Лекция 3

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

§ 0. План лекции

1. Теорема о бесконечной гладкости гармонической функции.

2. Теорема о локальной оценке производных гармонической функции.

3. Теорема Лиувилля.

4. Следствие для ограниченных решений уравнения Пуассона.

5. Пример 1. О гармонической функции в области U и равной нулю в непустом открытом подмножестве $U_0 \subset U$.

6. Пример 2. О гармонических функциях в $\mathbb{R}^N$ из пространства $L^p(\mathbb{R}^N)$.

7. Пример 3. О гармонической функции такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{(1+|x|)^3}\,dx < +\infty.$$

8. Пример 4. О гармонической функции такой, что $u(x) > -c_1$ всюду в $\mathbb{R}^N$.

9. Пример 5. О решении нелинейного уравнения $\Delta u(x) = |u|^p$ при $p > 1$.

§ 1. Гладкость гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *Если* $u(x) \in \mathbb{C}(U)$ *обладает свойством*:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x,r)} u(y)\, dy$$

для каждого шара $O(x,r) \subset U$, *то* $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U)$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\omega(x)$ — это функция «шапочка» следующего вида:

$$\omega(x) = a \begin{cases} \exp\left(-1/(1-|x|^2)\right), & \text{при} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

где константа $a > 0$ выбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)\, dx = 1.$$

Пусть

$$U_\varepsilon = \left\{ x \in U |\ \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon \right\}.$$

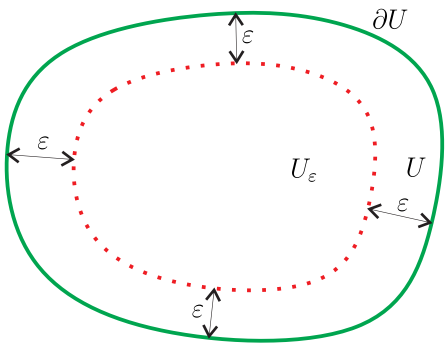

Рис. 1. Область U_ε.

Шаг 2. Введём следующую функцию:

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_U \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy.$$

Справедлива следующая формула коплощади [**?**]:

$$\int\limits_{B(x,\varepsilon)} f(y)\, dy = \int\limits_0^\varepsilon \left(\int\limits_{\partial O(x,r)} f(z)\, dS_z \right) dr.$$

Учитывая формулу коплощади, мы получим [1] следующую цепочку выражений:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int\limits_{\partial O(x,r)} u(z)\,dS_z \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^N} u(x) \int\limits_0^\varepsilon \omega\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \omega_N r^{N-1}\,dr =$$
$$= u(x) \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{O(0,\varepsilon)} \omega\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) dy = u(x), \quad (1.1)$$

Шаг 3. Теперь заметим, что $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty(U_\varepsilon)$. Значит, в силу (1.1) имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U_\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Всякая гармоническая функция $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^\infty(U)$.*

Доказательство.

Утверждение вытекает сразу же из теоремы о среднем для гармонических в области U функций.

Следствие доказано.

§ 2. Локальные оценки для гармонических функций

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ гармоническая в U. Тогда*

$$|D_x^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{c_k}{r^{N+k}} \|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \quad (2.1)$$

для любых шара $O(x_0, r) \subset U$ и мультииндекса α длины $|\alpha| = k$. Здесь

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad c_0 = \frac{N}{\omega_N}, \quad c_k = \frac{N(2^{N+1}Nk)^k}{\omega_N} \quad (2.2)$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем (2.1), (2.2) индукцией по k. Случай $k = 0$ сразу следует из формулы о среднем.

---

[1] Реально интегрирование ведется по шару $O(x, \varepsilon)$.

