Глава 2. Простейшие детерминированные модели

При изучении различных физических явлений и процессов математическими методами во многих случаях удается получить дифференциальное уравнение, решение которого характеризует исследуемый процесс. Как правило, это дифференциальные уравнения в частных производных, причем в большинстве случаев второго порядка. Такие уравнения подразделяются на три основные группы, описывающие качественно различные физические процессы. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные процессы. Уравнения параболического типа описывают процессы переноса тепла и вещества. Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, которые не зависят от времени.

Дифференциальные уравнения выполняются внутри (или снаружи) области, в которой ищется решение. Для выделения решения, описывающего изучаемое явление или процесс, необходимо к уравнению добавить некоторые дополнительные условия.

1. Начальные и граничные условия. Условия сопряжения

Дифференциальные уравнения с обыкновенными, а тем более частными производными имеют бесконечное множество решений. Для однозначного определения процесса кроме уравнения необходимо задать еще некоторые дополнительные условия.

Определение. Математическая задача поставлена корректно (по Адамару), если:

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственно;

3) решение задачи устойчиво (то есть непрерывно зависит от входных данных).

Задавая дополнительные условия, нужно помнить, что эти условия должны обеспечивать существование решения (задача не должна быть переопределенной) и единственность решения (задача не должна быть недоопределенной). Желательно также, чтобы выполнялось и условие устойчивости решения (что бывает далеко не всегда).

Рассмотрим основные типы дополнительных условий.

1) **Начальные условия.** Определяют состояние системы в некоторый выделенный момент времени, который считается «начальным» (обычно берут t=0). В случае уравнений гиперболического типа, содержащих вторую производную по времени, нужно задать два начальных условия, которые накладываются на функцию решения и ее первую производную по времени.

Уравнения параболического типа содержат первую производную по времени, поэтому для него ставится одно начальное условие, накладываемое на решение. Решение уравнения эллиптического типа не зависит от времени, потому для него начальное условие не ставится.

2) **Граничные (краевые) условия.** Определяют состояние решения на границе области, в которой ищется решение. Рассмотрим линейные граничные условия. Если, например, изучается процесс колебания струны, то ее концы могут быть закреплены (условие Дирихле), быть свободными (условие Неймана) или быть упруго закрепленными (условие Робена). Граничные условия могут быть более сложными, например, содержать производные по времени. Нелинейные граничные условия оказываются еще более сложными.

Возможны предельные случаи граничных условий. Пусть точка (M,t), в которой ищется решение, расположена «далеко» от границы в том смысле, что возмущение, вышедшее из это точки, за промежуток времени $0<t<T$ в силу конечности скорости распространения возмущения не успевает дойти до границы, то есть в точке (M,t), где $0< t < T$, «граница не чувствуется».

В этом случае приходим к задаче во всем пространстве. Возможен также вариант, когда одни границы «чувствуются», а другие «не чувствуются», в частности, можно получить внешнюю краевую задачу. Во всех этих случаях для обеспечения единственности решения внешних краевых задач необходимо поставить дополнительные **условия на бесконечности**, что порой является весьма непростым делом.

Отметим, что задача в неограниченной области с условиями на бесконечности обычно **называется задачей Коши или начальной задачей**.

3) **Условия сопряжения**. Если коэффициенты уравнения кусочно-непрерывные функции (например, когда характеристики среды, заполняющей область D, в которой ищется решение, кусочно-непрерывны), то в точках разрыва (первого рода) коэффициентов ставятся условия сопряжения. Например, в задаче о распространении тепла в точке разрыва ставятся два условия сопряжения: непрерывность температуры и непрерывность потоков тепла, при условии отсутствия тепловых источников на границе (если на границе раздела сред есть источник тепла, то разность тепловых потоков равна мощности этого источника).

2. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

1) Малые продольные колебания упругого стержня

Рассмотрим стержень, расположенный в положении равновесия вдоль оси Оx от точки x=0 до точки $x=l$.

Введем следующие обозначения.

1) Мы будем рассматривать продольные колебания, при которых все точки одного сечения испытывают одно и то же отклонение. В этом случае каждое сечение можно описывать одной координатой. Для описания процесса колебания стержня можно воспользоваться переменными Эйлера или переменными Лагранжа. В переменных Эйлера каждая физическая точка стержня в разные моменты времени характеризуется координатой $X(t)$. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x, которую эта точка имела в положении равновесия.

Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент времени находится в точке с координатой $X(t)=x+u(x, t)$, где X – переменная Эйлера. Связь между переменными Лагранжа и Эйлера имеет вид: $x=X-U(X,t)$.

2) Мы будем предполагать, что в пределах сечения свойства стержня постоянны и обозначим линейную плотность стержня как $\rho(x)$.

3) Малыми мы будем называть такие продольные колебания стержня, при которых натяжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука: $F(x,t) = k(x)\varepsilon(x,t)$, где $k(x)$ - коэффициент упругости, $\varepsilon(x,t)$ - относительное удлинение:

$$\varepsilon(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)'}{\Delta x},$$

F

$$(\Delta x)' = \{x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)\} - \{x + u(x,t)\} - \Delta x = u(x + \Delta x, t) - u(x,t) \ -$$

абсолютное удлинение, откуда относительное удлинение равно:

$$\varepsilon(x,t) = u_x(x,t).$$

4) Через $f(x,t)$ обозначим плотность продольной внешней силы , приложенной к стержню.

Будем применять следующее **правило знаков: силу, с которой часть стержня, расположенная правее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную левее данного сечения, будем учитывать со знаком плюс, а силу, с которой часть стержня, расположенная левее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную правее данного сечения, будем учитывать со знаком минус,** Для вывода уравнения о малых продольных колебаниях упругого стержня **воспользуемся теоремой об изменении количества движения**: изменение количества движения выделенного участка Δx стержня за время Δt равно импульсу действующих на него сил:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho(\xi)\big(u_t(\xi,t+\Delta t)\big)-u_t(\xi,t)\big)d\xi =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} \{k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,\tau)-k(x)u_x(x,\tau)\}d\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi,\tau)d\xi$$

В дальнейшем будем предполагать, что все входящие в последнюю формулу функции обладают достаточной гладкостью: функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по *x* и *t*, функция $k(x)$ непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x)$ и $f(x,t)$ непрерывны.

Воспользуемся формулой среднего значения:

$$\rho\left(\overline{x}\right)\left(u_t\left(\overline{x},t+\Delta t\right)-u_t\left(\overline{x},t\right)\right)\Delta x=$$

$$=\left(k\left(x+\Delta x\right)u_x\left(x+\Delta x,\overline{t}\right)-k\left(x\right)u_x\left(x,\overline{t}\right)\right)\Delta t+f\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{t}}\right)\Delta x\Delta t,$$

где $\overline{x},\ \overline{\overline{x}}\in\left[x,x+\Delta x\right],\ \ \overline{t},\ \overline{\overline{t}}\in\left[t,t+\Delta t\right].$

Поделив на $\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x\to 0,\ \Delta t\to 0,$ получим одномерное уравнение колебаний на конечном отрезке:

$$\rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right)=\left(k\left(x\right)u_x\left(x,t\right)\right)_x+f\left(x,t\right).$$

Если стержень однородный ($k(x)=k_0,\ \rho(x)=\rho_0$), то уравнение колебаний примет вид:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+F(x,t),$$

где

$$F(x,t)=\frac{1}{\rho_0}f(x,t),\quad a^2=\frac{k_0}{\rho_0}.$$

Построенное уравнение для малых продольных колебаний упругого стержня является уравнением гиперболического типа.

Поставим начально-краевую задачу, моделирующую процесс малых продольных колебаний упругого стержня.

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}(x,t) = \left(k(x)u_x(x,t)\right)_x + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Модель включает в себя уравнение колебаний, которое выполняется в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, два начальных условия и два граничных условия первого рода (условия Дирихле) на левом и правом концах стержня.

