МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Н.Н. Нефедов, В.Ю. Попов, В.Т. Волков

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2016

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Нефедов Н.Н., Попов В.Ю., Волков В.Т. **Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Курс лекций **—** М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016. — 200 с.
ISBN 978-5-8279-0134-1

Учебное пособие подготовлено на основе многолетнего опыта чтения авторами общего курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и наиболее полно соответствует программе данного курса, читаемого в настоящее время для студентов физического факультета МГУ.

В книге рассмотрены классические теоремы о существовании и единственности решений некоторых классов дифференциальных уравнений и систем, изложены традиционные методы исследования линейных задач. Наряду с классическими результатами значительное место отведено знакомству с качественной теорией нелинейных дифференциальных уравнений, изучению фазовой плоскости, теории устойчивости, современным асимптотическим методам, что чрезвычайно важно для обучения будущих физиков. Большое внимание авторы уделяют изучению краевых задач, причем, в отличие от традиционных учебников по дифференциальным уравнениям, подробно рассмотрены подходы к исследованию нелинейных краевых задач. Заключительные лекции посвящены рассмотрению линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

При изложении материала используются оригинальные методики доказательств, основанные на применении классических теорем сравнения и современных результатов, полученных на их основе.

Для студентов физических специальностей университетов.

Рецензенты: профессор Н.Х. Розов,
профессор А.В. Тихонравов

ISBN 978-5-8279-0134-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Предлагаемое издание соответствует курсу лекций «Дифференциальные уравнения», читаемому в настоящее время для студентов 2-го курса физического факультета МГУ (4-й семестр).

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения авторами лекций на физическом факультет МГУ. В его основу положены разделы, как традиционно рассматриваемые в курсе дифференциальных уравнений, так и существенно модернизированные специально для данного курса лекций. Среди важных особенностей этого курса следует отметить усиление разделов, где обсуждаются нелокальные постановки начальных задач и использование этих результатов при рассмотрении линейных уравнений и систем. При этом авторам представляется методически важным демонстрация подходов и математических идей на простых примерах и задачах. Более подробное изложение некоторых разделов можно найти в книгах [1-3].

Повышенное внимание уделено методу дифференциальных неравенств, который применяется как в начальных задачах (теоремы Чаплыгина), так и в нелинейных краевых задачах (теорема Нагумо). Последний раздел, на наш взгляд, отражает современную тенденцию применения в приложениях более сложных нелинейных моделей и является введением в аналогичные разделы теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Отметим также подробное рассмотрение качественной теории дифференциальных уравнений, где, наряду с отмеченными выше теоремами о дифференциальных неравенствах, рассматриваются методы исследования дифференциальных уравнений на фазовой плоскости и элементы теории устойчивости. Также существенно переработан и дополнен материал по асимптотическим методам, изложение которого, на наш взгляд, особенно важно для студентов-физиков.

Авторы благодарны за полезные советы в ходе подготовки этого курса лекций В.Ф. Бутузову, А.Б. Васильевой, А.Г. Яголе, А.А. Панину и другим коллегам по кафедре математики физического факультета МГУ, сделавшим ценные замечания, а также М.А. Терентьеву за помощь в оформлении издания.

Авторы

Глава 1. **ВВЕДЕНИЕ**

Лекция 1

§ 1. Понятие дифференциального уравнения. Основные определения

Определение 1. ***Дифференциальным уравнением* (ДУ)** называют уравнение, в котором неизвестная функция находится под знаком производной или дифференциала.

Определение 2. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то уравнение называют ***обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ).**

Примеры.

1) Задачу отыскания всех первообразных $y(x)$ для заданной функции $f(x) \in C[a,b]$ можно записать в виде ОДУ $y' \equiv \dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Как известно из курса математического анализа, это уравнение имеет на $[a,b]$ однопараметрическое семейство решений вида $y(x,C) = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а $C \in R$ – вещественный параметр.

2) Замечательным свойством функции $y(x) = e^x$ является равенство ее своей производной, что позволяет для этой функции записать обыкновенное дифференциальное уравнение $y' = y$, решением которого является любая функция вида $y(x) = Ce^x$. Проверьте это самостоятельно.

3) Поскольку первая производная координаты по времени в механике называется *скоростью*, то прямолинейное равномерное движение со скоростью v описывается ОДУ $\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt} = v$, а его решение, удовлетворяющее *начальному условию* $x(t_0) = x_0$, имеет вид $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$.

4) Аналогично, прямолинейное равноускоренное движение с ускорением a описывается ОДУ $\ddot{x} \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2} = a$, а его решение, удовлетворяющее *начальным условиям* $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ имеет вид $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \dfrac{a(t - t_0)^2}{2}$.

5) Если в уравнении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ переменные x и y считать дифференцируемыми функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметра t, то после дифференцирования обеих частей равенства получится обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее семейство всех окружностей с центром в начале координат:

$$xdx + ydy = 0, \quad \text{или} \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Легко проверить, что одним из решений этих уравнений является пара функций $x = R\sin t$, $y = R\cos t$. Видно, что это пара функций является также решением следующей *системы дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

6) Уравнение малых линейных свободных колебаний без затухания имеет вид $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Проверьте, что его решением является функция $x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$, или $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Убедитесь в том, что сделав замены $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, уравнению $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ можно сопоставить эквивалентную *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

7) Уравнение малых линейных свободных затухающих колебаний имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $0 < \gamma_0 < \omega_0$. Проверьте, что его решением является функция $x(t) = e^{-\gamma_0 t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$, или $x(t) = Ae^{-\gamma_0 t}\sin(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}$. Убедитесь в том, что

сделав замены $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, уравнению $\ddot{x} + 2\gamma_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ можно сопоставить эквивалентную *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2\gamma_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 \ . \end{cases}$$

§ 2. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения

В нашем курсе мы, как правило, будем обозначать неизвестную функцию либо буквой x, тогда независимой переменной будет t; либо буквой y, тогда независимой переменной будет x. Мы будем также использовать сокращенные обозначения

$$\vec{J}^n x = \left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x_t^{(n)}\right) \qquad \text{или} \qquad \vec{J}^n y = \left(y, y', y'', \ldots, y_x^{(n)}\right).$$

В этом случае произвольное дифференциально уравнение с одной неизвестной функцией может быть записано в виде

$$F\left(t, \vec{J}^n x\right) = 0, \qquad \text{или} \qquad F\left(x, \vec{J}^n y\right) = 0.$$

Определение 3. ***Порядком дифференциального уравнения*** называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $F\left(x, \vec{J}^2 y\right) \equiv F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Определение 4. Уравнением, ***разрешенным относительно старшей производной,*** называется ОДУ вида

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y_x^{(n)}\right) \equiv f\left(x, \vec{J}^{n-1} y\right).$$

Определение 5. Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, правая часть которого не содержит явно независимой переменной, называется ***автономным***, т.е.

$$y^{(n)}(x) = f\left(y, y', y'', \ldots, y_x^{(n)}\right) \equiv f\left(\vec{J}^{n-1} y\right).$$

Определение 6. ***Нормальной системой ОДУ*** называют систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y'_n = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

или векторной форме

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}\left(x, \vec{y}\right),$$

где $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \dots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}$, $\vec{f}\left(x, \vec{y}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{pmatrix}$.

Определение 7. Если правая часть нормальной системы не содержит явно независимой переменной, то ее называют ***динамической системой***.

Подчеркнем характерную особенность *обыкновенных дифференциальных уравнений*, отличающую их от прочих уравнений, содержащих производные неизвестных функций: все неизвестные должны быть функциями одного вещественного аргумента; все они и их производные должны входить в уравнение только в виде своих значений в одной и той же переменной точке, которая также может фигурировать в уравнении.

Примеры дифференциальных уравнений, не относящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

1) $\dot{x}(t) = x(2t)$;

2) $\dot{x}(t) = x(t-1)$ – уравнение с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностное уравнение;

3) $\dot{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} x(\tau)\, d\tau$ – интегро-дифференциальное уравнение.

Определение 8. Если в уравнении неизвестная функция зависит от нескольких переменных, то такое уравнение называют ***дифференциальным уравнением в частных производных***.

Примеры дифференциальных уравнений в частных производных.

1) $\left(\vec{A}(\vec{r}), \operatorname{grad} u(\vec{r})\right) = F(\vec{r}, u)$ – уравнение в частных производных 1-го порядка.

2) $\dfrac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left(k(\vec{r}, u, t) \operatorname{grad} u(\vec{r}, t)\right) + F(\vec{r}, u, t)$ – уравнение колебаний (волновое уравнение) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

3) $\dfrac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k(\vec{r}, u, t) \operatorname{grad} u(\vec{r}, t)\right) + F(\vec{r}, u, t)$ – уравнение диффузии, (теплопроводности, Шрёдингера и т.д.) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

4) $\operatorname{div}\left(k(\vec{r}, u) \operatorname{grad} u(\vec{r})\right) = -F(\vec{r}, u)$ – уравнение Пуассона (Лапласа, если $F \equiv 0$) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

5) $\dfrac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dfrac{e}{m}\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right)\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$ – уравнение Власова-Максвелла – уравнение в частных производных 1-го порядка.

§ 3. Общее решение дифференциального уравнения, общий интеграл

<u>Определение 9</u>. ***Решением дифференциального уравнения*** называют функцию, или совокупность функций, обращающих уравнение в тождество.

