Лекция 8

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

В этой лекции мы введём альтернативы Фредгольма и докажем с их помощью существование классических решений задач Дирихле и Неймана в ограниченных и неограниченных областях.

§ 0. План лекции

1. Постановка задач D_i, D_e, N_i **и** N_e.

2. Теоремы единственности задач D_e **и** N_e**.**

3. Альтернативы Фредгольма.

4. Интегральные уравнения теории потенциала.

5. Однозначная разрешимость задач D_i **и** N_e**.**

6. Исследование пары сопряжённых интегральных уравнений D_e **и** N_i.

7. Лемма о размерности решений соответствующих уравнений.

8. Разрешимость внутренней задачи N_i.

9. Лемма о необходимом и достаточном условии разрешимости задачи N_i.

10. Разрешимость внешней задачи D_e.

§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

В этом параграфе мы напомним постановки внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Пусть $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — это замкнутая поверхность, которая делит пространство $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ на две области Ω и $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, причём область Ω ограниченная. В этой лекции мы рассмотрим следующие четыре краевые задачи:

Внутренняя задача Дирихле D_i. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{x \in \Gamma} = \varphi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{1.1}$$

Внешняя задача Дирихле D_e. Найти гармоническую в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$u|_{x \in \Gamma} = \varphi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma) \quad \text{и} \quad |u(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \tag{1.2}$$

Внутренняя задача Неймана N_i. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{x \in \Gamma} = \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{1.3}$$

Внешняя задача Неймана N_e. Найти гармоническую в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{x \in \Gamma} = \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma) \quad \text{и} \quad |u(x)| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \tag{1.4}$$

Наша цель — это доказать теоремы единственности для всех четырёх задач, которые для удобства мы будем называть соответственно D_i, D_e, N_i и N_e. Заметим, что единственность задач D_i и N_i [1)] мы уже доказали во второй лекции, где мы доказали сильный принцип максимума и теорему Жиро о знаке косой производной на границе. Поэтому нам осталось доказать единственность соответствующих внешних задач D_e и N_e.

§ 2. Теоремы единственности решения задач D_e и N_e

Справедливо следующее утверждение:

[1)] Нами было доказано, что всякое решение задачи N_i можно представить в следующем виде: $u(x) + const$, где $u(x)$ — это какое-либо классическое решение задачи N_i.

Теорема 1. *При* $N \geqslant 3$ *задачи* D_e *и* N_e *имеют не более одного решения.*

Доказательство.

Пусть $R > 0$ настолько велико, что $\Omega \subset O_R$, где

$$O_R := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\right\}.$$

Рассмотрим тогда область

$$U_R := O_R \backslash \overline{\Omega}, \quad \partial U_R := \Gamma \cup \partial O_R, \quad \partial O_R := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| = R\right\}.$$

Шаг 1. Единственность задачи D_e. Предположим, что $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ — это два решения задачи D_e. Тогда функция $v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$ решение следующей задачи:

$$\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad x \in U_R, \quad v(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad |v(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{на} \quad |x| = R,$$

где

$$\varepsilon := \frac{c_1}{R^{N-2}}.$$

В силу принципа максимума модуля приходим к выводу о том, что

$$\max_{x \in \overline{U_R}} |v(x)| = \max_{x \in \Gamma \cup \partial O_R} |v(x)| \leqslant \varepsilon = \frac{c_1}{R^{N-2}}, \quad N \geqslant 3.$$

Теперь заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ — фиксированного найдётся достаточно большое $R > 0$, что $x \in U_R$ и при этом

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty \Rightarrow v(x) = 0.$$

Шаг 2. Единственность задачи N_e. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это два решения задачи N_e. Рассмотрим их разность

$$v(x) := u_1(x) - u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче. Предположим, что

$$v(x) \not\equiv const \quad \text{при} \quad x \in U_R = O(0, R) \backslash \overline{\Omega},$$

где $R > 0$ настолько велико, чтобы $\Omega \subset O(0, R)$. Поэтому, с одной стороны, имеет место неравенство

$$\min_{y \in \partial U_R} v(y) < v(x) < \max_{y \in \partial U_R} v(y) \quad \text{при} \quad x \in U_R.$$

С другой стороны, minimum и maximum не может достигаться в точках границы Γ, поскольку тогда в силу леммы Олейник–Хопфа мы бы имели в этих точках

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_{x_0}} \neq 0,$$

что противоречит равенству

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n_x} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma.$$

Значит, и минимум и максимум функции $v(x)$ достигается на границе $\partial O(0, R)$, но на этой границе выполнено следующее неравенство