Данная модель является детерминированной дифференциальной математической моделью.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u\,(x,t)$ в уравнение приводит его к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимым условием существование классического решения поставленной начально-краевой задачи является **условие согласования начальных и граничных условий:**

$$\varphi(0)=0,\ \ \varphi(l)=0,\ \ \psi(0)=0,\ \ \psi(l)=0.$$

2) Различные виды граничных условий

Рассмотрим более подробно постановку различных типов линейных граничных условий на примере начально-краевой задачи, моделирующей процесс малых продольных колебаний упругого стержня длины l. Для определенности будем рассматривать левый конец стержня

$x = 0.$

а) Граничные условия первого рода – граничные условия Дирихле. С физической точки зрения левый конец стержня может находиться в различных условиях: он может быть жестко закреплен (стержень заделан в стену) или же двигаться по определенному закону (стержень жестко прикреплен к плите, совершающей заданное движение). Математически это условие записывается так

$$u(0,t) = \mu(t), t \in [0,\infty),$$

где $\mu(t)$ – заданная функция.

При $\mu = 0$ получается однородное условие Дирихле, а при $\mu \neq 0$ – неоднородное условие Дирихле.

б) Граничные условия второго рода – граничные условия Неймана. Если задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x = 0$ стержня и действующей в продольном направлении, то, используя закон Гука, граничный режим на этом конце можно записать следующим образом ($k(x)$ – коэффициент упругости стержня):

$$k(0)u_x(0,t) = f(t)$$

или

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \in [0, \infty),$$

где $\nu(t) = \frac{1}{k(0)} f(t)$ – заданная функция. При $\nu = 0$ получается однородное условие Неймана, а при $\nu \neq 0$ – неоднородное условие Неймана. Однородное условие Неймана означает, что левый конец стержня свободен, к нему не приложена сила (условие свободного конца).

в) Граничные условия третьего рода – граничные условия Робена. Предположим, что левый конец стержня закреплен упруго, например, с помощью пружины, коэффициент жесткости которой равен α. Согласно закону Гука, сила упругости, которая стремится вернуть левый конец стержня в положение равновесия, пропорциональна смещению $u(0,t)$.

Граничный режим можно записать следующим образом:

$$k(0)u_x(0,t) = \alpha u(0,t)$$

или

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty),$$

где $h = \alpha / k(0)$. Построенное граничное условие называется однородным граничным условием третьего рода, или однородным граничным условием Робена.

На левом конце стержня можно задать комбинацию упругого закрепления и смещения. Стержень с помощью пружин может быть прикреплен к плите, которая перемещается параллельно стержню по некоторому закону, определенному функцией $\nu(t)$. В этом случае получается граничное условие следующего вида

$$k(0)u_x(0,t) = \alpha(u(0,t) - \nu(t))$$

или

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty),$$

где $\mu(t) = -h\nu(t), \quad h = \dfrac{\alpha}{k(0)}.$ Построенное условие называется граничным неоднородным условием третьего рода или граничным неоднородным условием Робена.

г) Более сложные виды граничных условий. Физическая постановка задачи может приводить к более сложным граничным условиям, в частности, нелинейным.

а) Нелинейные граничные условия возникают, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука. Если натяжение на левом конце стержня является нелинейной функцией смещения $u(0,t)$, то граничное условие примет вид

$$u_x(0,t)=\frac{1}{k(0)}\mathbf{P}\left[u(0,t)\right],$$

где $\mathbf{P}\left[u(0,t)\right]$ определяет упругую силу, приложенную к левому концу стержня и действующую в продольном направлению. Например,

$$u_x(0,t)=\frac{1}{k(0)}u^2(0,t).$$

В граничное условие могут входить производные функции по времени. Например, если левый конец стержня испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения, граничное условие записывается в виде

$$k(0)u_x(0,t)=\alpha u_t(0,t),\quad t\in[0,\infty).$$

где α - коэффициент сопротивления среды.

Граничные условия могут содержать производные порядков выше первого. Пусть упругий стержень расположен вертикально и верхний его конец закреплен неподвижно – заделан в потолок. К нижнему концу стержня прикреплен массивный абсолютно недеформируемый груз *M,* который находится на площадке и не растягивает и не сжимает стержень. В начальный момент времени $t=0$ площадку убирают. Предположим, что масса стержня m много меньше масс груза *M*. Будем пренебрегать действием силы тяжести на стержень.

Направим ось x вдоль стержня, так что верхний конец имеет абсциссу $x = 0$. Тогда на верхнем конце стержня граничным условием будет однородное условие Дирихле

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty),$$

а граничное условие на нижнем конце имеет вид

$$mu_{tt}(l,t) = -k(l)u_x(l,t) + Mg,$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

3) Малые поперечные колебания упругой струны

Пусть в состоянии равновесия струна длины l расположена вдоль оси x и занимает положение от точки $x=0$ до точки $x=l$. Рассматриваются малые поперечные колебания струны, причем перемещения струны расположены в одной плоскости. Процесс колебания струны можно описать с помощью функции $u(x,t)$, представляющей собой поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t.

Струна рассматривается как гибкая нить, не оказывающая сопротивление изгибу, но оказывающая сопротивление растяжению.

Возникающие в рассматривающем случае в струне напряжения направлены по касательной к ее мгновенному профилю.

Так как рассматриваются малые колебания, то возникающие в струне напряжения определяются законом Гука.

В силу малости колебаний будем учитывать только члены первого порядка $(u_x^2(x,t) \ll 1)$.

Подсчитаем удлинение участка струны $(x, x+\Delta x)$ в момент времени t. Длина дуги этого участка равна

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\, dx \cong \Delta x.$$

Следовательно, в пределах принятой точности удлинения участка струны в процессе колебаний не происходит.

В силу закона Гука величина натяжения T в каждой точке не изменяется со временем.

Проекция натяжения на оси x и u при учете членов только первого порядка малости равны

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \cong T(x),$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \cong T(x)tg\alpha = T(x)u_x,$$

где α - угол между касательной к кривой $u(x,t)$ при фиксированном значении t и осью x.

,

Так как учитываются только поперечные колебания, то следует учитывать силы инерции и внешние силы, направленные лишь вдоль оси u. Поэтому сумма проекций сил, действующих на выделенный участок струны $(x, x+\Delta x)$ вдоль оси x, равна $T_x(x)-T_x(x+\Delta x)=0.$

Учитывая, что $T_x \cong T(x)$, получаем, что $T(x)=T(x+\Delta x).$

В силу произвольности точки x натяжение не зависит от x, то есть $T(x)=T_0.$

Как и в случае малых продольных колебаний упругого стержня, для вывода уравнения, описывающего малые поперечных колебания упругой струны, воспользуемся вторым законом Ньютона - законом изменения количества движения: изменение количества движения равно импульсу действующих на выделенный участок сил.

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны, а через $f(x,t)$ плотность поперечной внешней силы, приложенной к струне.

Второй закон Ньютона для участка $(x, x+\Delta x)$ струны выглядит следующим образом:

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \rho(\xi)\big(u_t(\xi,t+\Delta t)-u_t(\xi,t)\big)d\xi =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} T_0\big(u_x(x+\Delta x,\tau)-u_x(x,\tau)\big)d\tau + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} d\xi \int\limits_{t}^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\tau.$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x)$, $f(x,t)$ непрерывны при $x\in(0,l), t\in(0,\infty)$.   .

Воспользовавшись формулой среднего значения, поделив результат на произведение $\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0,$ получим дифференциальное уравнение:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t)=T_0u_{xx}(x,t)+f(x,t).$$

Если плотность струны постоянна $\rho(x)=\rho_0$, то уравнение принимает вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t),$$

где $a^2=\dfrac{T_0}{\rho_0}, F=\dfrac{1}{\rho_0}f.$

Полученные уравнения описывают малые поперечные колебания упругой струны и являются простейшим примером уравнения колебаний.