<u>Определение 10</u>. ***Частное решение дифференциального уравнения*** – конкретная функция, удовлетворяющая уравнению. Например, для ОДУ $y''(x) + 4y(x) = 0$ частными решениями будут функции $y_1 = \pi \sin 2x$, $y_2 = \sqrt{2}\cos 2x$, $y_3 = 3\sin(2x + \pi/4)$, $y_4 = 4\cos(2x - \pi/6)$ и т.д.

Множество решений ОДУ n-го порядка зависит от n произвольных постоянных. Например, множество решений уравнения

$y' = f(x)$ есть $y = F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная функции для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Множество решений *уравнения в частных производных* 1-го порядка определено с точностью до произвольной функции. Так множеством решений уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ является семейство функций вида $u = f(x+y)$ (проверьте самостоятельно), где f – произвольная дифференцируемая функция, например $u = (x+y)^m$, $u = \cos(x+y)$, $u = \sin e^{x+y}$ и т.д.

<u>Определение 11</u>. ***Общим решением*** дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений. Например, общим решением уравнения $y''(x) + 4y(x) = 0$ является функция $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, или $y = A\sin\left(2x + \varphi\right)$, где C_1, C_2, A, φ – произвольные постоянные.

<u>Определение 12</u>. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют ***интегрированием***.

<u>Определение 13</u>. Если уравнение $\Phi\left(x, y, \vec{C}\right) = 0$, где $\vec{C} = \left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ – вектор произвольных параметров, определяет все множество решений соответствующего дифференциального уравнения, то его называют ***общим интегралом*** данного уравнения, а полученное из него параметрическое семейство решений также называют ***общим решением***.

Замечание. Помимо функций, образующих семейство, определенное в 13, возможны еще ***особые решения,*** которые не входят в это семейство ни при каких значениях параметров.

Пример. Рассмотрим уравнение $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$. Проверьте, что его общим решением является функция $y = \left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3$, а функция $y = 0$ будет особым решением. Графическая иллюстрация приведена на рис. 1.

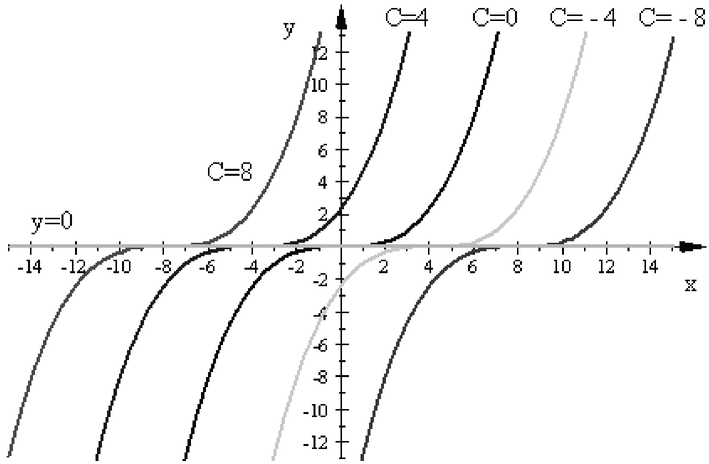


Рис. 1. $\dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$, $y = \left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3$, $y = 0$

В ряде случаев задача интегрирования уравнения первого порядка сводится к исследованию соответствующей неявной функции с помощью первого интеграла.

Определение 14. Функция $F(x,y)$, определенная в области $G \subset R^2$ и не равная в ней постоянной функции, называется ***первым интегралом ОДУ*** первого порядка, если для любого решения $y = \varphi(x)$ этого уравнения, график которого лежит в области G, и для любых $x \in (a,b)$ существует такая постоянная C такая, что $F\big(x, \varphi(x)\big) = C$.

Аналогично формулируется определение первого интеграла для уравнения n-го порядка.

Определение первого интеграла естественным образом переносится на системы, например, на динамические системы.

Определение 15. Функция $V(x)$, $\{V : R^n \to R\}$, определенная и непрерывная в области $D \subset R^n$ и не равная постоянной, называется ***первым интегралом динамической системы*** $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ в области D, если для любого решения $x=\varphi(t)$ этой системы существует постоянная C такая, что $V\big(x(t)\big)=C$ для всех $t\in(a,b)$.

В физических задачах первыми интегралами могут быть энергия, импульс, момент инерции, масса, заряд и т.д. Некоторые примеры даны в таблице.

Уравнение	$y'=f(x)$	$y'=-\dfrac{x}{y}$	$\ddot{x}+\omega_0^2x=0$
Общий интеграл	$y-\int f(x)dx-C=0$	$y^2+x^2-C=0$	$x-C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t=0$ или $x-A\sin\big(\omega_0t+\varphi\big)=0$
Общее решение	$y=\int f(x)dx+C$	$y^2+x^2=C$	$x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t$ ил и $x=A\sin\big(\omega_0t+\varphi\big)$
Частное решение	$y=\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi$	$y^2+x^2=1$	$x=\cos\omega_0t$
Первый интеграл $F(x,y)=const$	$y-\int f(x)dx$	y^2+x^2	$(\dot{x})^2+\omega_0^2x^2$

Замечание 1. В связи с тем, что термин *интеграл* использован в сформулированных выше определениях, для обозначения первообразной (неопределенного интеграла) в курсах дифференциальных уравнений принят термин *квадратура*.

Замечание 2 (*об интегрировании ОДУ в квадратурах*). Выражение общего решения или полного интеграла через элементарные функции и их первообразные (которые, возможно, нельзя выразить через элементарные функции) называют *интегрированием данного уравнения в квадратурах*. Интегрирование в квадратурах допускают лишь уравнения некоторых простейших типов. Большинство же дифференциальных уравнений можно решать только приближенно или исследовать их качественными методами, то есть методами, позволяющими выяснять свойства решений без явного их отыскания. Качественные и приближенные методы составляют основное содержание современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Движение материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(\vec{r})=\big\{F_x(x),F_y(y),F_z(z)\big\}$, которая зависит только от положения точки (не зависит явно от времени), а каждая декартова проекция силы зависит только от соответствующей проекции радиуса-вектора. Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}\right),$$

или в координатах

$$m\ddot{x} = F_x\left(x\right), \qquad m\ddot{y} = F_y\left(y\right), \qquad m\ddot{z} = F_z\left(z\right).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Рассмотрим, например, первое из них и проделаем следующие выкладки

$$m\ddot{x} = F_x\left(x\right) \quad => \quad \dot{x}\cdot\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x\left(x\right)\dot{x} \quad =>$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{m}F_x\left(x\right)\frac{dx}{dt} \quad => \quad d\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{2}{m}F_x\left(x\right)dx \quad =>$$

$$\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{2}{m}\int F_x\left(x\right)dx + C_1 \quad => \quad \dot{x} = \pm\left(\frac{2}{m}\int F_x\left(x\right)dx + C_1\right)^{1/2} \quad =>$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\left(\frac{2}{m}\int F_x\left(x\right)dx + C_1\right)^{1/2} \quad => \quad dt = \pm\frac{dx}{\left(\frac{2}{m}\int F_x\left(x\right)dx + C_1\right)^{1/2}} \quad =>$$

$$t + C_2 = \pm\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{m}\int F_x\left(x\right)dx + C_1\right)^{1/2}}.$$

Это и есть решение, выраженное в квадратурах. Если заданы начальные условия

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad \dot{x}\left(t_0\right) = \dot{x}_0,$$

то решение задачи Коши также выражается в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\left(\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{\xi}F_x\left(\eta\right)d\eta + \left(\dot{x}_0\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Пример 2. Решение уравнения $y' = y^2 - x$ нельзя записать в виде интеграла от элементарной функции, т.е. в квадратурах.

§ 4. Постановка основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дополнительные условия

1⁰. ***Начальная задача (задача Коши)*** (Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик):

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \text{ – уравнение;}$$

$$y(x_0) = Y_0^0, \quad y'(x_0) = Y_1^0 \;, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = Y_{n-1}^0 \text{ – начальные условия.}$$

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y^{2/3} \\ &y(0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x+3}{3}\right)^3$$

– решение задачи существует и единственно.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y^{2/3} \\ &y(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x}{3}\right)^3, \qquad y = 0$$

– решение задачи существует, но не единственно.

2⁰. ***Краевая задача (2-точечная):***

$$y''(x) = f\left(x, y, y'\right), x \in \left(a, b\right)$$

*граничные условия первого рода (**задача Дирихле**):*

$$y(a) = y_a\,, \quad y(b) = y_b\,;$$

*граничные условия второго рода (**задача Неймана**):*

$$y'(a) = y_a\,, \quad y'(b) = y_b\,;$$

граничные условия третьего рода:

$$y'(a) + \alpha y\left(a\right) = y_a\,, \quad y'(b) + \beta y(b) = y_b\,;$$

периодические граничные условия:

$$y(a) = y\left(b\right), \quad y'(a) = y'\left(b\right).$$

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2, \quad x\in(0,1)\\ y(0)=0, \quad y(1)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=x(1-x)$$

– решение задачи существует и единственно.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}=1, \quad x\in(0,1)\\ y'(0)=0, \quad y'(1)=0\end{array}\right\}$$

– решение задачи не существует.

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0, \quad x\in(0,1)\\ y'(0)=0, \quad y'(1)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=C$$

– задача имеет бесконечное множество решений.

3⁰. Периодическая задача

В общем случае задача о периодических решениях – это задача о нахождении T-периодического решения уравнения $\dot{x}=f(t,x)$ с T-периодической по переменной t правой частью $f(t,x)=f(t+T,x)$. Эта задача весьма важна в приложениях, поскольку такие решения описывают периодические колебательные процессы в реальных системах, например, в механических и электрических устройствах.