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \quad \text{при} \quad |x| = R > 0.$$

Стало быть, имеет место следующее неравенство:

$$-\frac{c_1}{R^{N-2}} \leqslant \min_{y \in \partial U_R} v(y) < v(x) < \max_{y \in \partial U_R} v(y) \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}}.$$

Итак,

$$|v(x)| \leqslant \frac{c_1}{R^{N-2}} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}.$$

Следовательно, для всякой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$ в пределе при $R \to +\infty$ мы получим равенство

$$v(x) \equiv 0.$$

Поэтому наше исходное предположение, что $v(x) \not\equiv const$ не верно. Таким образом,

$$v(x) = const.$$

Но снова воспользовавшись убыванием функции $v(x)$ при $|x| \to +\infty$, получим, что

$$v(x) = const = 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Теория Фредгольма. Формулировка результатов

В этом параграфе мы без доказательства сформулируем важную теорему об альтернативах Фредгольма для уравнения Фредгольма второго рода. Итак, пусть

$$K(\varphi): \ \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma) \tag{3.1}$$

— это вполне непрерывный интегральный оператор следующего вида:

$$K(\varphi)(x) := \int\limits_{\Gamma} K(x, \xi)\varphi(\xi)\, dS_\xi, \quad K(x, \xi) := \frac{A(x, \xi)}{|x - \xi|^\lambda}, \quad x \in \Gamma, \tag{3.2}$$

где в нашем случае $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — это замкнутая поверхность Ляпунова, $A(x, \xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \otimes \Gamma)$ и $0 < \lambda < N - 1$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\varphi(x) - \chi K(\varphi)(x) = f(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{3.3}$$

Кроме того, введём соответствующее сопряженное уравнение с союзным оператором

$$\psi(x) - \chi K^*(\psi)(x) = g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma), \tag{3.4}$$

$$K^*(\psi)(x) := \int\limits_{\Gamma} K^*(x,\xi)\psi(\xi)\, dS_\xi : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma), \tag{3.5}$$

где $K^*(x,\xi) := K(\xi,x)$. Дадим определение.

Определение 1. *Число χ называется характеристическим, если существует нетривиальное решение $\varphi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ уравнения* (3.3) *при $f(x) = 0$.*

Справедлива следующая теорема *об альтернативах Фредгольма*:
Теорема 2. *Либо уравнения* (3.3) *и* (3.4) *одновременно разрешимы в $\mathbb{C}(\Gamma)$ при любых правых частях $f(x), g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ и тогда их решения $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ единственны. Либо однородные уравнения*

$$\varphi(x) - \chi K(\varphi)(x) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x) - \chi K^*(\psi)(x) = 0 \tag{3.6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}(\Gamma) \quad \text{и} \quad \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}(\Gamma)$$

соответственно. И в этом случае, для того чтобы уравнение (3.3) (*соответственно* (3.4)) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x)\psi_k(x)\, dS_x = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n}; \tag{3.7}$$

(*соответственно*

$$\int\limits_{\Gamma} g(x)\varphi_k(x)\, dS_x = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{1,n}.) \tag{3.8}$$

При этом общее решение уравнения (3.3) *имеет следующий вид*:

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x), \tag{3.9}$$

а общее решение уравнения (3.4) *имеет следующий вид*:

$$\psi(x) = \psi^*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(x), \tag{3.10}$$

где $\varphi^*(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это какое–либо решение уравнения (3.3), *$\psi^*(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это какое–либо решение уравнения* (3.4), *а $c_1, ..., c_k$ — это произвольные постоянные.*

Следствие. *Из единственности решения уравнения* (3.3) *в классе $\mathbb{C}(\Gamma)$ вытекает однозначная разрешимость уравнений* (3.3) *и* (3.4) *для любых правых частей $f(x), g(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Из единственно-*

сти решения уравнения (3.4) *вытекает однозначная разрешимость уравнений* (3.4) *и* (3.3) *для любых правых частей* $g(x), f(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

§ 4. Интегральные уравнения теории потенциала

Будем искать классическое решение внутренней D_i и внешней D_e задач Дирихле в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = W[\sigma](x) := \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi, \quad \sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma), \tag{4.1}$$

а решение внутренней N_i и внешней N_e задач Неймана в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi, \quad \mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{4.2}$$

Для дальнейшего заметим, что в случае задачи Дирихле (внутренней D_i и внешней D_e) имеем

$$\lim_{x \to x_0 \in \Gamma} u(x) = \varphi(x), \tag{4.3}$$

а в случае задач Неймана (внутренней N_i и внешней N_e) имеем

$$\lim_{x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial n_{x_0}} = \psi(x), \tag{4.4}$$