□ Действительно, имеем

$$u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} u(y)\,dy \Rightarrow |u(x_0)| \leqslant \frac{c_0}{r^N} \int\limits_{O(x_0,r)} |u(y)|\,dy. \quad \boxtimes$$

В случае $k = 1$, дифференцируя уравнение Лапласа, получим

$$\Delta u_{x_i} = 0 \quad \text{в} \quad U,$$

поскольку в силу теоремы 1 имеем $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(U)$. Следовательно, функция u_{x_i} является гармонической при $i = \overline{1, N}$. Значит, по теореме

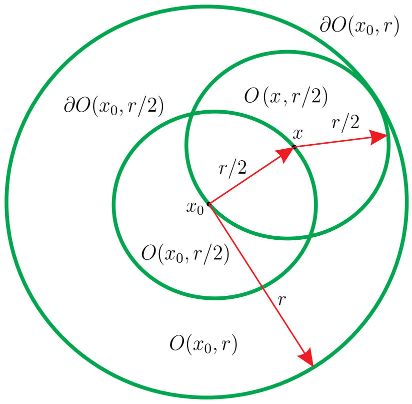

Рис. 2. Шары $O(x_0, r/2)$, $O(x, r/2)$ и $O(x_0, r)$.

о среднем имеем

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{1}{\alpha_N (r/2)^N} \int\limits_{O(x_0,r/2)} u_{x_i}(x)\,dx.$$

Отсюда вытекает следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}|u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{O(x_0,r/2)} u_{x_i}(x)\,dx \right| = \\ &= \left| \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int\limits_{\partial O(x_0,r/2)} u(y) n_{yi}\,dS_y \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \sup_{y \in \partial O(x_0,r/2)} |u(y)| \omega_N \left(\frac{r}{2}\right)^{N-1} |n_{yi}| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2N}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial O(x_0,r/2))}. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Заметим, что если $x \in \partial O(x_0, r/2)$, то $O(x, r/2) \subset O(x_0, r) \subset U$ (см. рисунок 14). Поэтому согласно формуле среднего значения имеем

$$|u(x)| \leqslant \frac{N}{\omega_N}\left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x,r/2))} \leqslant \frac{N}{\omega_N}\left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \qquad (2.4)$$

в силу (2.1), (2.2) при $k = 0$. Отсюда имеем

$$\|u\|_{L^\infty(\partial O(x_0,r/2))} \leqslant \frac{N}{\omega_N}\left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(O(x_0,r))}. \qquad (2.5)$$

Комбинируя неравенства (2.3), (2.5) находим

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{2^{N+1}N^2}{\omega_N}\frac{1}{r^{N+1}}\|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \quad \text{при} \quad |\alpha| = 1. \qquad (2.6)$$

Таким образом, (2.1), (2.2) справедливы при $k = 1$.

Шаг 2. Предположим, что $k \geqslant 2$ и формулы (2.1), (2.2) справедливы для всех шаров, лежащих в U, и мультииндексов длины, меньшей или равной $k-1$. Фиксируем $O(x_0, r) \subset U$. Пусть α — это мультииндекс длины $|\alpha| = k$. Тогда

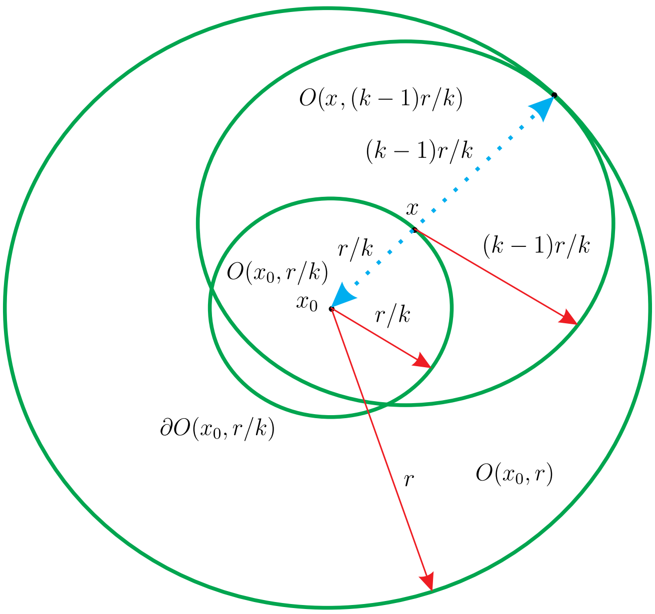

Рис. 3. Шары $O(x_0, r/k)$, $O(x, r(k-1)/k)$ и $O(x_0, r)$.