4⁰. Задача Штурма–Лиувилля (краевая задача на собственные значения)

Оператором Штурма–Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y$, где коэффициенты $p(x)\in C^1[a,b], \quad p(x)>0$, $q(x)\in C[a,b], \quad q(x)\geq 0$.

Поставим вопрос: при каких значениях параметра λ существует нетривиальное решение краевой задачи ($\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$)

$$\begin{cases} Ly+\lambda\rho(x)y=0, \\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0, \qquad \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \end{cases},$$

где $\rho(x)\in C[a,b], \quad \rho(x)>0$.

Такая задача называется *краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма–Лиувилля* (сокращенно – *задача Штурма–Лиувилля*); числа λ_n, при которых существуют нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие <u>нетривиальные</u> решения – *собственными функциями*.

Пример. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad x\in(0,l), \\ y(0)=0, \quad y(l)=0. \end{cases}$$

*Решение***.** В случае $\lambda=-\mu^2<0$ имеем общее решение $y(x)=C_1e^{\mu x}+C_2e^{-\mu x}$. Учитывая граничные условия, получаем единственное решение $y(x)=0$, т.е. собственных функций (и собственных значений) нет.

В случае $\lambda=0$ общее решение рассматриваемого уравнения $y(x)=C_1x+C_2$. С учетом граничных условий получаем $y(x)=0$ – нет собственных функций.

Пусть $\lambda=\mu^2>0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\mu x+C_2\cos\mu x$.

Дополнительные условия дают

$$y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_2=0, \qquad y(l)=0 \;\Rightarrow\; C_1\sin\mu l=0,$$

откуда получаем

$$\sin\mu l=0 \quad\Rightarrow\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l}, \qquad n\in N.$$

Следовательно, искомые собственные значения $\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in N$, а отвечающие им собственные функции имеют вид $y_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{l} x$.

§ 5. Геометрическая интерпретация ОДУ

Определение. Графики решений $y = y(x)$ скалярного ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

называются его ***интегральными кривыми***.

В геометрических терминах данное уравнение выражает следующий факт: *кривая на плоскости* (x, y) *является его интегральной кривой в том и только том случае, когда в любой точке* (x_0, y_0) *этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом* $k = f(x_0, y_0)$ (рис. 1).

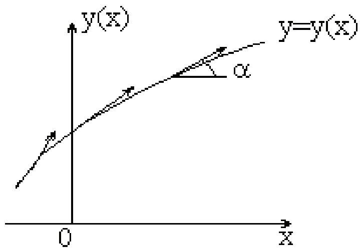


Рис. 1

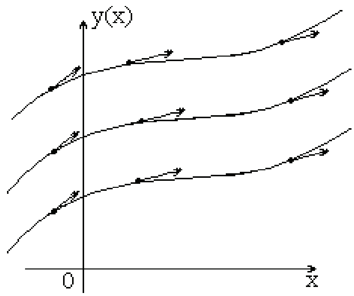


Рис. 2

Таким образом, зная правую часть уравнения (1), можно заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках: для этого каждой точке (x_0, y_0) нужно сопоставить проходящую через нее прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Полученное соответствие между точками плоскости и проходящими через нее прямыми, называется ***полем направлений уравнения*** (1) (рис. 2).

Конечно, фактически поле направлений можно построить лишь в виде достаточно густой сетки отрезков с отмеченными на них точками. После этого задача построения интегральных кривых становится похожей на отыскание нужного пути в большом парке, снабженном густой сетью стрелок-указателей (рис. 2 и 3).

Метод изоклин. Построение поля направлений значительно облегчается предварительным нахождением *изоклин* – кривых на плоскости (x, y), вдоль которых угловой коэффициент k сохраняет неизменное значение. Уравнение изоклин имеет вид $f(x, y) = k$. Вдоль изоклин отрезок, принадлежащий полю направлений, переносится параллельно своему первоначальному положению: переход к другой изоклине осуществляется изменением k и построением отрезка с новым угловым коэффициентом.

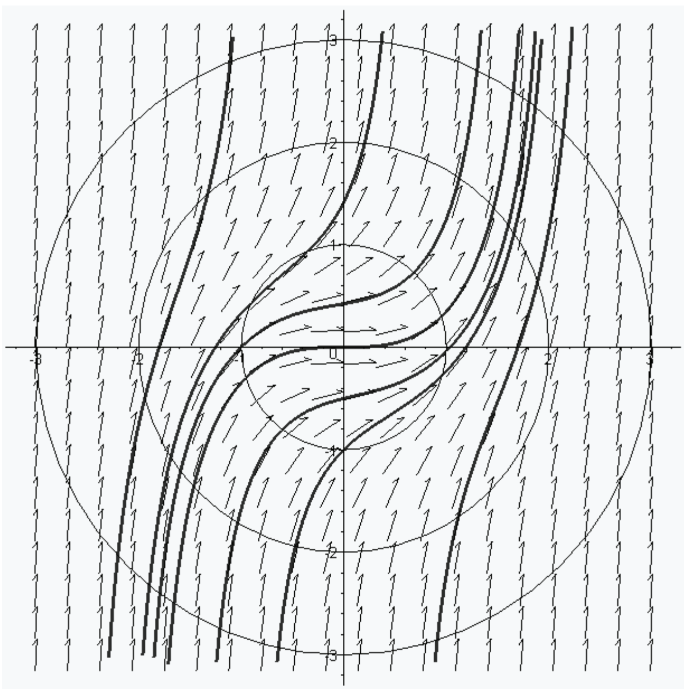


Рис. 3

Пример. Для уравнения $y' = x^2 + y^2$ изоклины описываются уравнением $x^2 + y^2 = k$ и представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. На рис. 3 изображены изоклины (окружности), поля направлений (стрелки) и интегральные кривые (сплошные линии).

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Найдите первый интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x)$.
2. Найдите первый интеграл дифференциального уравнения $$y' = -\frac{x}{y}.$$
3. Найдите первый интеграл уравнения $y'' = f(y)$ в квадратурах.
4. Найдите первый интеграл дифференциального уравнения $y'' + \omega_0^2 y = 0$.
5. Запишите систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, эквивалентную уравнению $y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0$.
6. Запишите систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, эквивалентную уравнению $y'' = f(x, y, y')$.
7. Решите краевую задачу $$y'' = 1 \qquad x \in (0,1); \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$
8. Решите краевую задачу $$y'' = 1 \qquad x \in (0,1); \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$
9. Решите краевую задачу $$y'' = 0 \qquad x \in (0,1); \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$
10. Найдите и изобразите изоклины для уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Лекция 2

§ 6. Примеры задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

Пример 1 (*нормальное размножение*). Пусть x – количество особей в некоторой биологической популяции (например, количество рыб в пруду). При нормальных условиях – достаток пищи, отсутствие хищников и болезней – скорость размножения пропорциональна числу особей, т.е. биосистема описывается уравнением

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0 .$$

Решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет вид $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$ (рис. 1).

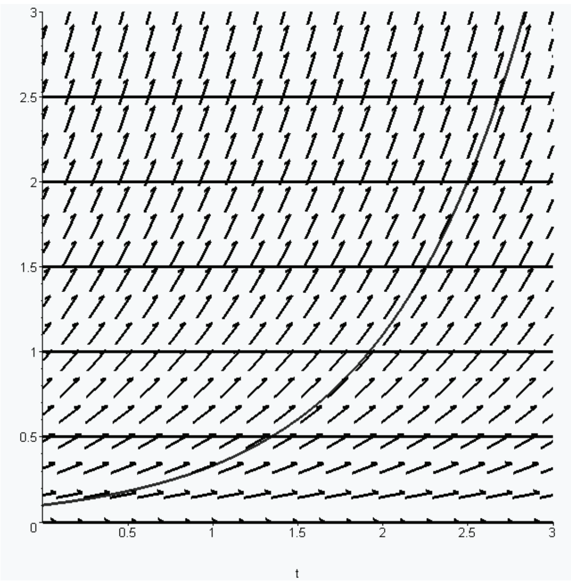


Рис. 1

Пример 2 (*радиоактивный распад*). Пусть x – количество радиоактивного вещества. Тогда скорость распада будет пропорциональна количеству этого вещества:

$$\dot{x} = kx, \quad k < 0 .$$

Как и в примере 1, решением с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет функция $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$ (рис. 2). Время T, необходимое для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое, называется *периодом полураспада* и определяется из уравнения $e^{kT} = 1/2$, т.е. $T = -\dfrac{\ln 2}{k}$. Для радия-226 он составляет 1620 лет, для урана-238 – $4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

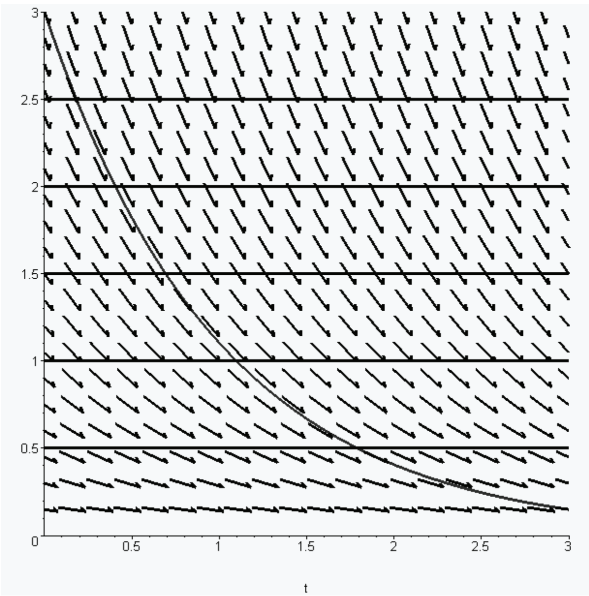


Рис. 2

Пример 3 (*взрыв*). В физико-химических задачах часто встречается ситуация, когда скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов. В задачах динамики популяций в некоторых случаях скорость прироста также пропорциональна не количеству особей, а количеству пар, т.е.

$$\dot{x} = kx^2, \qquad k > 0 \ .$$

В данном случае рост решения происходит гораздо быстрее экспоненциального, и величина $x(t)$ неограниченно возрастает за конечное время: интегральная кривая решения с начальным условием $x(0) = x_0 \neq 0$ описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{kx_0} - t} \qquad (x_0 \neq 0)$$

и имеет вертикальную асимптоту (момент взрыва) $t = \dfrac{1}{kx_0}$ (рис. 3).