где в формулах (4.3) и (4.4) в случае соответствующих внутренних задач точка $x \in \Omega$, а в случае внешних задач $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Теперь из предельных свойств потенциала двойного слоя и производной по нормали n_{x_0} потенциала простого слоя мы с учётом (4.3) и (4.4) получим следующие интегральные уравнения для соответствующих задач:

$$(D_i) \quad \sigma(x_0) - \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r_0^{N-2}} \, dS_\xi = -\gamma \varphi(x_0), \tag{4.5}$$

$$(D_e) \quad \sigma(x_0) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r_0^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \varphi(x_0), \tag{4.6}$$

$$(N_i) \quad \mu(x_0) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r_0^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \psi(x_0), \tag{4.7}$$

$$(N_e) \quad \mu(x_0) - \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \frac{1}{r_0^{N-2}} \, dS_\xi = -\gamma \psi(x_0), \tag{4.8}$$

где

$$\gamma := \frac{2}{(N-2)\omega_N}, \quad r_0 := |x_0 - \xi|, \quad x_0 \in \Gamma. \tag{4.9}$$

Сделаем следующие наблюдения:

Наблюдение 1. Все интегральные операторы в уравнениях (4.5)–(4.8) являются интегральными операторами со слабой особенностью.

□ Действительно, ранее нами были получены следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r_0^{N-2}} = -\frac{(N-2)}{r_0^{N-1}}\cos(r_0,\nu_\xi), \quad |\cos(r_0,\nu_\xi)| \leqslant a r_0^\alpha;$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0}}\frac{1}{r_0^{N-2}} = \frac{(N-2)}{r_0^{N-1}}\cos(r_0,n_{x_0}), \quad |\cos(r_0,n_{x_0})| \leqslant a r_0^\alpha. \quad \boxtimes$$

Поэтому в силу теоремы 3 соответствующие интегральные операторы являются вполне непрерывными, действующими из $\mathbb{C}(\Gamma)$ в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Наблюдение 2. Заметим, что ядра

$$K(x_0,\xi) := \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r_0^{N-2}} \quad \text{и} \quad K^*(x_0,\xi) := \frac{\partial}{\partial n_{x_0}}\frac{1}{r_0^{N-2}}$$

являются союзными, т.е. $K^*(x_0,\xi) = K(\xi,x_0)$. Поэтому интегральные уравнения (4.5) и (4.8), соответствующие задачам D_i и N_e, и интегральные уравнения (4.6) и (4.7), соответствующие задачам D_e и N_i являются взаимно сопряженными.

Наблюдение 3. Из первых двух наблюдений мы приходим к выводу о том, что для пар взаимно сопряжённых интегральных уравнений (4.5), (4.8) и (4.6), (4.7) справедлива теорема об альтернативах Фредгольма. Поэтому далее нам нужно рассмотреть указанные интегральные уравнения двух пар задач D_i, N_e и D_e, N_i.

§ 5. Однозначная разрешимость задач D_i и N_e

Поскольку задачам D_i и N_e соответствуют взаимно сопряжённые интегральные уравнения (4.5) и (4.8), то в силу альтернатив Фредгольма их нужно исследовать совместно. Далее во всех интегральных уравнениях (4.5)–(4.8) мы для удобства заменим точку $x_0 \in \Gamma$ на точку $x \in \Gamma$.

Итак, рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее интегральному уравнению (4.8) внешней задачи Неймана N_e. Неизвестную в этом уравнении обозначим через $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$:

$$\mu_0(x) - \gamma \int\limits_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \quad r := |x-\xi|. \tag{5.1}$$

Пусть $\mu_0(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это решение уравнения (5.1). Тогда рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью, равной $\mu_0(\xi)$:

$$V_0(x) := V[\mu_0](x) = \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_{\xi}. \tag{5.2}$$

Равенство (5.1) означает, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x} \right)_e = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{5.3}$$

По теореме единственности для внешней задачи Неймана N_e в силу (5.3) функция

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \tag{5.4}$$

С одной стороны, потенциал простого слоя $V_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$ и поэтому в силу (5.4) имеем

$$V_0(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{5.5}$$

С другой стороны, потенциал простого слоя функция гармоническая внутри Ω. Тогда по теореме единственности для внутренней задачи Дирихле D_i в силу (5.5) имеем