$$D^\alpha u(x) = (D^\beta u(x))_{x_i} \quad \text{для некоторого} \quad i \in \{1, ..., N\}, \quad |\beta| = k-1.$$

Поскольку функция $D^\alpha u(x)$ является гармонической в области U, то можно применить к ней рассуждения, подобные проведенным (2.3), но только в шаре $O(x_0, r/k)$. В результате получим оценку

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{Nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial O(x_0, r/k))}. \tag{2.7}$$

Если $x \in \partial O(x_0, r/k)$, то (см. рисунок 15)

$$O\left(x, \frac{k-1}{k} r\right) \subset O(x_0, r) \subset U.$$

Таким образом, из (2.1), (2.2) при $k-1$ следует оценка

$$|D^\beta u(x)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}N(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_N \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{N+k-1}} \|u\|_{L^1(O(x, r(k-1)/k))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N\left(2^{N+1}N(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_N \left(\frac{k-1}{k} r\right)^{N+k-1}} \|u\|_{L^1(O(x_0, r))}. \tag{2.8}$$

Следовательно, из оценок (2.7) и (2.8)

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{N\left(2^{N+1}Nk\right)^{k}}{\omega_N r^{N+k}} \|u\|_{L^1(O(x_0, r))},$$

из которой вытекают оценки (2.1), (2.2) при $|\alpha| = k$.

Теорема доказана.

§ 3. Теорема Лиувилля

Следствием теоремы 2 является следующая важная и интересная теорема:

Теорема Лиувилля. *Пусть $u(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ является гармонической и ограниченной. Тогда $u(x) = const$.*

Доказательство.

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $r > 0$ и применим теорему 2 к шару $O(x_0, r)$:

$$|D_x u(x_0)| \leqslant \frac{A_1}{r^{N+1}} \|u\|_{L^1(O(x_0,r))} \leqslant \frac{A_2}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to +0$$

при $r \to +\infty$. Тогда $D_x u(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, $u(x)$ — это константа.

Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы Лиувилля мы воспользовались следующим неравенством:

$$\|u\|_{L^1(O(x_0,r))} = \int\limits_{O(x_0,r)} |u(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int\limits_{O(x_0,r)} dx = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{\omega_N}{N} r^N.$$

В свою очередь важным следствием теоремы Лиувилля является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ *при* $N \geqslant 3$. *Тогда любое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy + c, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где c *— это константа.*

Доказательство.

Прежде всего заметим, что поскольку $\mathcal{E}_N(x) \to +0$ при $|x| \to +\infty$, то функция

$$\widetilde{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_N(x-y) f(y)\, dy$$

является ограниченным решением уравнения Пуассона (3.1). Если $u(x)$ — это другое ограниченное решение уравнения (3.1), то функция $w(x) = \widetilde{u}(x) - u(x)$ является ограниченной гармонической функцией в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, по теореме Лиувилля имеем

$$w(x) = const.$$

Теорема доказана.

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(U)$ гармоническая в области U с гладкой границей ∂U. Предположим, что эта функция

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U_0 \subset U,$$

где $U_0 \neq \varnothing$ и открыто. Тогда

$$u(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad U.$$

Решение. Разобьем область U на три непересекающиеся части

$$U = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

где

$$U_1 = \{x \in U: \ u(x) = 0\} \supset U_0,$$
$$U_2 = \{x \in U: \ u(x) > 0\}, \quad U_3 = \{x \in U: \ u(x) < 0\}.$$

Заметим, что
$$\mathrm{int} U_1 \supset U_0.$$
Предположим, что $U_0 \neq U$. Пусть ∂U_0 — это граница открытого множества U_0. В силу нашего предположения
$$\partial_1 U_0 := \partial U_0 \cap U \neq \varnothing.$$
Поскольку
$$\partial(U_2 \cup U_3) \subset U_1,$$
то для всякой точки $x_0 \in \partial_1 U_0$ найдется такое малое число $\varepsilon > 0$, что шар $O(x_0, \varepsilon)$ буде лежать либо в $U_2 \cup U_0$ либо в $U_3 \cup U_0$. Воспользуемся формулой среднего значения и получим следующую цепочку выражений:
$$0 = u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N \varepsilon^N} \int\limits_{O(x_0,\varepsilon)} u(x)\,dx \gtrless 0.$$
Полученное противоречие доказывает, что $\partial_1 U_0 = \varnothing$. Следовательно, $U_0 = U$.