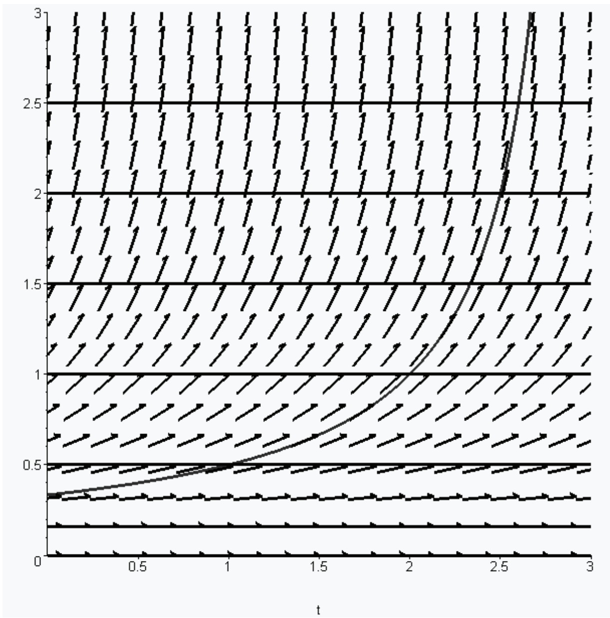


Рис. 3

Пример 4 (*уравнения Лагранжа для механических систем*). Рассмотрим систему из N свободных материальных точек A_j с массами m_j, $j = 1, 2, ..., N$. Пусть в некоторой декартовой инерциальной системе координат (т. е. в такой, где справедлив второй закон Ньютона) радиус-вектор точки A_j есть $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$. Тогда ее скорость и ускорение вычисляются как производные от $\vec{r}_j(t)$: $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j(t)$, $\vec{a}_j = \ddot{\vec{r}}_j(t)$. Допустим, что сумма всех внешних и внутренних сил, приложенных к A_j, есть вектор-функция $\vec{F}_j = \vec{F}_j\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$, где $\vec{r} = \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N\right)$. Тогда данная механическая система описывается, согласно второму закону Ньютона, задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right), \tag{1}$$

$$\vec{r}_j(t_0) = \vec{r}_j^{\,0}, \ \dot{\vec{r}}_j(t_0) = \vec{v}_j^{\,0} \qquad j = 1, 2, ..., N \ .$$

Таким образом, второй закон Ньютона дает общий метод описания механических систем с помощью дифференциальных уравнений. Однако практически бывает удобно рассматривать вместо (1) эквивалентную ей *систему уравнений Лагранжа*, записанную в *обобщенных координатах* $\left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$. Вывод уравнений Лагранжа дается в курсе теоретической механики, а здесь мы только кратко напомним алгоритм построения этих уравнений, состоящий из трех шагов:

1) выражение *кинетической энергии* системы через обобщенные координаты:

$$T = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \vec{v}_j^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{\vec{r}}_j\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + \frac{\vec{r}_j}{\partial \vec{q}}\dot{\vec{q}}\right)^2 \ ;$$

2) вычисление *обобщенных сил*:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n \ ;$$

3) выписывание *уравнений Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \ .$$

Пример 5 (*гармонический осциллятор и математический маятник*). Составим уравнения Лагранжа для двух конкретных механических систем, изображенных на рис. 4.

Гармонический осциллятор – это грузик на гладком стержне, поддерживаемый с двух концов пружинами. Для него в качестве единственной обобщенной координаты q можно взять декартову координату $q = x$; для *маятника* естественно выбрать $q = \varphi$:

осциллятор: $\vec{r} = \left(x, 0, 0\right)$;

маятник: $\vec{r} = \left(l \sin\varphi, 0, -l\cos\varphi\right)$.

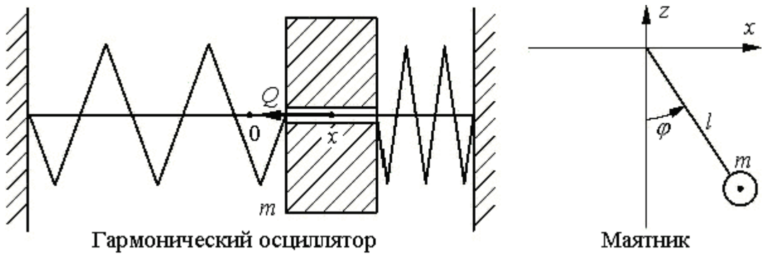


Рис. 4

Для маятника эта функция взаимно однозначна при $\varphi \in (-\pi, \pi)$ или при $\varphi \in (0, 2\pi)$ (две локальные системы координат).

Кинетическая энергия этих механических систем вычисляется по формулам:

осциллятор: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$,

маятник: $T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2$;

а обобщенные силы – по формулам:

осциллятор: $\vec{F} = (-kx, 0, 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0)$, $Q = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = -kx$,

маятник: $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (l \cos\varphi, 0, l \sin\varphi)$,

$$Q = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -mgl \sin\varphi .$$

Для осциллятора получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

и уравнение движения $m\ddot{x} = -kx$, или $m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Для маятника:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

и уравнение движения $ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi$, или $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Если $\varphi \ll 1$, то $\sin\varphi \approx \varphi$, и получаем линеаризованное уравнение колебаний $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$.

Если длина стержня маятника изменяется во времени, т.е. $l = l(t)$, то уравнение движения будет иметь вид $\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \omega^2(t)\sin\varphi = 0$, где $\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l(t)}}$ (получите это самостоятельно).

Пример 6 (*уравнение RLCE-контура*). Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке.

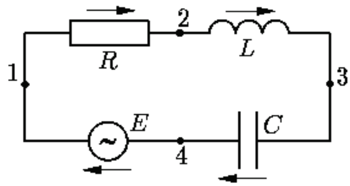


Рис. 5

Она состоит из четырех *двухполюсников*: *сопротивления* ***R***, *индуктивности* ***L***, *емкости* ***C*** и *источника ЭДС* ***E***. Если для двухполюсника A произвольно выбрать *положительное направление*, то в любой момент времени ему можно сопоставить две величины: *напряжение* u_A и *ток* i_A. При смене положительного направления они меняют знак. Каждый из двухполюсников описывается определенным уравнением:

$$u_R = Ri_R, \quad L\frac{di_L}{dt} = u_L, \quad C\frac{du_C}{dt} = i_C, \quad u_E = -e(t).$$

Неотрицательные параметры R, L и C называются, как и сами двухполюсники, сопротивлением, индуктивностью и емкостью; заданная функция $e(t)$ характеризует источник ЭДС. Соединения двухполюсников в цепь описываются двумя *законами Кирхгофа*.

Первый закон Кирхгофа гласит: *сумма токов, втекающих в любой узел, равна нулю*. В рассматриваемом контуре четыре узла, они помечены цифрами. Из закона Кирхгофа для узла 1 следует, что $i_E = i_R$, так как в этот узел *втекают токи* i_E и $-i_R$. Из рассмотрения остальных узлов следует, что ток во всем контуре одинаковый:

$$i_E = i_R = i_C = i_L = i.$$

Второй закон Кирхгофа утверждает, что *сумма напряжений при обходе любого замкнутого контура равна нулю* (положительные направления двухполюсников должны быть согласованы с направлением обхода).

В нашем случае:

$$u_E + u_R + u_C + u_L = 0,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + u_C + Ri = e(t)$$

Из уравнения емкости следует, что

$$i = \frac{du_C}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Введя обозначение $u = u_C$, получаем окончательно

$$LCu'' + RCu' + u = e(t).$$

Это и есть *уравнение RLCE-контура*. В него входит только напряжение емкости *u*; все остальные напряжения и токи вычисляются по известному значению *u*:

$$u_R = Ri, \qquad i = Cu', \qquad u_L = e(t) - u - u_R.$$

Заметим, что при $R = 0$ и $e(t) = 0$ полученное уравнение лишь обозначениями отличается от уравнения гармонического осциллятора. Здесь проявляется универсальность языка дифференциальных уравнений: он выявляет существенные связи между разными уравнениями. В уравнении контура роль величины ω_0 играет $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

На практике, при выводе дифференциальных уравнений помимо строгих законов нередко используются гипотезы и различные приближенные представления.

Пример 7 (*модель биологической системы "хищник-жертва"*).