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{5.6}$$

Но тогда, очевидно, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x} \right)_i = \lim_{\Omega \ni y \to x \in \Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial n_x} = 0. \tag{5.7}$$

Следовательно, по следствию из теоремы 2 предыдущей лекции и равенств (5.3) и (5.7) имеет место следующее равенство:

$$0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x} \right)_i - \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x} \right)_e \right] = \mu_0(x). \tag{5.8}$$

Итак, решением однородного уравнения (5.1) в классе $\mathbb{C}(\Gamma)$ является тривиальное решение $\mu_0(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma$. В силу следствия из теоремы об альтернативах Фредгольма мы приходим к выводу о том, что для любых правых частей $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ существуют единственные решения интегральных уравнений (4.5) и (4.8).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 3. *Для любых $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ существуют единственные решения задач D_i и N_e.*

§ 6. Исследование пары сопряжённых интегральных уравнений D_e и N_i

Прежде всего рассмотрим однородное интегральное уравнение (4.6), соответствующее внешней задачи Дирихле D_e:

$$\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N}. \tag{6.1}$$

В силу теоремы 4 (об интеграле Гаусса) лекции 6 это интегральное уравнение имеет нетривиальное решение $\sigma_0(x) = 1$. В соответствии с теоремой об альтернативах Фредгольма однородное интегральное уравнение (4.7), соответствующее внутренней задаче Неймана

$$\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0, \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N} \tag{6.2}$$

также имеет нетривиальное решение $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Размерность пространств решений однородных уравнений* (6.1) *и* (6.2) *равна 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Заметим, что в силу теоремы об альтернативах Фредгольма нам необходимо и достаточно доказать сформулированный результат для однородного уравнения (6.2). Пусть $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — это указанное нетривиальное решение однородного уравнения (6.2). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(x)$

$$V_0(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi, \quad r := |x - \xi|. \tag{6.3}$$

Уравнение (6.2) означает, что

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x} \right)_i = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma. \tag{6.4}$$

Так как $V_0(x)$ — это гармоническая в области Ω функция, то в силу единственности решения внутренней задачи Неймана N_i мы из (6.4) получим, что

$$V_0(x) = c_0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{6.5}$$

где c_0 — это постоянная. Докажем, что *постоянная* $c_0 \neq 0$.

□ Действительно, пусть $c_0 = 0$. Тогда, с одной стороны, из (6.5) мы получим, что

$$V_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega \Rightarrow V_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,$$

где последнее равенство имеет место в силу непрерывности потенциала простого слоя. С другой стороны, имеем $V_0(x)$ — это гармоническая функция в области $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$. Поэтому в силу единственности решения внешней задачи Дирихле D_e имеем

$$V_0(x) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}.$$

Но тогда

$$\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x}\right)_e = \lim_{\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}\ni y\to x\in\Gamma} \frac{\partial V_0(y)}{\partial n_x} = 0. \tag{6.6}$$

Следовательно, по следствию из теоремы 2 предыдущей лекции и равенств (6.5) и (6.6) имеет место следующее равенство:

$$0 = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x}\right)_i - \left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_x}\right)_e\right] = \mu_0(x). \tag{6.7}$$

Что противоречит нетривиальности функции $\mu_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. ⊠

Продолжим доказательство леммы. Предположим, что уравнение (6.2) имеет ещё одно нетривиальное решение $\mu_1(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Рассмотрим потенциал простого слоя с этой плотностью $\mu_1(x)$

$$V_1(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_1(\xi)\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi. \tag{6.8}$$

Повторяя в точности рассуждения, применённые к потенциалу $V_0(x)$, и получим следующее равенство:

$$V_1(x) = c_1 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \tag{6.9}$$

где c_1 — это постоянная. Рассмотрим следующую функцию:

$$\mu_2(x) := c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x) \in \mathbb{C}(\Gamma) \tag{6.10}$$

и соответствующий потенциал простого слоя:

$$V_2(x) := \int\limits_{\Gamma} \mu_2(\xi)\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi = c_1V_0(x) - c_0V_1(x). \tag{6.11}$$

Очевидно, что по построению имеют место свойства (6.5) и (6.9) и поэтому имеем

$$V_2(x) = c_1c_0 - c_0c_1 = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{6.12}$$

Точно также как при доказательстве, что $c_0 \neq 0$ из (6.12) получим, что

$$\mu_2(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma \Rightarrow \mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0}\mu_0(x), \quad c_0 \neq 0.$$

Лемма доказана.