Задача 2. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^N$ функции, принадлежащие $L^p(\mathbb{R}^N)$ при $p \in [1, +\infty)$.

Ответ. $u(x) = 0$.

Указание. При $p = +\infty$ справедлива теорема Лиувилля.

Решение. Пусть $u(x)$ — это функция, удовлетворяющая указанным условиям. Согласно формуле среднего значения и неравенству Гельдера имеем для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}^N$ цепочку выражений
$$u(x_0) = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{O(x_0,R)} u(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha_N R^N} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} 1^{p'}\,dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} |u(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha_N R^N} \left(\alpha_N R^N\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant \frac{c_N}{R^{N/p}} \to 0$$
при $R \to +\infty$, где
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Задача 3. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^3$ функции, для которых конечен интеграл
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{(1+|x|)^3}\,dx < +\infty. \tag{4.1}$$

Ответ. $u(x) = 0$.

Решение. Согласно формуле среднего значения для любого $x_0 \in \in \mathbb{R}^3$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$u(x_0) = \frac{1}{\alpha_3 R^3} \int\limits_{O(x_0,R)} u(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} \int\limits_{O(x_0,R)} (1+|y|)^{3/2} \frac{|u(y)|}{(1+|y|)^{3/2}}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} (1+|y|)^3\,dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{O(x_0,R)} \frac{|u(y)|^2}{(1+|y|)^3}\,dy \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha_3 R^3} (1+R)^{3/2} \left(\alpha_3 R^3\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{(1+|y|)^3}\,dy \right)^{1/2} \leqslant A < +\infty,$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от $R > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Следовательно функция $u(x)$ является гармонической и ограниченной в $\mathbb{R}^3$. По теореме Лиувилля $u(x) = const$. Подстановка в условие (4.1) дает равенство

$$u(x) = 0.$$

Задача 4. Пусть для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ функции $u(x)$ выполнено неравенство

$$u(x) \geqslant -c_1,$$

где $c_1 > 0$ — постоянная. Тогда $u(x) = const$.

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(x) + c_1 > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

и функция $v(x)$ является гармонической в $\mathbb{R}^N$. Согласно теоремы о среднем значении для гармонической функции [1])

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}$$

при любом $R > 0$ и для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N$ имеем:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} =$$

[1]) Производная гармонической в области функции является гармонической функцией.

$$= \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{O(x_0,R)} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,dx = \frac{1}{\alpha_N R^N} \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\cos(n_y, e_j)\,ds_y \quad (4.2)$$

при $j = \overline{1,N}$. Так как $v(x)$ — это положительная функция, то по известной теореме о среднем значении для интеграла имеем

$$\int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\cos(n_y, e_j)\,ds_y = \cos(n_{y_0}, e_j) \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\,ds_y, \quad (4.3)$$

где $y_0 \in \partial O(x_0, R)$ — это некоторая точка. Теперь воспользуемся теоремой о среднем для интеграла по сфере $\partial O(x_0, R)$ и получим следующее равенство:

$$v(x_0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x_0,R)} v(y)\,ds_y. \quad (4.4)$$

Собирая равенства (4.2)–(4.4), мы приходим к следующей цепочке равенств:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\omega_N R^{N-1}}{\alpha_N R^N}\cos(n_{y_0}, e_j) v(x_0) = \\ = \frac{N\cos(n_{y_0}, e_j)}{R} v(x_0) \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N} \quad (4.5)$$

для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Устремляя $R \to +\infty$ мы получим, что $v(x) = const$. Следовательно, $u(x) = const$.