Приведем вывод уравнений, описывающих изменение численности двух взаимосвязанных биологических видов – *"жертвы"* (N_1) и *"хищника"* (N_2) – по книге известного итальянского математика Вито Вольтерры. Встречающийся в этом выводе термин *"коэффициент прироста"* обозначает отношение N'/N скорости изменения численности вида к его численности. В подобных моделях функцию удобно считать гладкой, хотя на самом деле она принимает целочисленные значения и, следовательно, изменяется скачкообразно. Поскольку модель носит приближенный характер, такая интерпретация допустима.

Если бы в среде, где обитают эти виды, находился только один из них, а именно жертва, то у него был бы некоторый коэффициент прироста $\varepsilon_1 > 0$. Другой вид (хищник), питающийся только жертвой, в предположении, что он существует изолированно, имеет некоторый коэффициент прироста $-\varepsilon_2 < 0$. Когда два такие вида сосуществуют в ограниченной среде, первый будет развиваться тем медленнее, чем больше существует индивидуумов второго вида, а второй — тем быстрее, чем многочисленнее будет первый вид. Гипотеза, довольно простая, состоит в том, что коэффициенты прироста равны соответственно

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2,\ \varepsilon_1 > 0, \gamma_1 > 0 \quad \text{и} \quad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1,\ \varepsilon_2 > 0, \gamma_2 > 0 .$$

Это приводит к системе дифференциальных уравнений для описания численности видов:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1\right)$$

$$N_1\left(t_0\right) = N_1^0,\ N_2\left(t_0\right) = N_2^0 \quad .$$

Решение уравнений в частных производных также часто приводит к необходимости решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пример 8. (*уравнение теплопроводности на отрезке с «холодильниками» на концах*).

Начально-краевая задача для распределения температуры $u(x,t)$ в тонком однородном стержне длины l при заданных (нулевых) температурах на концах отрезка имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \qquad (0 < x < l) ;$$

граничные условия: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$;

начальное условие: $u(x,0) = \varphi(x)$.

Рассмотрим два подхода к решению этой задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1) Преобразование Лапласа. В результате применения преобразования Лапласа, для образа $U(x,p)=\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU(x,p)-\varphi(x)=a^2\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}+F(x,p), \qquad (0<x<l)$$

с граничными условиями $U(0,p)=0$, $U(l,p)=0$,

где $F(x,p)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)e^{-pt}dt$.

Решая эту задачу Коши и обращая преобразование Лапласа (например, по формуле Меллина) получим искомую функцию $u(x,t)$.

2) Метод Фурье. Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности можно искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\psi_n(x)$$

по ортонормированной системе $\{\psi_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2\psi_n}{\partial x^2}+\lambda_n\psi_n=0, \ (0<x<l)$$

$$\psi_n(0)=0, \qquad \psi_n(l)=0.$$

Подставив решение в указанном выше виде в исходное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\psi_n(x)=a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}+f(x,t)$$

и учитывая определение $\{\psi_n(x)\}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\psi_n(x)=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\lambda_n\psi_n(x)+f(x,t)\ .$$

Умножим обе части последнего равенства на $\{\psi_n(x)\}$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до l:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\int_0^l \psi_n(x)\psi_k(x)dx =$$

$$= -a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\lambda_n\int_0^l \psi_n(x)\psi_k(x)dx + \int_0^l f(x,t)\psi_k(x)dx \, .$$

Учитывая условие нормировки $\int_0^l \psi_n(x)\psi_k(x)dx = \begin{cases}0, k \neq n \\ 1, k = n\end{cases}$, и обозначив $\varphi_k = \int_0^l \varphi(x)\psi_k(x)dx$, а $f_k(t) = \int_0^l f(x,t)\psi_k(x)dx$, для определения функций $u_k(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du_k(t)}{dt} + a^2\lambda_k u_k(t) = f_k(t)$$

с начальным условием $u_k(0) = \varphi_k$ (задача Коши).

В частности, решение однородного уравнения теплопроводности (при $f(x,t) \equiv 0$) с граничными условиями первого рода имеет вид

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) .$$

Получите самостоятельно эту формулу.

Глава 2. **УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Лекция 3

§ 1. Простейшие случаи интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

1^0. Уравнения с разделяющимися переменными и приводимые к ним

Уравнения вида $y' = f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения определяются формулой $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно найти постоянную C.

<u>Определение 1</u>. Уравнение вида $Y(y)dy = X(x)dx$ называется ***уравнением с разделяющимися переменными.***

Решение. Пусть решение существует. Тогда, подставляя это решение в записанное выше уравнение, получим общий интеграл

$$X(x)dx - Y(y)dy = 0 \quad => \quad d\left(\int X(x)dx - \int Y(y)dy\right) = 0 \quad =>$$

$$\int Y(y)dy - \int X(x)dx = C\ ,$$

т.е. уравнение проинтегрировано в квадратурах.

В случае задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение определяется соотношением

$$\int\limits_{y_0}^{y} Y(\eta)d\eta - \int\limits_{x_0}^{x} X(\xi)d\xi = 0\,.$$

Уравнения, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или $g(y)\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ риводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Уравнение вида

$y' = f(ax+by)$ также сводится к рассматриваемому типу заменой $ax+by=z$.

<u>Определение 2</u>. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется ***однородным***, если его правая часть удовлетворяет соотношению $f(kx,ky) = f(x,y)$.

Уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является ***однородным***, если $P(kx,ky) = k^{\alpha}P(x,y)$ и $Q(kx,ky) = k^{\alpha}Q(x,y)$. Однородное уравнение приводится к *уравнению с разделяющимися переменными* при помощи замены $z = y/x$ или $z = x/y$.

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ при условии $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ сводится к *однородному* заменой переменных $x = x_0 + t$, $y = y_0 + z$, где x_0 и y_0 – решение системы

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a_1x+b_1y+c_1=0. \end{cases}$$

2⁰. Линейное уравнение первого порядка

<u>Определение 3</u>. Уравнение вида $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y(x) = f(x)$ называется ***линейным***. В случае $f(x) \equiv 0$ данное уравнение называется ***линейным однородным***.

Решим однородное уравнение. Очевидно, что $y(x) = 0$ – решение. Если $y(x) \neq 0$ разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Вычислив квадратуры от обеих частей, получим $\ln|y| = -\int p(x)dx + C$, или $|y| = e^{-\int p(x)dx + C} = e^C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Раскрыв модуль и заменив $\pm e^C$ на произвольную константу C, получим окончательно $y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Покажем, что формула $y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$ дает общее решение задачи. Пусть $\varphi(x)$ – любое решение линейного однородного уравнения первого порядка, т.е. $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} + p(x)\varphi(x) = 0$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \varphi(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$. Тогда

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot e^{\int p(x)dx} + \varphi(x)p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} =$$

$$= \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)p(x) \right) \cdot e^{\int p(x)dx} = 0 .$$

Следовательно,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = C \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = Ce^{-\int p(x)dx} .$$

Решение $y(x) \equiv 0$ получается при $C = 0$.

Решение задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет вид $y(x) = y_0 \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}$.

В том, что это решение, убеждаемся подстановкой. Единственность следует из единственности представления. В частности, при $y_0 = 0$ линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет только нулевое (*тривиальное*) решение.

Получим теперь общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) .$$

<u>Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)</u> (Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) – французский математик, президент Берлинской Академии Наук, почетный член Петербургской Академии наук (1776)).

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем, т.е. решается однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$. Его общее решение было получено выше и выглядит так: $y_0(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Решение неоднородного уравнения $\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=f(x)$ будем искать в виде $y(x)=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$, т.е. формально заменяя постоянную C некоторой функцией от $C(x)$ в формуле общего решения однородного уравнения. Далее, по правилам дифференцирования произведения функций имеем

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляя это соотношение в исходное уравнение, получим

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=f(x)$$

$$\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx}=f(x).$$

Разделяя переменные

$$dC=f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx,$$

найдем

$$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C_1.$$

Подставив последнюю формулу в выражение для $y(x)$, получим общее решение линейного уравнения в виде квадратур:

$$y(x)=C_1\cdot e^{-\int p(x)dx}+\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Метод Бернулли (Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик).

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y=u(x)v(x)$, тогда

$$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+p(x)uv=f(x) \quad \text{или} \quad u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+p(x)u\right)=f(x).$$

Важное замечание: так как функция $y(x)$ была представлена в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, определен неоднозначно. Таким образом, одну из функций можно выбрать так, чтобы

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0 .$$

Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, найдем функцию $u(x)$:

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx \qquad ==> \qquad u = C \cdot e^{-\int p(x)dx} .$$

Для определения второй неизвестной функции $v(x)$ подставим полученное выражение для функции $u(x)$ в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + p(x)u\right) = f(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю, т.е.

$$C \cdot e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx} = f(x) \qquad ==> \qquad Cdv = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx .$$

Интегрируя, найдем функцию $v(x)$:

$$Cv = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \quad ==> \quad v(x) = \frac{1}{C}\left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right).$$

Подставляя функции $u(x)$ и $v(x)$ в формулу для решения, получаем:

$$y = u(x)v(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right),$$

или

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right),$$

где C_1 – произвольная константа.

Легко видеть, что данное представление совпадает с полученным ранее методом вариации постоянной. Анализ структуры решения линейного дифференциального уравнения позволяет сформулировать следующее утверждение.

Принцип суперпозиции. Решение линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения однородного уравнения.

Для задачи Коши с начальным условием $y(x_0)=y_0$ имеет место теорема существования и единственности решения.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)\in C\left(a,b\right)$ и $f(x)\in C\left(a,b\right)$. *Тогда* через каждую точку $\left(x_0,y_0\right)$ полосы $\left(a,b\right)\times R$ проходит одна и только одна интегральная кривая, определенная при всех $x\in(a,b)$.

