Вопросы.

1. Линейное пространство. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства.
2. Размерность линейного пространства, его базис. Связь базиса и размерности линейного пространства.
3. Координаты элемента линейного пространства. Преобразование базиса. Преобразование координат элемента линейного пространства при преобразовании базиса. Изоморфизм линейных пространств.
4. Подпространство линейного пространства.
5. Линейная оболочка конечного набора элементов линейного пространства. Линейная оболочка столбцов матрицы Теоремы о ранге произведения матриц.
6. Евклидовы и унитарные пространства. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского.
7. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства. Разложение евклидова пространства на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
8. Линейный оператор. Примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому. Ядро и образ линейного оператора.
9. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Умножение линейных операторов. Обратный оператор.
10. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
11. Инвариантные подпространства линейного оператора.

Задачи

1. Доказать, что в линейном пространстве квадратных матриц nxn над полем вещественных чисел подмножество, состоящее из симметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^m=A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
2. Доказать, что в линейном пространстве квадратных матриц nxn над полем вещественных чисел подмножество, состоящее из антисимметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^m=-A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
3. Рассматривается линейное пространство полиномов степени не выше $2n$. Является ли подпространством этого пространства множество

всех полиномов $p(x)$, удовлетворяющих условиям: $p(-1)=0$, $p(1)=0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

4. Рассматривается линейное пространство полиномов степени не выше n. Является ли подпространством этого пространства множество всех полиномов $p(x)$, удовлетворяющих условиям: $p(1)=0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
5. Рассматривается линейное пространство R, $dimR=n\in\boldsymbol{N}$. Матрица A является матрицей перехода от базиса e к базису f, а матрица B – матрицей перехода от базиса f к базису g. Найти матрицу перехода от базиса g к базису e.
6. Пусть Π – линейное пространство положительных чисел, в котором сумма элементов x,y определяется как произведение xy, а произведение элемента x на вещественное число c – степень x^c. Доказать, что в пространстве Π любые два элемента x и y линейно зависимы.
7. Доказать, что если отображение f — изоморфизм линейных пространств R и R^* и элементы $x_1,x_2,\dots,x_m\in R$ то линейно независимы, то элементы $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)$ также линейно независимы.
8. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве R. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора $\hat{A}$ является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$ Является ли эта сумма собственным подпространством оператора $\hat{A}$? Ответ обоснуйте.
9. Задана матрица A_e в базисе $e=(e_к)_3$ линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном трехмерном пространстве. Найти собственные значения этого оператора. Для каждого собственного значения построить множество всех собственных векторов:
а) $A_e=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, б) $A_e=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$, в) $A_e=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
10. Пусть L – линейное пространство над полем комплексных чисел, представляющее собой линейную оболочку функций $cosx$ и $sinx$. Найти матрицу оператора дифференцирования, действующего в пространстве L, в базисе $(cosx, sinx)$, собственные значения и собственные векторы, если они существуют.

Билет коллоквиума содержит один вопрос и одну задачу