Задача 5. Найти все гармонические в $\mathbb{R}^2$ функции $u(x,y)$, для которых

$$u_x(x,y) < u_y(x,y) \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение. Прежде всего заметим, что производные гармонической функции в области $\mathbb{R}^2$ — тоже гармонические функции. Поэтому функция $u_y(x,y) - u_x(x,y)$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^2$, причем

$$u_y(x,y) - u_x(x,y) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

В силу предыдущей задачи имеем в этом случае

$$u_y(x,y) - u_x(x,y) = c \quad \text{для всех} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.6)$$

где $c \geqslant 0$ — это постоянная. Наша задача теперь решить уравнение в частных производных первого порядка (4.6). Воспользуемся с этой целью уравнениями характеристик:

$$-dx = dy = \frac{du}{c}.$$

Эта система имеет два независимых первых интеграла

$$x + y = c_1, \quad u + cx = c_2,$$

т. е. решение имеет вид

$$u = -cx + \varphi(x+y)$$

с произвольной гармонической функцией φ. Таким образом,

$$0 = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 2\varphi'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(x+y) = k_1(x+y) + k_2 \Rightarrow u(x,y) = m_1 x + m_2 y + m_3.$$

Так как $u_x < u_y$, то $m_1 < m_2$.

Задача 6. Получить аналог теоремы Лиувилля для классических решений нелинейного уравнения

$$\Delta u(x) = |u(x)|^p \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad p > 1, \quad N \geqslant 2. \tag{4.7}$$

Решение. Прежде всего введем следующую пробную функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| \geqslant 2, \end{cases} \tag{4.8}$$

причем $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Такая пробная функция существует. По этой пробной функции введем следующую функцию:

$$\varphi_R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad R > 1. \tag{4.9}$$

Будем рассматривать классические решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (4.7). Умножим обе части уравнения (4.7) на пробную функцию (4.9) и проинтегрируем по частям, в результате получим соответствующие равенства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx. \tag{4.10}$$

Все рассматриваемые интегралы существуют в смысле Римана, поскольку носитель функции $\varphi_R(x)$ компактный. Воспользуемся теперь неравенством Гельдера с параметрами

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad q_1 = p, \quad q_2 = p' = \frac{p}{p-1},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R^{1/p}(x)u(x)\frac{\Delta\varphi_R(x)}{\varphi_R^{1/p}(x)}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) вытекают неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx + \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{p'}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx, \tag{4.12}$$

где мы воспользовались арифметическим неравенством Гельдера

$$a\cdot b \leqslant \frac{a^{q_1}}{q_1} + \frac{b^{q_2}}{q_2}, \quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} = 1, \quad a, b \geqslant 0,$$

а также тем, что

$$1-\frac{1}{p} = \frac{1}{p'}, \quad p > 1.$$

Рассмотрим правую часть итогового неравенства в (4.12). Сделаем замену переменных в нём

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

и получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\Delta\varphi_R(x)|^{p'}}{\varphi_R^{p'/p}(x)}\,dx = c_1 R^{N-2p'}, \tag{4.13}$$

$$c_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p'}}{\varphi^{p'/p}(|\xi|^2)}\,d\xi = \int\limits_{1\leqslant|\xi|^2\leqslant 2} \frac{\left|\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2)\right|^{p'}}{\varphi^{p'/p}(|\xi|^2)}\,d\xi,$$

поскольку $\varphi(|\xi|^2) = 1$ при $|\xi| \leqslant 1$ и $\varphi(|\xi|^2) = 0$ при $|\xi| \geqslant 2$. Отметим, что существует функция $\varphi = \varphi(s)$, для которой $0 < c_1 < +\infty$. Из итогового неравенства (4.12) и равенства (4.13) вытекает следующая оценка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_R(x)|u(x)|^p\,dx \leqslant c_1 R^{N-2p'} \to +0 \tag{4.14}$$

при условии

$$N < 2p' \Rightarrow 1 < p < p_{kr} = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad N = 2; \\ N/(N-2), & \text{если} \quad N \geqslant 3. \end{cases}$$

Итак, при $p \in (1, p_{kr})$ в силу теоремы Беппо Леви приходим при $R \to \to +\infty$ к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\,dx = 0 \Rightarrow u(x) = 0.$$

Таким образом, получен аналог теоремы Лиувилля в нелинейном случае. Заметим, что при $p > p_{kr}$ есть результаты о существовании нетривиальных решений уравнения (4.7) в $\mathbb{R}^N$.