Доказательство. В силу линейности задачи Коши

$$\begin{cases} y'+p(x)y=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}, \tag{1}$$

представим функцию $y(x)$ в виде суммы $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$, где $y_1(x)$ удовлетворяет *однородной задаче Коши с неоднородным начальным условием*:

$$\begin{cases} y_1'+p(x)y_1=0 \\ y_1\left(x_0\right)=y_0 \end{cases}, \tag{2}$$

а $y_2(x)$ удовлетворяет *неоднородной задаче Коши с однородным начальным условием*:

$$\begin{cases} y_2'+p(x)y_2=f\left(x\right) \\ y_2\left(x_0\right)=0 \end{cases}. \tag{3}$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что решение задачи (2) имеет вид

$$y_1(x)=y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

а решение задачи (3) –

$$y_2(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}\int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{\eta} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta=\int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta .$$

Следовательно, решение задачи Коши (1) существует и может быть получено по формуле

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f(\eta)d\eta .$$

Единственность решения (1) следует из того факта, что задача Коши для однородного уравнения с нулевым начальным условием имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два решения задачи Коши (1). Тогда их разность $h(x) = y_1(x) - y_2(x)$, в силу линейности уравнения, является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dx} + p(x)h = 0 \\ h(x_0) = 0. \end{cases}$$

Поскольку эта задача имеет единственное решение $h(x) \equiv 0$, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$. ■

Замечание. Обозначим $K(x,\eta) = e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi}$ – *импульсная функция (функция Коши).* Тогда общее решение запишется в виде

$$y(x) = \underbrace{CK(x,x_0)}_{Y(x)} + \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} K(x,\eta)f(\eta)d\eta}_{\overline{y}(x)},$$

где $Y(x)$ – общее решение однородного уравнения, $\overline{y}(x)$ – частное решение неоднородного. Решение задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ теперь будет выглядеть так:

$$y(x) = K(x,x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\eta)f(\eta)d\eta .$$

3⁰. Уравнение Бернулли и уравнение Риккати

<u>Определение 4</u>. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^q .$$

Заменой $z=\dfrac{1}{y^{q-1}}$ уравнение Бернулли приводится к линейному. Для этого разделим исходное уравнение на y^q

$$\frac{y'}{y^q}+p(x)\frac{1}{y^{q-1}}=f(x).$$

Выполнив подстановку $z=\dfrac{1}{y^{q-1}}$, с учетом

$$z'=-\frac{(q-1)y^{q-2}}{y^{2q-2}}\cdot y'=-\frac{(q-1)y'}{y^q},$$

получим

$$-\frac{z'}{q-1}+p(x)z=f(x), \quad \text{или} \quad z'-(q-1)p(x)z=-(q-1)f(x)$$

– линейное уравнение относительно неизвестной функции $z(x)$. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$z(x)=e^{-\int p_1(x)dx}\left(\int f_1(x)e^{\int p_1(x)dx}dx+C\right),$$

где

$$p_1(x)=-(n-1)p(x); \qquad f_1(x)=-(n-1)f(x).$$

Решение уравнения Бернулли можно также искать непосредственно, используя описанные выше метод вариации постоянной (Лагранжа) или метод Бернулли.

<u>Определение 5</u>. Уравнение вида $y'+p(x)y+q(x)y^2=f(x)$ называется ***уравнением Риккати***.

Если известно какое либо частное решение $y_1(x)$ уравнения Риккати, то замена $y=y_1(x)+z$ приводит его к уравнению Бернулли относительно функции $z(x)$. В качестве упражнения проделайте соответствующие выкладки самостоятельно.

4^0. Уравнения в полных дифференциалах

<u>Определение 6</u>. Дифференциальное уравнение первого прядка вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется ***уравнением в полных***

дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к построению функции $u = F(x, y)$, после чего решение легко находится в виде $F(x, y) = C$, так как $du = 0$. Таким образом, для решения задачи необходимо определить:

а) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции $u(x, y)$;

б) как найти эту функцию.

а) Если выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, то найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем *необходимое и достаточное условие* того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

б) Рассмотрим один из возможных способов нахождения функции $u = F(x, y)$. Проинтегрировав равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, получим $u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y).$ Заметим, что в последней формуле первообразные отличаются друг от друга не на константу C, а на некоторую функцию $C(y)$, так как при интегрировании переменная y считается параметром.

Определим функцию $C(y)$, для чего продифференцируем полученное равенство по y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y),$$

откуда

$$C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx .$$

Для нахождения функции $C(y)$ теперь необходимо проинтегрировать последнее соотношение. Однако, перед интегрированием надо доказать, что $C(y)$ действительно не зависит от x, что будет выполнено, если производная по переменной x равна нулю. Убедимся в этом, вычислив нужную производную:

$$\left[C'(y)\right]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + \tilde{C} .$$

Подставив этот результат в выражение для u, найдем

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + \tilde{C} .$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = C .$$

Отметим, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, который использовался при ее выводе.

<u>Теорема 2</u>. *Пусть* в прямоугольнике $Q = (a,b)\times(c,d)$ функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, причем всюду в Q выполнено условие $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ и $N(x,y) \neq 0$.

Тогда через каждую точку $\left(x_0, y_0\right) \in Q$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Упражнение 1. Докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения в полных дифференциалах.

<u>Теорема 3</u>. *Пусть* в прямоугольнике $Q = (a,b) \times (c,d)$ функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, причем всюду в Q выполнено условие $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ и $N(x,y) \neq 0$. Выберем произвольную точку $\left(x_0, y_0\right) \in Q$.

Тогда функция $F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(\xi, y)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)d\eta$ является первым интегралом уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Упражнение 2. Докажите теорему о первом интеграле уравнения в полных дифференциалах.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$.
3. Найдите общее решение уравнения $y'' = f(y)$ в квадратурах.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + \omega_0^2 y = 0$.
5. Найдите решение задачи Коши $y' = ky^2, \quad y(0) = y_0$. Нарисуйте эскиз графика решения.
6. Найдите решение задачи Коши $y' = ky^3, \quad y(0) = y_0$. Нарисуйте эскиз графика решения
7. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.
8. Найдите в квадратурах общее решение уравнения
$$y' + p(x)y = f(x).$$
9. Найдите решение задачи Коши
$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$
10. Опишите алгоритм метода вариации постоянной для решения линейного неоднородного уравнения первого порядка. Применяя указанный метод, найдите общее решение уравнения
$$y' = y - x, \qquad y(0) = 1.$$
11. Опишите алгоритм метода вариации постоянной для решения линейного неоднородного уравнения первого порядка. Применяя указанный метод, найдите общее решение уравнения $xy' = y - x^2$.
12. Постройте функцию Коши линейного уравнения первого порядка. Запишите с ее помощью решение задачи Коши
$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$
13. Постройте функцию Коши начальной задачи $y'(t) - y(t) = f(t), \; y(0) = 0$. Запишите с ее помощью решение этой задачи.
14. Постройте функцию Коши начальной задачи
$$y'(t) + y(t) = f(t), \; y(0) = 0.$$
Запишите с ее помощью решение этой задачи.
15. Запишите общий вид уравнения Бернулли и опишите алгоритм его решения. Найдите общее решение уравнения
$$y' - \frac{y}{x} = y^2.$$
16. При каком условии уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах? Запишите его первый интеграл и общее решение.

Лекция 4

§ 2. Теорема существования и единственности решения скалярного уравнения

1^0. Постановка задачи. Основной результат

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$
$$y(x_0) = y_0 .$$

Функция $f(x,y)$ задана в области G плоскости (x,y), содержащей замкнутый прямоугольник $D=\left[x_0-a, x_0+a\right]\times\left[y_0-b, y_0+b\right]$. Предположим, что выполнены следующие ***условия***:

(У1) Пусть $f(x,y)$ непрерывна в области D и, следовательно, равномерно ограничена. Тогда существует постоянная $M = \max\limits_D\left|f\left(x,y\right)\right|$, т.е. $\left|f\left(x,y\right)\right| \le M$ в D.

(У2) Пусть $f(x,y)$ удовлетворяет в D ***условию Липшица*** по переменной y, т.е. $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le N\left|y_1-y_2\right|$, где N – ***постоянная Липшица***, не зависящая от x и y.

Замечание. Из формулы конечных приращений следует, что последнее условие будет выполнено, в частности, если $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \in C\left(D\right)$.

Очевидно, что если интегральная кривая, проходящая через точку $\left(x_0, y_0\right)$, существует, то она не покинет прямоугольник D до точки $x = x_0 + H$, где $H = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ (см. рис. 1).

Действительно, уравнения «крайних» интегральных кривых, удовлетворяющих задаче Коши $\dfrac{dy}{dx} = \pm M$, $y(x_0) = y_0$, имеют вид $y - y_0 = \pm M(x - x_0)$. Подставив уравнения горизонтальных границ области D $y = y_0 \pm b$ в эти уравнения, получим $x = x_0 + \dfrac{b}{M}$.