Для получения детерминированной дифференциальной модели, описывающей малые поперечные колебания упругой струны, к полученному уравнению необходимо добавить начальные и граничные условия.

Начально-краевая дифференциальная детерминированная модель имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f\left(x,t\right), \quad x \in \left(0,l\right), \quad t \in (0,\infty), \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad x \in \left[0,l\right], \\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \; x \in \left[0,l\right], \\ \alpha_1 u_x\left(0,t\right) + \beta_1 u\left(0,t\right) = \mu_1\left(t\right), \quad t \in \left[0,\infty\right), \\ \alpha_2 u_x\left(l,t\right) + \beta_2 u\left(l,t\right) = \mu_2\left(t\right), \quad t \in \left[0,\infty\right), \end{cases}$$

$$\left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0, i = 1,2.$$

Последнее условие означает, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \left(i = 1,2\right)$ не могут обращаться в ноль одновременно.

Начальные условия задают в начальный момент $t=0$ профиль струны и скорость всех ее точек.

Граничные условия зависят от способов закрепления концов струны. Эти условия могут быть линейными и нелинейными, содержать производные по координате и по времени высших порядков. В линейном случае рассматривают граничные условия первого рода (условия Дирихле), условия второго рода (условия Неймана), условия третьего рода (условия Робена).

В общем случае для левого конца струны граничные условия имеют вид:

$$\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=\mu_1(t).$$

При $\alpha_1=0, \beta_1\neq 0$ получается граничное условие Дирихле, при $\alpha_1\neq 0, \beta_1=0$ - граничное условие Неймана, при $\alpha_1\neq 0, \beta_1\neq 0$ - граничное условие Робена.

В общем случае (при $\alpha_i\neq 0,\ \beta_i\neq 0,\ i=1,2$) классическое решение определяется так:

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$,
   один раз непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,
2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u(x,t)$ в уравнение приводит к тождеству),
3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начальных и граничного условий:**

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} + \beta_1 \varphi(0) = \mu(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} + \beta_2 \varphi(l) = \mu(0),$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi(0)}{\partial x} + \beta_1 \psi(0) = \mu_t(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \psi(l)}{\partial x} + \beta_2 \psi(l) = \mu_t(0).$$

4) Малые поперечные колебания мембраны

Рассмотрим пример уравнения, описывающего процесс колебаний в случае двух пространственных переменных.

Мембраной называется натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу или сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению.

При определенных условиях плоскую пластину, у которой толщина много меньше поперечных размеров, можно рассматривать как мембрану.

Уравнение, описывающее малые поперечные колебания мембраны, получается аналогично тому, как было получено уравнение малых поперечных колебаний упругой струны.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости z=0 декартовой прямоугольной системы координат.

Введем следующие обозначения:

$u(x, y, t)-$ величина поперечного смещения точки $M(x, y)$мембраны в момент времени t;

$\rho(x, y)-$ поверхностная плотность мембраны;

T_0- натяжение;

$f(x, y, t)-$ плотность импульса внешней поперечной силы, действующий на мембрану в точке $M(x, y)$ в момент t.

Будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, при которых смещение происходит перпендикулярно плоскости мембраны (x, y) и при которых можно пренебречь квадратами величин u_x, u_y.

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны будет иметь следующий вид:

$$\rho(x,y)u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t),$$

где $f(x,y,t)-$ заданная функция.

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область G плоскости (x,y), которая ограничена контуром Г.

Как и в одномерном случае, для корректной постановки задачи необходимо задать два начальных условия и граничные условия.

Если граница Г мембраны движется заданным образом в плоскости (x,y), то получаем граничное условие первого рода (граничное условие Дирихле):

$$u(x,y,t) = \mu(x,y,t),\ (x,y) \in \Gamma,\ t \in [0,\infty),$$

Условие закрепленной границы мембраны имеет вид

$$u(x,y,t)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty).$$

Если к границе приложена заданная сила, то получаем граничное условие второго рода (граничное условие Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ \ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к контуру Г, лежащей в плоскости (x,y):

$\frac{\partial u}{\partial\ n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,$ $\cos\alpha,\cos\beta$ – направляющие косинусы нормали: $n=\{\cos\alpha,\cos\beta\}.$

При $\mu(x,y,t)=0$ получаем условие свободной границы:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=0,\ \ (x,y)\in\Gamma,\ \ t[0,\infty).$$

Если граница мембраны закреплена упруго и при этом движется по заданному закону в плоскости (x, y), то граничным условием является граничное условие третьего рода (граничное условие Робена):

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)+\beta(x,y)u(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ – заданные на контуре Γ функции.

В зависимости от реальных физических задач граничные условия могут быть и более сложного вида, в частности, нелинейные и содержащие производные по координатам более высокого порядка, а также производные по времени.

Начально-краевая задача, описывающая процесс малых поперечных колебаний мембраны, ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in G, \ t \in \left[0, \infty\right), \\ u\left(x, y, 0\right) = \varphi\left(x, y\right), \ u_t\left(x, y, 0\right) = \psi\left(x, y\right), \ \left(x, y\right) \in \overline{G}, \\ \alpha\left(x, y\right)\dfrac{\partial u}{\partial n}\left(x, y, t\right) + \beta\left(x, y\right) u\left(x, y, t\right) = \mu\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in \Gamma, \ t \in \left[0, \infty\right). \end{cases}$$

5) Уравнения Максвелла

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной изотропной среде. Будем использовать систему СИ, в которой уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}, \\ rot\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ div\mathbf{D} = \rho, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{j}$ – плотность тока проводимости, $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$ -плотность сторонних токов, ρ - объемная плотность зарядов.

К восьми скалярным уравнениям добавим материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H},$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon -$ абсолютная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} 10^{-9} \mathit{Ф} / \mathit{м}$ - электрическая постоянная, $\mu_a = \mu_0 \mu -$абсолютная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \mathit{Г} / \mathit{м} -$ магнитная постоянная.

Плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ связана с вектором $\mathbf{E}$,уравнением, выражающим закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$ где $\varepsilon -$ проводимость среды.

Поскольку по предположению среда является однородной и изотропной, то величины $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ являются постоянными скалярными величинами.

Первое уравнение Максвелла $rot\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(ст)}$ является количественным выражением следующего положения: переменное во времени электрическое поле взывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с объемной плотностью $\mathbf{j}_c = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, где $\mathbf{j}_c$ - плотность тока смещения.

Второе уравнение Максвелла $rot\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ является обобщенным выражением закона Фарадея в дифференциальной форме: изменение во времени магнитного поля в токе М приводит к появлению в той же точке электромагнитного поля, изменяющегося в пространстве.

Закон электромагнитной индукции Фарадея: при изменении магнитного поля, проходящего через замкнутый проводник, в последнем возникает э.д.с., пропорциональная скорости изменения потока. Всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.

Третье уравнение Максвелла $div\mathbf{D} = \rho$ является следствием экспериментально установленного закона Кулона и показывает, что источником электрического поля являются электрические заряды. Это есть дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Теорема Гаусса: поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Четвертое уравнение Максвелла $div\mathbf{B} = 0$ показывает, что магнитное поле имеет вихревой характер и силовые линии вектора магнитной индукции всегда замкнутые.

Подействуем на правую и левую части первого уравнения Максвелла оператором rot и учтем формулу

$$rot\ rot\mathbf{H} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

В результате получим:

$$rot\ rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} + \sigma rot\mathbf{E} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

Учитывая, что $rot\mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и $div\mathbf{H} = 0$, получим векторное уравнение колебаний:

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{H} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)}$$

В декартовой прямоугольной системе координат данное уравнение можно записать покомпонентно, причем для каждой компоненты $H_x,\ H_y,\ H_z$ получается скалярное волновое уравнение вида $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f\left(M, t\right),$ где

$\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon_a},\quad a^2 = \frac{1}{\varepsilon_a \mu_a},\quad \alpha -$ коэффициент затухания, a - скорость электромагнитных волн.

