

## Основы математического моделирования

### Вопросы к экзамену 2020

*Вопросы по основным темам курса, требующие в качестве ответа формулировку утверждения, постановку задачи или примеры*

#### *Понятие модели*

1. Дайте определение модели процесса или явления. Какие виды моделей Вы знаете? Сформулируйте определение математической модели.
2. Сформулируйте определения детерминированной и стохастической математических моделей.
3. Перечислите основные этапы математического моделирования.
4. Что такое прямые задачи математического моделирования? Приведите примеры.
5. Что такое обратные задачи математического моделирования? Приведите примеры.
6. В чем состоит принцип аналогий в математическом моделировании? Приведите примеры.
7. Приведите примеры, демонстрирующие универсальность математических моделей.
8. Что такое иерархия моделей? Приведите примеры.

#### *Уравнения Гельмгольца в бесконечных областях*

1. Рассмотрите возможное поведение на бесконечности решений уравнения Гельмгольца в неограниченных областях в трехмерном случае при различных видах коэффициента  $C$ .
2. Сформулируйте теорему о единственности решения уравнения Гельмгольца в неограниченной области в случае отрицательного коэффициента  $C$ . Каким методом она доказывается?
3. При каких значениях коэффициента  $C$  для единственности решения уравнения Гельмгольца в неограниченной области достаточно сформулировать на бесконечности условие стремления решения к нулю?
4. Сформулируйте условия излучения Зоммерфельда в трехмерном случае. Дайте их физическую интерпретацию. Что такое сферические волны?
5. Сформулируйте условия излучения Зоммерфельда в двумерном случае. Дайте их физическую интерпретацию. Что такое цилиндрические волны?
6. В каком случае и для чего ставятся условия излучения Зоммерфельда при формулировке задач для уравнения Гельмгольца?

7. Сформулируйте принцип предельного поглощения.
8. Как ставится задача математической теории дифракции?

### *Задача Коши и функция Римана*

1. Сформулируйте простейшую задачу Гурса. Какие линии являются характеристиками для рассматриваемого уравнения?
2. Сформулируйте общую задачу Гурса. Какие линии являются характеристиками для рассматриваемого уравнения?
3. Сформулируйте простейшую задачу Коши для гиперболического уравнения функции двух переменных. Какими свойствами должна обладать кривая, на которой ставятся дополнительные условия задачи?
4. Сформулируйте общую задачу Коши для гиперболического уравнения функции двух переменных. Какими свойствами должна обладать кривая, на которой ставятся дополнительные условия задачи?
5. Дайте определение функции Римана.
6. Сформулируйте задачу для функции Римана в случае уравнения с постоянными коэффициентами вида  $u_{xy} + Cu = -F(x, y)$  и в случае  $u_{xy} = -F(x, y)$ . Чему равна функция Римана в этих случаях.
7. Сформулируйте определение сопряженных дифференциальных операторов.
8. Что произойдет, если характеристика уравнения общей задачи Коши пересечет кривую  $C$ , на которой заданы дополнительные условия, более чем в одной точке?

### *Задача Стефана*

1. Сформулируйте задачу Стефана и объясните ее физический смысл.
2. В чем состоит метод подобия для дифференциальных уравнений? Продемонстрируйте его на примере уравнения теплопроводности.

### *Задача сорбции*

1. Как ставится задача сорбции?
2. Напишите уравнение кинетики сорбции.
3. Что такое изотерма сорбции? Приведите примеры.

### *Квазилинейные уравнения теплопроводности*

1. Что такое автомодельное решение уравнения в частных производных? Приведите пример.
2. Сформулируйте квазилинейное уравнение теплопроводности и его основные свойства.
3. Что такое режимы с обострением в квазилинейных уравнениях теплопроводности? Приведите примеры.
4. При каком режиме с обострением образуется стоячая тепловая волна?

### *Квазилинейные уравнения переноса*

1. Приведите пример линейного и квазилинейного уравнения переноса. В чем состоит их отличие?
2. Сформулируйте уравнения характеристик для линейного и квазилинейного уравнения переноса.
3. При каких условиях возникают разрывные решения квазилинейного уравнения переноса?
4. Что такое обобщенное решение уравнения переноса, и в каких случаях его приходится использовать?
5. Сформулируйте условие на разрыве (условие Гюгонио-Ренкина) для разрывного решения уравнения  $u_t + uu_x = 0$ . Поясните его физический смысл.