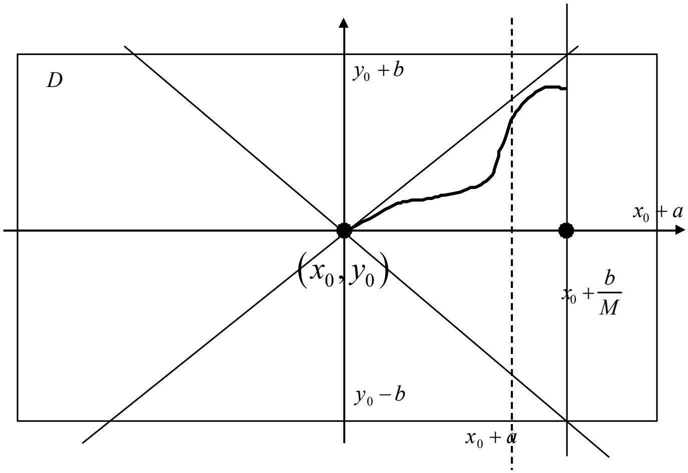


Рис. 1

Теорема 1. *(существования и единственности решения задачи Коши для скалярного ОДУ).*

Пусть выполнены условия **(У1)** и **(У2)**. *Тогда* на отрезке $x_0 - H \le x \le x_0 + H$ существует единственное решение задачи (1).

Следующее утверждение существенно используется при доказательстве сформулированной теоремы.

Лемма 1. *Пусть* функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных в некотором прямоугольнике $D=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$. *Тогда* задача Коши (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(\xi, y(\xi)\right) d\xi \, , \tag{2}$$

которое рассматривается в классе непрерывных функций.

Доказательство. Пусть $y(x)$ – решение (1), целиком лежащее в *D*. Тогда, подставляя его в (1) и интегрируя полученное тождество в пределах от x_0 до $x\in\left[x_0-a,x_0+a\right]$, получим, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2).

С другой стороны, если непрерывная функция $y(x)$ является решением (2), то $f\left(x, y(x)\right)$ также непрерывна, а $\int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y\left(\xi\right)\right) d\xi$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной x. Следовательно, $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$. ■

2⁰. Доказательство теоремы существования решения задачи Коши

Для доказательства теоремы применим *метод последовательных приближений (метод Пикара)*. Определим итерационный процесс метода последовательных приближений так:

$$\begin{aligned} &y_n'(x) = f\left(x, y_{n-1}(x)\right) \\ &y_n(x_0) = y_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где $y_0(x)$ – произвольная непрерывная функция, график которой целиком лежит в области D.

На каждой итерации задача (3) разрешима, и ее решение при $x \in \left[x_0, x_0 + H\right]$ представимо в виде

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y_{n-1}(\xi)\right) d\xi\,. \tag{4}$$

Далее, в силу условия $\left|f\left(x, y\right)\right| \le M$, $\left(x, y\right) \in D$ имеем $\left|y_n'\left(x\right)\right| \le M$. Поэтому интегральная кривая $y_n\left(x\right)$ не покинет угол между диагоналями прямоугольника $\left[x_0 - \dfrac{b}{M}, x_0 + \dfrac{b}{M}\right] \times \left[y_0 - b, y_0 + b\right]$ и, следовательно, $f\left(x, y_{n-1}\left(x\right)\right) \in C\left(\left[x_0 - H, x_0 + H\right]\right)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \le 2b$. В результате получим функциональную некоторую последовательность $\left\{y_n(x)\right\}$. Исследуем ее свойства.

Лемма 2. Функциональная последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $[x_0, x_0+H]$.

Доказательство. Рассмотрим функциональный ряд

$$S(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots,$$

частичная сумма $S_n(x)$ которого совпадает с $y_n(x)$: $S_n(x) \equiv y_n(x)$. Для членов этого ряда справедливы следующие оценки:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le \int_{x_0}^{x} \left| f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0(\xi)) \right| d\xi \le$$

$$\le N \int_{x_0}^{x} |y_1(\xi) - y_0(\xi)| d\xi \le 2bN(x - x_0).$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} \left| f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi)) \right| d\xi \le$$

$$\le N \int_{x_0}^{x} |y_2(\xi) - y_1(\xi)| d\xi \le$$

$$\le 2bN^2 \int_{x_0}^{x} (\xi - x_0) d\xi = 2bN^2 \frac{(x - x_0)^2}{2!} \le 2b \frac{(NH)^2}{2!}.$$

Методом математической индукции можно доказать (*проделайте это самостоятельно*), что

$$|y_{n-1}(x) - y_n(x)| \le \int_{x_0}^{x} \left| f(\xi, y_{n-1}(\xi)) - f(\xi, y_{n-2}(\xi)) \right| d\xi \le$$

$$\le N \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(\xi) - y_{n-2}(\xi)| d\xi \le \frac{2bN^{n-1}}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)^{n-2} d\xi =$$

$$= 2bN^{n-1} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \le 2b \frac{(NH)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (5)$$

Таким образом, члены рассматриваемого функционального ряда мажорируются по абсолютной величине членами сходящегося (например, по признаку Даламбера) числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(NH)^{n-1}}{(n-1)!}$

сумма которого равна e^{KH}. Следовательно, ряд $S_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $\left[x_0, x_0 + H\right]$ (признак Вейерштрасса), а значит, функциональная последовательность $\left\{y_n(x)\right\}$ также сходится равномерно на множестве $\left[x_0, x_0 + H\right]$. ■

<u>**Лемма 3**</u>. Функциональная последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится к непрерывному решению интегрального уравнения (2), записанного выше.

<u>*Доказательство*</u>. Поскольку все функции $y_n(x)$ непрерывны, а функциональная последовательность $\left\{y_n(x)\right\} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} y\left(x\right)$, то $y\left(x\right) \in C\left(\left[x_0, x_0 + H\right]\right)$.

Кроме того, равномерная сходимость последовательности непрерывных функций $\left\{y_n(x)\right\}$ является достаточным условием для перехода к пределу под знаком интеграла в выражении (4). В результате получим

$$y\left(x\right) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi, y(\xi)\right) d\xi ,$$

т.е. предел последовательных приближений $\{y_n(x)\}$ удовлетворяет интегральному уравнению (2), эквивалентному задаче Коши (1). Итак, *существование* решения задачи Коши для скалярного уравнения доказано. ■

3⁰. Единственность решения задачи Коши

Единственность решения задачи Коши вытекает из следующего утверждения.

<u>**Лемма 4**</u>. Интегральное уравнение (2) имеет единственное решение $y(x) \in C\left(\left[x_0, x_0 + H\right]\right)$.

<u>*Доказательство*</u>. Предположим, что имеется два различных решения уравнения (2) $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда их разность $u\left(x\right) = y_1(x) - y_2(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left[f\left(\xi, y_1(\xi)\right) - f\left(\xi, y_2(\xi)\right)\right] d\xi . \qquad (6)$$

Покажем, что интегральное уравнение (6) имеет только тривиальное решение. Доказательство этого факта можно провести с помощью следующей леммы.

<u>Лемма 5</u> (*Гронуолла*). *Пусть* существует постоянная $L > 0$ такая, что для всех $x \in [a,b]$ выполнено неравенство

$$0 \le z(x) \le z_0 + L\int_a^x z(\xi)d\xi\,, \qquad (7)$$

Тогда при $z_0 > 0$ справедлива оценка

$$0 \le z(x) \le z_0 e^{L(x-a)} \qquad (8)$$

В случае $z_0 = 0$ имеет место $z(x) \equiv 0$.

<u>*Доказательство*</u>.

1) Пусть $z_0 > 0$. Положим

$$Y(x) \equiv z_0 + L\int_a^x z(\xi)d\xi > 0, \quad \forall x \in [a,b],\ Y(a) = z_0,$$

тогда в силу (7) имеем $z(x) \le Y(x)$.

Так как $Y(x)$ – дифференцируемая функция, то выполнено $Y' = Lz(x) \le LY(x)$, откуда в силу $Y > 0$, вытекает $\frac{Y'}{Y} \le L$. Далее интегрируя, имеем $\ln Y(x) - \ln Y(a) \overset{Y(a)=z_0}{=} \ln Y(x) - \ln z_0 \le L(x-a)$, откуда после потенцирования с учетом (8) получаем

$$Y(x) \le z_0 e^{L(x-a)} \;\Rightarrow\; z(x) \le Y(x) \le z_0 e^{L(x-a)}, \quad \forall x \in [a,b].$$

2) Пусть $z_0 = 0$. Если (7) выполнено для $z_0 = 0$, то тем более (7) верно при всех $z_0 > 0$, т.е. справедлива оценка (8). Переходя к пределу при $z_0 \to 0$ в (8), получим $0 \le z(x) \le 0$, откуда следует, что $z(x) \equiv 0$. Лемма Гронуолла доказана. ■

Продолжим доказательство леммы 4. Рассмотрим (6), откуда получаем оценку

$$|u(x)| \le \int_{x_0}^x \left| f\left(\xi, y_1(\xi)\right) - f\left(\xi, y_2(\xi)\right) \right| d\xi \overset{\text{усл. Липшица}}{\le} N\int_{x_0}^x |u(\xi)|\,d\xi\,. \qquad (9)$$

Полагая $z(x) = |u(x)|$ и пользуясь леммой Гронуолла для случая

$z_0 = 0$, имеем

$$z(x) \le N \int\limits_{x_0}^{x} z(\xi) d\xi, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + H] \underset{(\text{л. Гронуолла})}{\Rightarrow}$$

$$z(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \equiv 0 \Leftrightarrow y_1(x) \equiv y_2(x).$$

Лемма 4 доказана. ■

Из леммы 4, как было указано в начале параграфа, вытекает единственность решения задачи Коши. Доказательство теоремы существования и единственности задачи (1) завершено.