6) **Телеграфные уравнения**

Рассмотрим прохождение тока по проводу с распределенными параметрами. Введем обозначения:

i – сила тока; v –напряжение; R – сопротивление, рассчитанное . на единицу длины; L – коэффициент самоиндукции, рассчитанный на единицу длины; C - коэффициент ёмкости, рассчитанный на единицу длины; G-коэффициент утечки, рассчитанный на единицу длины.

Применим закон Ома к участку провода длиной dx: падение напряжения на элементе провода длиной dx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x dx = iRdx + i_t Ldx.$$

Количество электричества, притекающего на элемент провода *dx* за время *dt*:

$$\left[i\left(x,t\right) - i\left(x+dx,t\right)\right]dt = -i_x dxdt$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента *dx*, и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C\left[v\left(x,t+dt\right)-v\left(x,t\right)\right]dx+Gdxvdt=\left(Cv_t+Gv\right)dxdt,$$

причем величина потерь считается пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из полученных формул следует **система телеграфных уравнений:**

$$\begin{cases} i_x+Cv_t+Gv=0, \\ v_x+Li_t+Ri=0. \end{cases}$$

Замечание. Полученные телеграфные уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку **они не учитывают электромагнитные колебания в среде окружающем провод.**

Получим из системы телеграфных уравнений одно уравнение относительно тока *i*, предполагая, что все введенные коэффициенты являются постоянными, то есть провод однородный.

Продифференцируем первое из телеграфных уравнений по *x* $i_{xx} + Cv_{tx} + Gv_x = 0,$

а второе уравнение умножим на С и продифференцируем по *t*: $Cv_{xt} + CLi_{tt} + Ri_t = 0.$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Подставив в полученное уравнение $v_x = -Li_t - Ri,$, получим уравнение для силы тока:

$$i_{xx} = CLi_{tt} + \left(CR + GL\right)i_t + GRi.$$

Аналогично получается уравнение для напряжения (дифференцируем второе уравнение по x. первое умножаем на L, дифференцируем по t и вычитаем из продифференцированного по x второго):

$$v_{xx} = CLv_{tt} + \left(CR + GL\right)v_t + GRv.$$

Уравнения для силы тока и напряжения носят название телеграфных уравнений.

Если можно пренебречь потерями через изоляцию $(G \cong 0)$ и если сопротивление очень мало $(R \cong 0),$ то мы приходим к уравнению колебаний:

$$i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad a = \sqrt{\tfrac{1}{LC}}.$$

Рассмотрим начально-краевые задачи для определения силы и напряжения переменного тока, идущего вдоль тонкого однородного провода с непрерывно распределенными по длине параметрами. Поскольку провод является однородным, то значения параметров R, C, L, G не зависят от того, в какой точке мы эти параметры рассматриваем. Предполагаем, что задан начальный ток $i(x,0)=\varphi(x)$ и начальное напряжение $v(x,0)=F(x)$. Рассмотрим различные виды граничных условий.

а) Левый конец провода заземлен, а к правому приложена э.д.с. $E(t)$:

$$\begin{cases} v_{xx} = CLv_{tt} + (CR+GL)v_t + GRv, \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty), \\ v(x,0) = f(x), \quad v_t(x,0) = \dfrac{-Gf(x)-\varphi'(x)}{C}, \quad x\in(0,l), \\ v(0,t)=0, \quad v(l,t)=E(t), \quad t\in(0,\infty). \end{cases}$$

Замечание. Для получения второго начального условия для функции $v(x,t)$ необходимо воспользоваться вторым уравнением системы телеграфных уравнений, записав

$$v_t(x,0) = \frac{-i_x(x,0) - Gv(x,0)}{C},$$

а также начальными условиями

$$i(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = f(x).$$

При этом, чтобы воспользоваться вторым телеграфным уравнением в точке $t = 0$ нужно предположить, что это уравнение выполняется при $t = 0$. Но в определении классического решения требуется, чтобы уравнение выполнялось только на открытой полупрямой: $t \in (0, \infty)$.

Поэтому мы расширяем понятие рещения, считая, что уравнения выполняются при $t \in [0, \infty)$.

b) Поставить начально-краевую задачу об электрических колебаниях в проводе с пренебрежимо малыми сопротивлением и утечкой, если концы провода заземлены: левый через сосредоточенное сопротивление R_0 , а правый через сосредоточенную ёмкость C_0.

Начально - краевая задача для системы телеграфных уравнений при $R \cong 0, \quad G \cong 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v_x + Li_t = 0, \quad i_x + Cv_t = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l), \\ -v(0,t) = R_0 i(0,t), \quad C_0 v_t(l,t) = i(l,t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Замечание. Граничные условия получаются из соотношения

$$\Delta v = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_0}\int i dt.$$

С помощью данного соотношения определяется падение напряжения при переходе через последовательно включенные сосредоточенные сопротивление R_0, самоиндукцию L_0 и ёмкость C_0. Например, для конца $x=0$ провода имеем $0-v(0,t)=R_0 i(0,t), t\in(0,\infty)$,

где $0-v(0,t)$ означает разность потенциалов земли (принимается равным нулю) и конца провода.

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2 v_{xx}, \quad x\in(0,l), \quad t\in(0,\infty), \quad a^2=\dfrac{1}{CL}, \\ v(x,0)=f(x), \quad v_t(x,0)=-\dfrac{1}{C}\varphi'(x), \quad x\in(0,l), \\ R_0 v_x(0,t)=Lv_t(0,t), \quad LC_0 v_{tt}(l,t)=-v_x(l,t), \quad t\in(0,\infty). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\ i(x,0) = \varphi(x), \quad i_t(x,0) = -\dfrac{1}{L} f'(x), \quad x \in (0,l), \\ i_x(0,t) = CR_0 i_t(0,t), \quad C_0 i_x(l,t) + Ci(l,t) = 0, \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

c) Граничные условия: левый конец провода заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(1)}$, а к правому концу приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(2)}$. Сопротивление и утечка проводов являются пренебрежимо малыми.

Начально-краевая задача для системы телеграфных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} v_x + L i_t = 0, \;\; i_x + C v_t = 0, \;\; x \in (0,l), \;\; t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = f(x), \;\; i(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in (0,l), \\ -v(0,t) = L_0^{(1)} i_t(0,t), \;\; v(l,t) - E(t) = L_0^{(2)} i_t(l,t), \;\; t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\ v(x,0) = f(x), \quad v_t(x,0) = -\dfrac{1}{C}\varphi'(x), \quad x \in (0,l), \\ L_0^{(1)} v_x(0,t) - Lv(0,t) = 0, \quad L_0^{(2)} v_x(l,t) + Lv(l,t) = LE(t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$
\begin{cases}
i_{tt} = a^2 i_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \quad a^2 = \dfrac{1}{CL}, \\
i(x,0) = \varphi(x), \quad i_t(x,0) = -\dfrac{1}{L} f'(x), \quad x \in (0,l), \\
CL_0^{(1)} i_{tt}(0,t) = i_x(0,t), \quad CL_0^{(2)} i_{tt}(l,t) + i_x(l,t) = -CE'(t), \quad t \in (0,\infty).
\end{cases}
$$

d) Граничные условия: оба конца провода заземлены через сосредоточенные сопротивления. Сопротивление и утечка провода не являются пренебрежимо малыми.

