^5dt$; $\sqrt[3]{x} = t^2$; $\sqrt{x} = t^3$.

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-1}dx = 6\int \frac{t^3+2}{t^2-1}t^5dt.$$

Выделим целую часть дроби $\dfrac{t^8+2t^5}{t^2-1}$. Для удобства разделим t^8 и t^5 на t^2-1 по отдельности (можно это делать «уголком»):

$$\frac{t^8}{t^2-1}=t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1};$$

$$\frac{t^5}{t^2-1}=t\frac{t^4-1}{t^2-1}=t\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right).$$

Тогда после подстановки полученных разложений в подынтегральную функцию получаем:

$$6\int\frac{t^3+2}{t^2-1}t^5dt=6\int\left(t^6+t^4+2t^3+t^2+2t+1+\frac{2t}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}+t^2+t+\ln\left|t^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\right)+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$. Отсюда определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{64}}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-1}dx=\frac{4159}{13440}-\ln 12.$$

Задача 2.4.4. *Найдите интеграл*

$$\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^3}-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+$ $+C$.

В случае II можно использовать универсальные подстановки Эйлера [1], но они, как правило, приводят к громоздким подынтегральным выражениям. Рассмотрим примеры, в которых можно обойтись без этих подстановок.

Пример 2.4.5. *Найдите интегралы*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}};\qquad \int\limits_{-2}^{-2+2\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Решение. В данном примере простая замена переменной $t = x + 2$ сведет интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = \\ = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

Для второго интеграла применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{-2}^{-2+2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \\ = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|\Bigg|_{-2}^{-2+2\sqrt{2}} = \ln\left(2\sqrt{2}+3\right).$$

Задача 2.4.6. *Найдите интегралы*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-4x}}; \quad \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\frac{\sqrt{3}-2}{4}} \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-4x}}.$$

Совет. Вычтите и прибавьте единицу в подкоренном выражении и введите переменную $t = 2x+1$.
Ответ: $0,5\arcsin(2x+1)+C$; $\dfrac{\pi}{12}$.

Пример 2.4.7. *Найдите интегралы*

$$\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{2-\sin^2 2x+\cos 2x}}; \quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{2-\sin^2 2x+\cos 2x}}.$$

Решение. Сначала преобразуем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{2-\sin^2 2x+\cos 2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2-1+\cos^2 2x+\cos 2x}} = \\ = \frac{1}{4}\int \frac{-d(\cos 2x)}{\sqrt{1+\cos^2 2x+\cos 2x}} = \\ = -\frac{1}{4}\ln\left(\cos 2x+0,5+\sqrt{1+\cos 2x+\cos^2 2x}\right) + \mathrm{C}.$$

Отсюда определенный интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{2 - \sin^2 2x + \cos 2x}} = \frac{\ln 3}{4}.$$

Задача 2.4.8. *Найдите интегралы*

$$\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x + 2^{x+1} + 2}}; \quad \int\limits_0^1 \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x + 2^{x+1} + 2}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\ln 2} \ln\left(2^x + 1 + \sqrt{4^x + 2^{x+1} + 2}\right)$; $\dfrac{1}{\ln 2} \ln \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найдите интеграл.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5 + x)\sqrt{1 + x}}$.

   Ответ: $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{2} + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

   Ответ: $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x} + 4\right)\sqrt{x}}$.

   Ответ: $6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$.

4. $\displaystyle\int \frac{(x - 3)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}$.

   Ответ: $\sqrt{x^2 - 6x + 1} + C$.

Глава 3

ОБРАЗЦЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = (\cos x)^{\cos 2x}$ в точке $x_0 = \pi/6$.
A. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ **B.** $\sqrt{6}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)$ **C.** $\sqrt{6}\ln 2$ **D.** $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 - \ln\sqrt{2}\right)$ **E.** $\sqrt{2}$

2. Подберите коэффициенты a и b так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ ax^2 + b, & \text{если } x \geqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

была дифференцируема в точке $x = \frac{\pi}{4}$. В ответе запишите $f(\pi) - 1$.
A. $-\frac{15\pi}{4}$ **B.** $\frac{17\pi}{4}$ **C.** 4π **D.** $\frac{15\pi}{4}$ **E.** 0

3. Выберите верное утверждение: Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{\sin(2x+6)}, & x \neq -3, \\ 1, x = -3. \end{cases}$$

в точке $x = -3$
A. Имеет устранимый разрыв.
B. Имеет разрыв первого рода.
C. Имеет разрыв второго рода.
D. Дифференцируема.
E. Непрерывна, но не дифференцируема.

4. Найдите значение выражения для

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - df(x)\Big|_{x_0} - \frac{1}{2}d^2 f(x)\Big|_{x_0},$$

округлив до четырех знаков после запятой, если

$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$; $x_0 = 0$; $\Delta x = 0,2$; $f(x_0+\Delta x) = 0,0392$.