§ 7. Разрешимость внутренней задачи Неймана N_i

Рассмотрим соответствующее внутренней задачи Неймана интегральное уравнение (4.7)

$$\mu(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r_0^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \psi(x) \in \mathbb{C}(\Gamma). \tag{7.1}$$

В силу результата леммы 1 и теоремы об альтернативах Фредгольма для разрешимости этого интегрального уравнения необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma} 1 \cdot \psi(\xi) \, dS_\xi = 0, \tag{7.2}$$

поскольку функция $\sigma_0(x) = 1$ образует базис пространства решений соответствующего сопряженного однородного уравнения (4.6) внешней задачи Дирихле D_e.

Однако, для внутренней задачи Неймана N_e условие (7.2) является пока только достаточным условием разрешимости. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием разрешимости внутренней задачи Неймана N_i является условие* (7.2).

Доказательство. Осталось доказать необходимость.

Пусть задача N_i разрешима и $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это решение. Тогда интегрируя уравнение

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

по области Ω мы получим следующее равенство:

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x) \, dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \, dS_\xi = \int\limits_{\Gamma} \psi(\xi) \, dS_\xi.$$

Теорема доказана.

§ 8. Разрешимость внешней задачи Дирихле D_e

Если искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала простого слоя, то мы приходим к уравнению (4.6):

$$\sigma(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = \gamma \varphi(x), \quad \gamma = \frac{2}{(N-2)\omega_N}, \tag{8.1}$$

но тогда в силу результата леммы 1 для разрешимости уравнения (8.1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi(\xi)\mu_0(\xi)\, dS_\xi = 0, \tag{8.2}$$

где $\mu_0(\xi)$ — это нетривиальное решение соответствующего однородного сопряжённого уравнения

$$\mu_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0. \tag{8.3}$$

Однако, с точки зрения исходной внешней задачи Дирихле D_e условие (8.2) является лишь достаточным условием, а не необходимым. И поэтому либо выполнено условие (8.2) либо решение задачи D_e нельзя искать в виде потенциала двойного слоя.

Теперь мы сделаем ряд нужных для нас предположений. Пусть начало координат $0 \in \Omega$. Будем искать решение внешней задачи Дирихле D_e в следующем виде:

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi + \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\, dS_\xi. \tag{8.4}$$

Заметим, что правая часть равенства (8.4) для любой функции $\sigma(x) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$ является гармонической в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Кроме того, интегральный оператор в правой части равенства (8.4) является оператором со слабой особенностью и поэтому вполне непрерывным из $\mathbb{C}(\Gamma)$ в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Используя предельные свойства потенциала двойного слоя мы для внешней задачи Дирихле D_e получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\sigma(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{1}{|x|^{N-2}} \right] dS_\xi = \gamma\varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{8.5}$$

к которому применима теория альтернатив Фредгольма. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 5. *Внешняя задача Дирихле однозначно разрешима и её решение даётся формулой* (8.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} + \frac{1}{|x|^{N-2}} \right] dS_\xi = 0. \tag{8.6}$$

Пусть $\sigma_0(x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ — произвольное решение однородного уравнения (8.6). Построим следующую функцию:

$$u_0(x) := \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi + \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi. \qquad (8.7)$$

Эта функция является гармонической в области $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. В силу равенства (8.6) имеем

$$u_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \qquad (8.8)$$

В силу единственности решения внешней задачи Дирихле D_e имеем

$$u_0(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \qquad (8.9)$$

Из равенств (8.7) и (8.9) мы приходим к уравнению

$$0 = \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi + \frac{1}{|x|^{N-2}} \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}. \qquad (8.10)$$

Заметим, что

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi \right| \leqslant \frac{A}{|x|^{N-1}} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty.$$

Поэтому из (8.10) имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi = -|x|^{N-2} \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi \to +0 \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty.$$

Итак, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi = 0. \qquad (8.11)$$

В силу (8.11) однородное уравнение (8.6) упрощается и принимает следующий вид:

$$\sigma_0(x) + \gamma \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = 0. \qquad (8.12)$$

Как мы показали в лемме 1 это уравнение имеет лишь одно линейно независимое решение — $\sigma_0(x) = 1$. Тогда общее решение уравнения (8.12) имеет следующий вид:

$$\sigma_0(x) = C, \qquad (8.13)$$

где C — это постоянная. Но тогда из (8.11) и (8.13) вытекает равенство

$$0 = \int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \, dS_\xi = C|\Gamma| \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sigma_0(x) = 0.$$

В силу теоремы об альтернативах Фредгольма уравнение (8.5) однозначно разрешимо в $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Т е о р е м а д о к а з а н а.