Начально-краевая задача для системы телеграфных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Cv_t + Gv = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ -v(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l), \\ -v(0,t) = R_0^{(1)} i(0,t), \quad v(l,t) = R_0^{(2)} i(l,t), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Для напряжения начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} v_{xx} = CLv_{tt} + \left(CR + GL\right)v_t + GRv, \quad x \in \left(0, l\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ v\left(x, 0\right) = f\left(x\right), \quad v_t\left(x, 0\right) = -\dfrac{-Gf\left(x\right) - \varphi'\left(x\right)}{C}, \quad x \in \left(0, l\right), \\ v_x\left(0, t\right) - \dfrac{L}{R_0^{(1)}} v_t\left(0, t\right) - \dfrac{R}{R_0^{(1)}} v\left(0, t\right) = 0, \\ v_x\left(l, t\right) + \dfrac{L}{R_0^{(2)}} v_t\left(L, t\right) + \dfrac{R}{R_0^{(2)}} v\left(L, t\right) = 0, \quad t \in \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

Для тока начально-краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} i_{xx} = CLi_{tt} + \left(CR + GL\right)i_t + GRi, \quad x \in \left(0, l\right), \quad t \in \left(0, \infty\right), \\ i\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \quad i_t\left(x, 0\right) = \dfrac{-R\varphi\left(x\right) - f'\left(x\right)}{L}, \quad x \in \left(0, l\right), \\ i_x\left(0, t\right) - CR_0^{(1)} i_t\left(0, t\right) - GR_0^{(1)} i\left(0, t\right) = 0, \\ i_x\left(l, t\right) + CR_0^{(2)} i_t\left(l, t\right) + GR_0^{(2)} i\left(\mathrm{l}, t\right) = 0, \quad t \in \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

7) Уравнения малых акустических колебаний в сплошной среде

Во многих задачах газодинамики газ можно рассматривать как сплошную среду. При этом, говоря о бесконечно малом объеме, **предполагается, что объем мал по сравнению с характерными размерами системы, но содержит очень большое число молекул.** Когда говорят о движении частицы газа, то имеют в виду не движение отдельной молекулы газа, а смещение элемента объема, содержащего много молекул, но который в газодинамике рассматривается как точка.

Пусть газ движется о скоростью $\mathbf{V}(M,t)=\mathbf{V}(x,y,z,t)$, проекции которой на оси координат обозначим $v_x, v_y, v_{z.}$ Отметим, что $\mathbf{V}(M,t)$ есть скорость газа в данной точке M пространства и времени $\boldsymbol{t}$.

Таким образом скорость $\mathbf{v}(M,t)$ относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам газа, перемещающемся в пространстве.

Вводим: $\rho(M,t)$ плотность газа, $p(M,t)$ - давление, $F(M,t)$ - плотность внешних действующих сил, рассчитанных на единицу массы.

Введенные нами координаты называются координатами Эйлера.

Уравнение движения газа. Выделим элементарный объем газа ΔV с границей ΔS.

Используя формулы Остроградского, равнодействующую сил давления приложенных к поверхности ΔS можно записать следующим образом:

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}d\sigma = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV,$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности ΔV.

Замечание. Формулы Остроградского имеют следующий вид:

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,x)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial x} dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,y)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial y} dV,$$

$$\int_{\Delta S} p\cos(n,z)\,d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Поскольку $p\mathbf{n} = p\cos(n,x)\mathbf{i} + p\cos(n,y)\,\mathbf{j} = p\cos(n,z)\mathbf{k},$ где $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k} -$ единичные векторы ортонормированного базиса, то, умножая первую формулу на вектор **i,** вторую на вектор **j**, а третью на вектор **k** и складывая, получим формулу

$$-\int_{\Delta S} p\mathbf{n}\,d\sigma = -\int_{\Delta V} grad\ p\ dV.$$

Уравнение движения для объема газа ΔV :

$$\int\limits_{\Delta V} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dV = -\int\limits_{\Delta V} grad\ p\ dV + \int\limits_{\Delta V} \rho \mathbf{F} dV.$$

При вычислении ускорения $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ некоторой частицы газа **нужно учесть перемещение самой этой частицы.** Траектории отдельных частиц определяются уравнениями

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \frac{\partial y}{\partial t} = v_y, \frac{\partial z}{\partial t} = v_z,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}.$$

Оператор $\mathbf{V}\nabla$ определяется следующим образом

$$\mathbf{V}\nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Предполагая, что функции, входящие в интегральную формулу, являются достаточно гладкими, применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, стягивая объем в точку, получим **уравнение движения газа форме Эйлера**

$$\mathbf{V}_t + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \mathbf{F}.$$

Уравнение непрерывности. Выражает закон сохранения вещества. Если в выделенном объеме ΔV отсутствуют источники и стоки тепла, то изменение в единицу времени количества газа, заключенного внутри выделенного объема, равно потоку газа через границу:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho dV = -\int_{\Delta S}\rho \mathbf{V}\mathbf{n}d\sigma.$$

Преобразуя правую часть по формуле Остроградского – Гаусса

$$\int_{\Delta S}\rho \mathbf{V}\mathbf{n}d\sigma = \int_{\Delta V} div\left(\rho \mathbf{V}\right)dV,$$

получим

$$\int_{\Delta V}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right)\right)dV = 0.$$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0.$$

Термодинамическое уравнение состояния. В наиболее общем виде имеет вид $p = C\left(\rho\right),$ где $C\left(\rho\right)$ - заданная функция.

В результате получается замкнутая система из пяти скалярных уравнений относительно пяти неизвестных функций $v_x, v_y, v_z, p, \rho -$ **система уравнений газовой динамики**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho} grad\ p, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0, \\ p = C\left(\rho\right). \end{cases}$$

Колебательные движения газа с малыми амплитудами называются **звуковыми волнами**. В каждой точке звуковой волны происходит поперечное сжатие и разрежение газа.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ ней мала, так что в первом уравнении системы можно пренебречь членами второго порядка вида $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ и т.д.

Относительные изменения плотности и давления газа также малы. Положим:

$$p(M,t) = p_0(M) + \overline{p}, \rho(M,t) = \rho_0 + \overline{\rho}, \overline{p} \ll p_0, \overline{\rho} \ll \rho_0.$$

Здесь $p_0(M), \rho_0(M)$ - равновесные значения давления и плотности газа, а величины

$\overline{p}(M,t), \overline{\rho}(M,t)$ - их изменения в звуковой волне.

Величина $\overline{p}(M,t)$ называется **звуковым давлением**.

Линеаризованная система уравнений. Пренебрегая в системе уравнений газодинамики членами второго порядка, получим линеаризованную систему уравнений газодинамики.

Функцию $C(\rho)$ разложим в ряд по степеням ρ и учтем члены первого порядка:

$p_0 + \overline{p} = C(\rho_0) + C'(\rho_0)\overline{\rho}$. Так как $p_0 = C(\rho_0)$, то $\overline{p} = C'(\rho)\overline{\rho}$.

Замкнутая система малых акустических колебаний в сплошной среде имеет вид:

$$
\begin{cases}
\rho_0 \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -grad\ \overline{p} + \rho_0 \mathbf{F}, \\
\dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + div(\rho_0 V) = 0, \\
\overline{p} = C'(\rho)\overline{\rho}.
\end{cases}
$$

Уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}$. Продифференцируем второе уравнение системы по t: $\bar{\rho}_{tt} + div\left(\rho_0 V_t\right) = 0$ и подействуем оператором div на первое уравнение системы: $div\left(\rho_0 \mathbf{V_t}\right) = -div\ grad\ \bar{p} + div\left(\rho_0 \mathbf{F}\right)$.

Из третьего уравнения системы в линейном приближении получим:

$$grad\ \bar{p} = C'\left(\rho_0\right) grad\ \bar{\rho}.$$

Обозначим $k\left(M\right) = C'\left(\rho_0\right),\ f\left(M,t\right) = -div\left(\rho_0 \mathbf{F}\right)$. Тогда из трех последних уравнений получаем уравнение второго порядка относительно функции $\bar{\rho}\left(M,t\right)$:

$$\bar{\rho}_{tt} = div\left(k\left(M\right) grad\,\bar{\rho}\right) + f\left(M,t\right).$$

Это уравнение является уравнением колебаний в трехмерном случае. Оно часто называется **уравнением акустики.**

В случае адиабатического процесса уравнение газового состояния имеет вид: $p = p_0 \left(\dfrac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}$, где постоянная γ - показатель адиабаты, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}, c_p$ - теплоемкость при постоянном давлении, c_V - теплоемкость при постоянном объёме.