A. $-0,0002$ **B.** $0,0052$ **C.** $-0,0008$ **D.** $-0,0012$ **E.** $0,0005$

5. Найдите производную n-ого порядка функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f(x) = (5x-3)\cos(\pi x); \quad n = 10, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

A. $\dfrac{\pi^{10}}{2}$ **B.** $-\dfrac{\pi^{10}}{2}$ **C.** $5\pi^9$ **D.** $50\pi^9$ **E.** $-50\pi^9$

6. Найдите $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$.

A. $\dfrac{2}{5}\left(\sqrt[5]{2}-1\right)$ **B.** $\dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$ **C.** $\dfrac{2}{5}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)$

D. $\dfrac{5}{2}\left(1+\sqrt[5]{2}\right)$ **E.** $\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}-1\right)$

7. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x) = (2x-1)\cos 3x$, причем $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1-\pi}{3}$. Найдите $F(\pi)$.

A. $\pi - \dfrac{2}{9}$ **B.** $\dfrac{3\pi-5}{9}$ **C.** $-\dfrac{5}{9}$ **D.** $-\dfrac{2}{9}$ **E.** $\dfrac{3\pi+2}{9}$

8. Найдите $\displaystyle\int\limits_{3}^{4} \frac{(x+2)dx}{(x+6)(x-2)}$.

A. $\ln\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\ln\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ **D.** $\ln\dfrac{5}{6}$ **E.** $\ln\dfrac{10}{3}$

9. Найдите $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

A. $\ln\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\ln 6$ **D.** $\dfrac{\pi}{6}$ **E.** $\ln\dfrac{3}{2}$

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x) = x^{\log_2 x}$ в точке $x = 2$.
A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **E.** $\ln 2$

2. Подберите коэффициенты a и $b > 0$ так, чтобы функция
$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{если } x < \sqrt{e}\,, \\ \ln(bx), & \text{если } x \geqslant \sqrt{e} \end{cases}$$
была дифференцируема в точке $x = \sqrt{e}$. В ответе запишите $f\left(-\sqrt{e}\right) - f(e)$.
A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $-\dfrac{3}{2}$ **C.** $\sqrt{e} - \dfrac{1}{2}$ **D.** $-\dfrac{e}{2}$ **E.** $-\dfrac{1}{2}$

3. Выберите верное утверждение: Функция
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$
в точке $x = 1$
A. Имеет устранимый разрыв.
B. Имеет разрыв первого рода.
C. Имеет разрыв второго рода.
D. Дифференцируема.
E. Непрерывна, но не дифференцируема.

4. Найдите значение выражения для
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - df(x)\Big|_{x_0} - \frac{1}{2} d^2 f(x)\Big|_{x_0},$$
округлив до четырех знаков после запятой, если
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}\,; \quad x_0 = -1; \quad \Delta x = 0,2;$$
$$f(x_0 + \Delta x) = 0,9165.$$
A. $-0,0022$ **B.** $0,0005$ **C.** $-0,0005$ **D.** $0,0008$ **E.** $0,0015$

5. Найдите производную n-ого порядка функции $f(x)$ в точке x_0:
$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) e^{-x}; \quad n = 11, \quad x_0 = 0.$$
A. 11 **B.** -100 **C.** -11 **D.** 1 **E.** 100

6. Найдите $\int\limits_1^e x^{-1} \ln^3 x dx$.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 4 **D.** 3 **E.** $4e$

7. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x) = 3x^2 \operatorname{arctg} x$, причем $F(0) = \frac{1}{2}$. Найдите $F(1)$.

A. $\frac{\pi - \ln 2}{4}$ **B.** $\frac{\pi + 2\ln 2 - 2}{4}$ **C.** $\frac{\pi - 2}{4}$ **D.** $\frac{\pi + 2\ln 2}{4}$ **E.** $\frac{\pi}{4}$

8. Найдите $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2x - x^2 - 2}$.

A. $-\pi$ **B.** $\ln \frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $-\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$ **E.** $-\ln 2$

9. Найдите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\sin^2 x + 2\cos x - 1}}$.

A. $\ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{3\pi}{10}$ **E.** $\ln \frac{4}{3}$

Ключи к вариантам

Вариант 1: 1-B, 2-D, 3-A, 4-C, 5-E, 6-B, 7-D, 8-A, 9-E

Вариант 2: 1-A, 2-E, 3-D, 4-E, 5-B, 6-A, 7-D, 8-C, 9-B

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин Математический анализ в вопросах и задачах. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. В.Ф. Бутузов. Лекции по математическому анализу. Часть 1. М.: Физический ф-т МГУ. 2012.
3. В.Ф. Бутузов, А.А. Быков, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина. Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу. (I семестр). М.: Физический ф-т МГУ. 2010.
4. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы Математического анализа. Ч. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2002.
6. И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. М.: Высш. шк., 2000.