### *Уравнение Кортевега – де Фриза*

1. Напишите уравнение Кортевега – де Фриза в каноническом виде. Поясните его физический смысл.
2. Для решения какой нелинейной задачи применяется схема решения обратной задачи рассеяния?
3. Что такое солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза? Приведите пример.

### *Вариационные и проекционные методы*

1. В чем состоит принцип сведения краевых задач к вариационным задачам? Приведите примеры.
2. Как ставится вариационная задача на собственные значения?
3. Что такое вариационные и проекционные алгоритмы приближенного решения задач? Приведите примеры.
4. Сформулируйте метод Рунге приближенного решения задач и условия его применимости.
5. В чем состоит метод Галеркина приближенного решения задач?
6. В чем состоит метод наименьших квадратов приближенного решения задач?

### *Разностные схемы*

1. Дайте определение сетки и сеточной функции. Приведите пример сеточной нормы. Дайте определение разностной схемы.
2. Дайте определение аппроксимации разностной схемой исходной дифференциальной задачи.
3. Дайте определение устойчивости разностной схемы.
4. Дайте определение сходимости разностной схемы.
5. Что означает, что разностная схема имеет  $m$ -й порядок точности?
6. Дайте определение корректной постановки разностной схемы.
7. Сформулируйте теорему о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы.
8. Что такое шаблон разностного оператора? Приведите примеры.
9. Приведите пример явной разностной схемы для уравнения теплопроводности. В чем ее основные достоинства и недостатки? Запишите условие устойчивости явной схемы.
10. Приведите пример неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности. В чем ее основные достоинства и недостатки?
11. Что такое экономичная разностная схема? Запишите схему переменных направлений для уравнения теплопроводности.
12. Дайте определение однородной разностной схемы. Приведите пример.
13. Дайте определение консервативной разностной схемы. Приведите пример консервативной и неконсервативной разностной схемы.

### *Асимптотические методы*

1. Что такое асимптотическая формула? Какие члены асимптотической формулы называются остаточными?
2. Может ли асимптотический ряд быть расходящимся? Может ли асимптотическая формула обеспечить произвольную степень точности?
3. Что в асимптотических методах понимается под возмущением? Что такое регулярное и что такое сингулярное возмущение?
4. Что такое устойчивое решение вырожденного уравнения?
5. Что такое область влияния (притяжения) корня вырожденного уравнения?

### *Новые объекты математического моделирования*

1. Что такое фрактал? Приведите примеры.
2. Опишите модель бруселятора.
3. Перечислите основные свойства систем, в которых возможны явления самоорганизации и возникновения структур.

### *Вейвлет-анализ*

1. Что такое вейвлет-анализ? Для чего он применяется?

2. Перечислите основные свойства функций вейвлет-семейства.
3. В чем состоит преимущество вейвлет-преобразования перед Фурье-преобразованием?
4. Приведите примеры применения вейвлет-анализа.

*Вопросы, требующие вывода или доказательства (пятые вопросы билетов)*

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности решения задачи для уравнения Гельмгольца в неограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности.
2. В каких задачах возникает необходимость использования парциальных условий излучения? Приведите пример с подробным пояснением понятий нормальных волн, постоянных распространения и физического смысла условий излучения.
3. Сформулируйте и решите задачу о квадрупольном акустическом излучателе.
4. Выведите обобщенную формулу Даламбера (квадратурный вид решения с помощью функции Римана) для решения общей задачи Коши для уравнения гиперболического типа в случае функции двух переменных.
5. Используя метод подобия, получите вид решения задачи Стефана.
6. Сформулируйте постановку задачи сорбции в линейном случае. Получите квадратурный вид ее решения с помощью функции Римана.
7. Изложите схему решения обратной задачи рассеяния.
8. В чем состоит интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения консервативных разностных схемы? Проиллюстрируйте применение метода баланса на примере стационарного уравнения теплопроводности.
9. В чем состоит идея метода конечных элементов? Проиллюстрируйте применение метода на примере стационарного уравнения теплопроводности.
10. Сформулируйте необходимое спектральное условие устойчивости Неймана для решения разностной задачи Коши. Проиллюстрируйте его применение на конкретном примере.
11. Сингулярно возмущенные задачи. Поясните необходимость введения в асимптотическое разложение дополнительных

пограничных членов наряду с регулярными членами на примере сингулярно возмущенной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.