Линейное приближение:

$$p = p_0 + \overline{p} = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} \cong p_0 \left(1 + \gamma \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} \right),$$

откуда $\overline{p} = \gamma \dfrac{p_0}{\rho_0} \rho$ и $k(M) = \gamma \dfrac{p_0(M)}{\rho_0(M)}.$

8) Динамика несжимаемой жидкости

Полученная система уравнений газодинамики описывает не только динамику газа, но и движение жидкости, то есть является и **системой уравнений гидродинамики**. Будем рассматривать **идеальную жидкость, то есть жидкость, в которой отсутствуют силы внутренней вязкости**.

В случае однородной среды $\rho = \rho_0 = const$ несжимаемой жидкости уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p, \\ div\left(\mathbf{V}\right) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение есть **условие несжимаемости, то есть условие сохранение объема жидкости.**

Пусть внешняя сила потенциальная

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla U,$$

где $U(x, y, z, t)$ - некоторая скалярная функция, и рассматривается потенциальное движение жидкости, для которого вектор скорости $\mathbf{V}$ может быть также представлен в виде градиента по пространственным переменным некоторой скалярной функции $\Phi(x, y, z, t)$, называемая потенциалом скоростей,

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi.$$

Первое уравнение системы приобретает вид

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi + \frac{1}{\rho_0}\nabla U = 0.$$

С помощью очевидного равенства $$(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi=\nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right),$$

последнее уравнение можно переписать в виде $$\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{\rho_0}U+\frac{1}{\rho_0}p\right\}=0,$$

откуда получается **интеграл Бернулли-Коши** $$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\frac{1}{\rho_0}U+\frac{1}{\rho_0}p=C(t).$$

С помощью интеграла Бернулли-Коши давление $p(x,y,z,t)$ определяется через потенциал скоростей $\Phi(x,y,z,t)$ с точностью до произвольной функции $C(t)$ одной и той же для всего объема жидкости.

Для потенциала Φ из второго уравнения системы получаем **уравнение Лапласа**:

$$div(\mathbf{V})=div(\nabla\Phi)=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\Phi=0.$$

Интеграл Бернулли-Коши и уравнение Лапласа описывают данный класс потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости.

Для однозначного определения потенциала скоростей уравнение Бернулли-Коши нужно дополнить начальными и граничными условиями. Если стенка S твердая, то естественное граничное условие равенства нулю нормальной составляющей скорости приводит к однородному граничному условию второго рода (условию Неймана):

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{s} = 0, \qquad t \in [0, \infty),$$

где $\mathbf{n}$ - вектор нормали к поверхности S.

На свободной поверхности жидкости граничное условие становится гораздо более сложным.

Пусть в равновесном состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z). Тогда в процессе движения свободная поверхность жидкости будет описываться неизвестной функцией $z = \eta(x, y, z, t)$. Граничные условия на этой поверхности должны устанавливать связь между функциями $\eta(x, y, z, t)$ и $\Phi(x, y, t)\big|_{z=\eta(x,y,t)}$. Так как на свободной поверхности функция $\varsigma(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z = 0$, то будет равно нулю и ее полная производная по времени

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\partial\varsigma}{\partial t} + \frac{\partial\varsigma}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varsigma}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varsigma}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Поскольку $\mathbf{V} = \left\{\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right\}$ и $\frac{\partial\varsigma}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$, то последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\mathbf{V}\nabla\varsigma=0.$$

Учитывая, что $\mathbf{V}=\nabla\Phi$, **первое (кинематическое) условие на свободной поверхности** принимает вид

$$\left.\left\{\frac{\partial\eta}{\partial t}+\Phi_x\eta_x+\Phi_y\eta_y-\Phi_z\right\}\right|_{z=\eta(x,y,t)}=0,\quad t\in[0,\infty).$$

Второе (динамическое) условие получим из интеграла Бернулли-Коши. Будем рассматривать случай, когда внешней силой является сила тяжести. Тогда потенциал внешней силы имеет вид

$U=gz,$ где g – ускорение силы тяжести. Условие равенства давления жидкости на свободной поверхности заданному внешнему давлению (например, атмосферному) $\left.p_0\left(x,y,t\right)\right|_{z=\eta(x,y,t)}$,

используя интеграл Бернулли-Коши, можно записать в виде

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla \Phi\right|^2+\frac{g}{\rho_0}\eta\left(x,y,t\right)\right\}\Big|_{z=\eta(x,y,t)}=-\frac{p_0}{\rho_0}\left(x,y,z,t\right)\Big|_{z=\eta(x,y,t)}$$

Заметим, что полученное условие оказывается нелинейным, что сильно усложняет решение соответствующих задач.

Кроме граничных условий должны быть поставлены начальные условия:

$$\Phi\left(x,y,z,t\right)\Big|_{t=0}=\Phi_0\left(x,y,z\right),$$
$$\eta\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0}=\eta_0\left(x,y\right).$$

9) Малые продольные колебания газа в трубке

Пусть заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания. **Сделаем следующие предположения:** 1) поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются; 2) все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра.

При описании процесса колебаний газа **будем использовать переменные Лагранжа.**

Введем следующие обозначения:

$\rho(x,t)-$ плотность газа, $p(x,t)-$ давление газа, $\phi(x,t)-$ потенциал скоростей газа, $\mathrm{v}(x,t)-$ скорость газа, $u(x,t)-$ продольное отклонение частиц газа, S – площадь сечения трубки.

Пусть p_0 и ρ_0 - давление и плотность в невозмущенном состоянии, а $\tilde{p}(x,t)$ и $\tilde{\rho}(x,t)$ - возмущения давления и плотности: $\tilde{p}(x,t)=p(x,t)-p_0$, $\tilde{\rho}(x,t)=\rho(x,t)-\rho_0$.

Для описания процесса колебания газа в трубке можно воспользоваться переменными Эйлера, или переменными Лагранжа. Напомним, что в переменных Эйлера каждая физическая точка стержня в разные моменты времени характеризуется координатой $x(t)$. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x, которую эта точка имела в положении равновесия.

Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент времени находится в точке с координатой $X=x+u(x, t)$, где X – переменная Эйлера. Связь между переменными Лагранжа и Эйлера имеет вид: $x=X+U(X,t)$.

В предыдущих разделах мы получили систему уравнений газовой динамики в форме Эйлера. Получим теперь систему уравнений газовой динамики (уравнение движения газа, уравнение непрерывности, термодинамическое уравнение состояния) в форме Лагранжа.

Уравнение движения газа в форме Лагранжа

Для получения уравнения движения газа используем закон об изменении количества движения. Направим ось Ох вдоль оси трубки. Силой давления p называется проекция на ось Ох силы $\mathbf{p}$, с которой часть газа, лежащая правее выделенного сечения, действует на часть газа, лежащую левее выделенного сечения. Выделим участок трубки, расположенный между сечениями x и $x+\Delta x$. Изменение количества движения выделенного участка равно импульсу действующей силы (S – площадь сечения трубки):

$$S\int_{x}^{x+\Delta x}\left\{\rho(\xi,t+\Delta t)u_t(\xi,t+\Delta t)-\rho(\xi,t)u_t(\xi,t)\right\}d\xi=$$

$$=-S\int_{t}^{t+\Delta t}\left\{p(x+\Delta x,\tau)-p(x,\tau)\right\}d\tau.$$

Предполагая, что входящие в предыдущую формулу функции обладают достаточной гладкостью ($\rho(x,t) \in C[x, x+\Delta x],\ u(x,t) \in C^{(2)}[x, x+\Delta x],\ p(x,t) \in C^{(1)}[x, x+\Delta x]$),

применим формулу среднего значения:

$$S\left\{\rho(\bar{x}, t+\Delta t)u_t(\bar{x}, t+\Delta t) - \rho(\bar{x}, t)u_t(\bar{x}, t)\right\}\Delta x = -S\left\{p(x+\Delta x, \tau) - p(x, \tau)\right\}\Delta t,$$

где $\bar{x} \in [x, x+\Delta x],\ \bar{t} \in [t, t+\Delta t].$

Разделим в последней формуле обе части на произведение $\Delta x\, \Delta t$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0.$ В результате получим уравнение движения газа в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

Уравнение непрерывности в форме Лагранжа

Выделим участок трубки между сечениями x и $x+\Delta x$. Масса газа M, заключенная между выделенными сечениями, не изменяется с течением времени. В положении равновесия $M=S\Delta x\rho_0$. Рассмотрим момент времени t. Левое сечение займет положение $x+u(x,t)$, а правое $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$. Если x - переменная Лагранжа, а $\xi=x+u(x,t)$ - переменная Эйлера, то интегрируя по $d\xi$ и применяя формулу среднего значения. получим

$$M=S\int\limits_{x+u(x,t)}^{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)}\rho(x,t)\,d\xi=S\int\limits_{x+u(x,t)}^{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)}\rho(\xi-u(x,t))\,d\xi=$$

$$=S\rho\left(\bar{\xi}-u(\bar{x},t),t\right)\Delta x\left(1+\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\right),$$

где

$$\bar{\xi} \in \left(x+u(x,t),\, x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)\right), \quad \bar{x} = \bar{\xi} - u(\bar{x},t) \in (x, x+\Delta x).$$

Таким образом, получаем

$$S\Delta x \rho_0 = S\rho(\bar{x},t)\Delta x\left(1+\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим **уравнение неразрывности в форме Лагранжа**

$$\rho_0 = \rho(x,t)\left(1+u_x(x,t)\right).$$

Термодинамическое уравнение состояния

К полученным уравнениям необходимо добавить термодинамическое уравнение состояния (уравнение газового состояния). Будем предполагать, что процесс колебания газа в трубке происходит без теплообмена с внешней средой, то есть является адиабатическим. Уравнение адиабаты имеет вид: $p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - показатель адиабаты.

Полная система уравнений газовой динамики в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\rho(x,t)u_t(x,t)\right)_t = -p_x(x,t), \\ \rho_0 = \rho(x,t)\left(1+u_x(x,t)\right), \\ p(x,t) = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \gamma = \frac{C_p}{C_v}. \end{cases}$$

Полученная система уравнений газовой динамики в форме Лагранжа **является нелинейной системой.** В предположении малости колебаний **проведем ее линеаризацию** (отбрасываемые члены отмечены красным цветом).

а) $\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t) \Rightarrow \rho_0 = \left(\rho_0 + \tilde{\rho}(x,t)\right)\left(1 + u_x(x,t)\right) = \rho_0 + \tilde{\rho} + \rho_0 u_x + \tilde{\rho} u_x \Rightarrow$

$$\tilde{\rho}(x,t) + \rho_0 u_x(x,t) = 0.$$

б) $p(x,t) = p_0 + \tilde{p}(x,t), \;\; p_x(x,t) = \tilde{p}_x(x,t), \;\; \rho(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t), \;\; \rho_t(x,t) = \rho_t(x,t) \Rightarrow$

$$\rho_t u_t + \rho u_{tt} = -p_x \Rightarrow \tilde{\rho}_t u_t + \rho_0 u_{tt} + \tilde{\rho} u_{tt} = -\tilde{p}_x \Rightarrow$$

$$\rho_0 u_{tt}(x,t) = -\tilde{p}_x(x,t).$$

в) $$\frac{\rho(x,t)}{\rho_0}=\frac{\rho_0+\tilde{\rho}(x.t)}{\rho_0}=1+\frac{\tilde{\rho}(x,t)}{\rho_0}\Rightarrow\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(1+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)^{\gamma}\cong 1+\gamma\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\Rightarrow$$

$$p=p_0+\tilde{p}=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}\cong p_0\left(1+\gamma\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)=p_0+\gamma p_0\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\Rightarrow\tilde{p}(x,t)=\gamma p_0\frac{\tilde{\rho}(x,t)}{\rho_0}.$$

Полагая $a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}$, получим $\tilde{p}(x,t)=a^2\tilde{\rho}(x,t)$. **Линеаризованная система:**

$$\begin{cases}\tilde{\rho}(x,t)+\rho_0 u_x(x,t)=0,\\ \\ \rho_0 u_{tt}(x,t)=-\tilde{p}_x(x,t),\\ \tilde{p}(x,t)=a^2\tilde{\rho}(x,t), \quad a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_{0.}}\end{cases}$$

Уравнения для функций $\rho,\ p,\ \phi,\ \mathrm{v},\ u.$

Из линеаризованной системы уравнений газовой динамики можно получить уравнения для функций $\rho,\ p,\ \phi,\ \mathrm{v},\ u.$ Покажем, что все они имеют вид $\mathrm{w}_{tt} = a^2 \mathrm{w}_{xx}.$

а) уравнение для плотности газа:

$$\tilde{\rho}_{tt} = -\rho_0 u_{xtt},\ \ \rho_0 u_{ttx} = -\tilde{p}_{xx} \Rightarrow \tilde{\rho}_{tt} = \tilde{p}_{xx},\ \ \tilde{p}_{xx} = a^2 \tilde{\rho}_{xx} \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \tilde{\rho}_{xx},\ \ x \in \left(0, l\right),\ \ t \in \left(0, \infty\right)$$

$$\tilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt},\ \ \tilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx} \Rightarrow$$

$$\rho_{tt} = a^2 \rho_{xx},\ \ x \in \left(0, l\right),\ \ t \in \left(0, \infty\right)$$

б) уравнение для давления газа:

$$\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \tilde{\rho}_{xx},\ \tilde{p}(x,t) = a^2 \tilde{\rho}(x,t) \Rightarrow \tilde{p}_{xx} = \tilde{\rho}_{tt} = \frac{1}{a^2} \tilde{p}_{tt} \Rightarrow$$

$$\tilde{p}_{tt} = a^2 \tilde{p}_{xx},\quad x \in (0,l),\quad t \in (0,\infty),$$

$$p_{tt} = a^2 p_{xx},\quad x \in (0,l),\quad t \in (0,\infty).$$

в) уравнение для смещения частиц газа:

$$\tilde{\rho} + \rho_0 u_x = 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_x = -\rho_0 u_{xx},\quad \rho_0 u_{tt} = -\tilde{p}_x = -a^2 \tilde{\rho}_x \Rightarrow -\frac{\rho_0}{a^2} u_{tt} = -\rho_0 u_{xx} \Rightarrow$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\quad x \in (0,l),\quad t \in (0,\infty).$$

г) уравнение для скорости газа:

$$\mathrm{v}=u_t,\quad u_{tt}=a^2u_{xx}\Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_{tt}=a^2\mathrm{v}_{xx},\quad x\in(0,l),\quad t\in(0,\infty).$$

д) уравнение для потенциала скоростей:

$$\mathrm{v}=\phi_x,\quad \mathrm{v}_{tt}=a^2\mathrm{v}_{xx}\Rightarrow\phi_{ttx}=a^2\phi_{xxx}\Rightarrow\left(\phi_{tt}-a^2\phi_{xx}\right)_x=0.$$

Так как $\phi(x,t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то:

$$\phi_{tt}-a^2\phi_{xx}=0\Rightarrow$$

$$\phi_{tt}=a^2\phi_{xx},\quad x\in(0,l),\quad t\in(0,\infty).$$

Граничные условия

Рассмотрим различные типы граничных условий на левом и правом концах трубки.

а) закрытые концы:

$$\alpha)\ u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\beta)\ u_t(0,t)=0,\ \ u_t(l,t)=0 \Rightarrow \mathrm{v}(0,t)=0,\ \ \mathrm{v}(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\gamma)\ u_{tt}(0,t)=0,\ \ u_{tt}(l,t)=0,\ \ \tilde{p}_x(x,t)=-\rho_0 u_{tt}(x,t) \Rightarrow \tilde{p}_x(0,t)=-\rho_0 u_{tt}(0,t),$$

$$\tilde{p}_x(l,t)=-\rho_0 u_{tt}(l,t),\ \ \tilde{p}_x=p_x \Rightarrow\ p_x(0,t)=0,\ p_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\delta)\ \phi_x=\mathrm{v} \Rightarrow \phi_x(0,t)=0,\ \ \phi_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

$$\varepsilon)\ \tilde{p}=a^2\tilde{\rho} \Rightarrow \rho_x=\tilde{\rho}_x=\frac{1}{a^2}\tilde{p}_x \Rightarrow \rho_x(0,t)=0,\ \ \rho_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty).$$

б) открытые концы:

На концах трубки нет возмущения давления:

$$\alpha)\ p(0,t)=p_0,\ \ p(l,t)=p_0,\ \ t\in[0,\infty);\ \ \tilde{p}(0,t)=0,\ \ \tilde{p}(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\beta)\ \tilde{p}=a^2\tilde{\rho}\Rightarrow\tilde{\rho}=\frac{1}{a^2}\tilde{p}\Rightarrow\tilde{\rho}(0,t)=0,\ \ \tilde{\rho}(l,t)=0,\ t\in[0,\infty);$$

$$\gamma)\ \tilde{\rho}+\rho_0 u_x=0\Rightarrow u_x=-\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}\Rightarrow u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\delta)\ \mathrm{v}=u_t\Rightarrow\mathrm{v}_x=u_{tx}\Rightarrow\mathrm{v}_x(0,t)=0,\ \ \mathrm{v}_x(l,t)=0,\ \ t\in[0,\infty);$$

$$\varepsilon)\ \mathrm{v}=u_t=\phi_x,\ \ \rho_0 u_{tt}\text{-}\tilde{p}_x\Rightarrow\rho_0\phi_{xt}+\tilde{p}_x=0\Rightarrow(\rho_0\phi_t+\tilde{p})_x=0\Rightarrow\rho_0\phi_t+\tilde{p}=f(t).$$

Так как $f(t)$ определяется с точностью до произвольной функции от t, то получаем:

$$\rho_0\phi_t = -\tilde{p};\ \tilde{p}(0,t) = 0 \Rightarrow \varphi_t(0,t) = 0 \Rightarrow \varphi(0,t) = A;\quad \varphi_t(l,t) = 0 \Rightarrow \varphi(l,t) = B.$$

Учитывая специфику ϕ, можно положить:

$$A = 0, B = 0 \Rightarrow \quad \phi(0,t) = 0,\quad \phi(l,t) = 0,\quad t \in [0,\infty).$$

в) концы трубки закрыты поршнями:

α) Рассмотрим левый конец трубки. Пусть при $x = 0$ в трубку вставлен газонепроницаемый поршенёк с пренебрежимо малой массой, насаженный на пружинку с коэффициентом жесткости ν и скользящим внутри трубки без трения. Пружинка будет действовать на поршенёк с добавочной силой упругости, равной $-\nu u(0,t)$ при отклонении поршенька, равном u. Речь идет о добавочной силе упругости, так как в положении равновесия на поршенёк уже действует сила упругости, уравновешивающая невозмущенное давление p_0.

Рассмотрим участок трубки длиной Δx, расположенный между сечениями $x=0$ и $x=\Delta x$.

В сечении $x=0$ действует сила упругости $-\nu u(0,t)+p_0 S$, а в сечении $x=\Delta x$ сила упругости $-p(\Delta x,t)S$.

Запишем закон изменения количества движения выделенного участка трубки по действием сил упругости:

$$s\int_0^{\Delta x}\left\{\rho(\xi,t+\Delta t)u_t(\xi,t+\Delta t)-\rho(\xi,t)u_t(\xi,t)\right\}d\xi=$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\left\{-\nu u(0,\tau)+p_0 S-p(\Delta x,\tau)S\right\}d\tau.$$

Применим к последней формуле формулу среднего значения:

$$S\left\{\rho\left(\overline{x},t+\Delta t\right)u_t\left(\overline{x},t+\Delta t\right)-\rho\left(\overline{x},t\right)u_t\left(\overline{x},t\right)\right\}\Delta x=$$

$$=\left\{-\nu u\left(0,\overline{t}\right)+p_0S-p\left(\Delta x,\overline{t}\right)S\right\}\Delta t.$$

Поделим обе части последнего равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$S\left(\rho\left(\overline{x},t\right)u_t\left(\overline{x},t\right)\right)_t\Delta x=-\nu u\left(0,t\right)+p_0S-\left(p_0+\tilde{p}\left(\Delta x.t\right)S\right).$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$0=-\nu u\left(0,t\right)+p_0S-p_0S-\tilde{p}\left(\Delta x,t\right)S\Rightarrow\tilde{p}\left(0,t\right)+\frac{\nu}{S}u\left(0,t\right)=0\Rightarrow$$

$$\tilde{p}\left(0,t\right)=-a^2\rho_0u_x\left(0,t\right)\Rightarrow a^2=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\Rightarrow-\gamma p_0u_x\left(0,t\right)+\frac{\nu}{S}u\left(0,t\right)=0.$$

Положив $h = \dfrac{\nu}{S\gamma p_0}$, получим однородное граничное условие третьего рода - условие Робена:

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

На правом конце аналогично получается однородное условие Робена:

$$u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, t \in [0,\infty).$$

$\beta)$ Так как $\mathrm{v} = u_t$, то из полученных в пункте $\alpha)$ формул сразу следуют условия:

$$\mathrm{v}_x(0,t) - h\mathrm{v}(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty),$$

$$\mathrm{v}_x(l,t) + h\mathrm{v}(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty), \quad h = \frac{\nu}{S\gamma p_0}.$$

γ) Имеем цепочку формул:

$$u_x - hu = 0 \Rightarrow u_{xtt} - hu_{tt} = 0; \;\; \tilde{\rho} + \rho_0 u_x = 0 \Rightarrow u_{xtt} = -\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}_{tt}; \;\; \rho_0 u_{tt} = -p_x \Rightarrow u_{tt} = -\frac{1}{\rho_0}\tilde{\rho}_{tt} \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho}_{tt} - h\tilde{p}_{xx} = 0; \;\; \tilde{p} = a^2\tilde{\rho} \Rightarrow \tilde{\rho}_{tt} - a^2 h\tilde{\rho}_{xx} = 0; \;\; \bar{h} = a^2 h = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\nu}{S\gamma p_0} = \frac{\nu}{S\rho_0}; \;\; \tilde{\rho}_{tt} = \rho_{tt}, \;\; \tilde{\rho}_{xx} = \rho_{xx} \Rightarrow$$

$$\rho_{tt} - \bar{h}\rho_{xx} = 0, \;\; x = 0, \;\; t \in [0, \infty),$$

$$\rho_{tt} + \bar{h}\rho_{xx} = 0, \;\; x = l, \;\; t \in [0, \infty), \;\; \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$

δ) Так как $\rho_{tt} - \bar{h}\rho_{xx} = 0,\ p = a^2\rho \Rightarrow$

$$p_{tt} - \bar{h}p_{xx} = 0,\quad x = 0,\quad t \in \left[0, \infty\right),$$

$$p_{tt} + \bar{h}p_{xx} = 0,\quad x = l,\quad t \in \left[0, \infty\right),\quad \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$

$\varepsilon)$ Так как $\rho_0\phi_t = -\tilde{p},\ p_{tt} - \bar{h}p_{xx} = 0 \Rightarrow \left(\phi_{tt} - \bar{h}\phi_{xx}\right)_t = 0,$ то, учитывая свойства потенциальной функции ϕ, получим граничные условия:

$$\phi_{tt} - \bar{h}\phi_{xx} = 0, \quad x = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

$$\phi_{tt} + \bar{h}\phi_{xx} = 0, \quad x = l, \quad t \in [0, \infty), \quad \bar{h} = \frac{\nu}{S\rho_0}.$$