Замечание 1. Доказательство леммы 4 можно провести и другим способом, не используя лемму Гронуолла. Для этого преобразуем (9) к виду $|u(x)| \le N \cdot (x - x_0) \cdot \max\limits_{[x_0, x]} |u(\xi)|$, откуда получим

$$\max_{[x_0, x_0 + H]} |u(x)| \le N \cdot H \cdot \max_{[x_0, x_0 + H]} |u(x)|, \tag{10}$$

где константа H определена в формулировке леммы 4.

1) Если $N \cdot H < 1$, то (10) выполняется лишь в случае $u(x) \equiv 0$ при всех $x \in [x_0, x_0 + H]$.

2) Если $N \cdot H \ge 1$, то рассмотрим (6) на отрезке $[x_0, x_0 + h]$, где $N \cdot h < 1$. Применяя (10), получим, что $u(x) \equiv 0$ на отрезке $x \in [x_0, x_0 + h]$, а при $x \in [x_0 + h, x_0 + H]$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(x) \equiv y_1(x) - y_2(x) = \int\limits_{x_0 + h}^{x} \left[f\left(\xi, y_1(\xi)\right) - f\left(\xi, y_2(\xi)\right) \right] d\xi.$$

Далее, проведя аналогичные рассуждения, за конечное число шагов $k = [N + 1] + 1$ докажем, что $u(x) \equiv 0$ при $x \in [x_0, x_0 + H]$.

Замечание 2. Условие Липшица может быть заменено более удобным требованием наличия непрерывной в D (и потому ограниченной) производной $\partial f / \partial y$. Тогда существует постоянная $N = \max\limits_{D} |f'_y(x, y)|$ такая, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|$, т.е. выполнено условие Липшица.

Замечание 3. Теорема 1 носит локальный характер. Мы доказали ее в области $D^{+}=\{x_0\le x\le x_0+H,\ \ |y-y_0|\le b\}$. Аналогично можно доказать ее в области $D^{-}=\{x_0-H\le x\le x_0,\ \ |y-y_0|\le b\}$.

4⁰. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть уравнения непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе

Примером утверждения, имеющего нелокальный характер, т.е. в котором устанавливается существование решения на всем промежутке гладкости по x, является следующая теорема.

<u>**Теорема 2**</u>. *Пусть* функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменой y в полосе $\{[x_0,x_0+a],\ \ y\in R\}$. *Тогда* задача (1) имеет единственное решение на отрезке $[x_0,x_0+a]$.

Доказательство этой важнейшей в нашем курсе теоремы лишь незначительно отличается от приведенного выше доказательства Теоремы 1. При организации итерационного процесса (3) в качестве начального приближения можно взять любую непрерывную на отрезке $[x_0,x_0+a]$ функцию $y_0(x)$. Так как определяемая формулой (3) функция $y_1(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0,x_0+a]$ (как и все последующие приближения $y_i(x),\ \ i=2,3,...$), то на всем отрезке $[x_0,x_0+a]$ выполнено неравенство $\left|y_1(x)-y_0(x)\right|\le d$. Это приводит к незначительному изменению в оценке (5): постоянную $2b$ нужно заменить на d , а постоянную H – на a.

Детали этого доказательства читателю предлагается уточнить самостоятельно.

5⁰. Дополнения, примеры, упражнения

Дополнение 1. Можно доказать разрешимость задачи Коши лишь при выполнении условия (У1), т.е. предполагая лишь непрерывность функции $f(x,y)$ в области D (теорема Пеано). Однако, в этом случае решение не обязательно единственно.

Пример 1. (*нарушение единственности решения задачи Коши*). Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{|y|}.$$

Правая часть $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ определена и непрерывна при всех (x,y). Покажем, что условие Липшица не выполняется в прямоугольниках, содержащих точки оси x. Действительно, если условие Липшица выполняется, то при $y_1 \neq y_2$ справедливо неравенство:

$$\frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|} = \frac{2\left|\sqrt{|y_1|}-2\sqrt{|y_2|}\right|}{|y_1-y_2|} \leq L,$$

тогда как при $y_2 = 0$ и $y_1 \to 0$

$$\frac{|f(x,y_1)-f(x,0)|}{|y_1-0|} = \frac{2}{\sqrt{|y_1|}} \ \to \ \infty .$$

Проверьте самостоятельно, что существуют два решения задачи Коши, удовлетворяющие начальному условию $y(0)=0$:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq x_0 \\ -x^2, & x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{y}(x) \equiv 0 .$$

Дополнение 2 (*о продолжении решения*). Решение задачи Коши (1) может быть продолжено, например, вправо за точку $x_1 = x_0 + H$, если условия теоремы существования и единственности выполняются в прямоугольнике $D_1 = \left\{ |x - x_1| \leq a_1, \quad |y - y(x_1)| \leq b_1 \right\}$. В этом случае решение (1) существует и единственно на отрезке $[x_0, x_1 + H_1]$, где постоянная H_1 находится из тех же соображений, что и H в Теореме 1. Заметим, что продолжение решения возможно не всегда даже в случае, если $f(x,y)$ – бесконечно дифференцируемая функция.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Найдем ее точное решение:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ => \ \frac{dy}{y^2} = dx \ => \ \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \ => \ -\frac{1}{y} = x + C \ => \ y(x) = -\frac{1}{x+C}$$

– общее решение данного дифференциального уравнения.

Используя начальное условие $y(0)=1$, получим $C=-1$. Поэтому решение задачи Коши примет вид:

$$y(x)=-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}.$$

Оценим промежуток существования решения задачи Коши в соответствии с Теоремой 1, т.е. найдем параметр H, фигурирующий в этой теореме. Пусть решение задачи Коши на отрезке $x\in[0,H]$ отклонилось от своего начального значения на величину r. Тогда

$$H=\frac{r}{M},\qquad M=(1+r)^2\qquad \Rightarrow\qquad H(r)=\frac{r}{(1+r)^2}.$$

Найдем максимальное значение H:

$$H'(r)=\frac{(1+r)^2-2r(1+r)}{(1+r)^4}=\frac{(1+r)(1+r-2r)}{(1+r)^4}=\frac{1-r}{(1+r)^3}=0\qquad \Rightarrow$$

$$r=1,\qquad H_0=H(1)=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, Теорема 1 гарантирует разрешимость задачи лишь на отрезке $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

Заметим, что из вида точного решения задачи Коши вытекает возможность его продолжения вправо лишь на промежутке $x<1$. Попробуем продолжить его на больший промежуток, последовательно используя Теорему 1. Рассмотрим следующий процесс.

$$x_1=\frac{1}{4},\ \ y_1=y(x_1)=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3},\ H=\frac{r}{M},\quad M=\left(\frac{4}{3}+r\right)^2$$

$$\Rightarrow\qquad H(r)=\frac{r}{(4/3+r)^2}.$$

$$H'(r)=0\quad \Rightarrow\quad r=\frac{4}{3},\qquad H_1=H\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{16},\qquad x\in\left[0,\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right].$$

Далее

$$x_2=\frac{7}{16},\quad y_2=y(x_2)=\frac{1}{1-7/16}=\frac{16}{9},$$

$$H = \frac{r}{M}, \qquad M = \left(\frac{16}{9} + r\right)^2 \quad => \quad H(r) = \frac{r}{(16/9 + r)^2}.$$

$$H'(r) = 0 \quad => \quad r = \frac{16}{9}, \quad H_2 = H\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{9}{64}, \qquad x \in \left[0, \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}\right].$$

Итак, мы построили продолжение решения на больший интервал. Заметим, что на k -м шаге описанного процесса получим

$$H_k = \frac{3^k}{4^{k+1}}, \quad k = 0,1,\dots ,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1.$$

Дополнение 3. Метод последовательных приближений Пикара активно используется при численном решении задачи Коши. После n итераций получается приближенное решение $y_n(x)$, тем более точное, чем больше n.

Пример 3. Рассмотрим снова задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Ее точное решение было получено выше (см. пример 2), и имеет вид

$$y(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Получим решение рассматриваемой задачи, применяя метод последовательных приближений Пикара. Определим итерационный процесс так:

$$\frac{dy_n}{dx} = y_{n-1}^2(x).$$

$$y_n(0) = 1, \qquad n = 1,2,3,\dots .$$

В качестве нулевого приближения возьмем $y_0(x) = 1$. На каждой итерации задача разрешима при $x \in [0, H]$ и ее решение имеет вид:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}^2(\xi)\, d\xi .$$

Проделаем несколько первых итераций:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,d\xi = 1 + x\ ,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1^2(\xi)\,d\xi = 1 + \int_0^x (1+\xi)^2\,d\xi = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}\ ,$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2^2(\xi)\,d\xi = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}\ .$$

Видно, что продолжая этот итерационный процесс, мы все точнее будем приближаться к точному решению, т.е. функции

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1\ .$$

Упражнение 1. Найдите точное решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^3,$$
$$y(0) = 1\ .$$

Методом последовательных приближений Пикара найдите $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Далее с помощью Теоремы 1 оцените промежуток существования решения и попробуйте построить продолжение решения на больший интервал.

Дополнение 4. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

в случае, когда функция $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) раскладывается в степенной ряд

$$f(x,y) = \sum_{j\ge 0}\sum_{k\ge 0} f_{jk}\,(x-x_0)^j\,(y-y_0)^k\ .$$

Такая функция $f(x,y)$ называется *аналитической*. Справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Если функция $f(x,y)$ аналитическая в окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности этой точки существует единственное аналитическое решение задачи Коши (1) вида

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(x - x_0\right)^k .$$

Этот ряд определяет решение задачи Коши лишь при тех значениях переменной x, при которых он сходится.

Разложив $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) в степенной ряд $f(x,y) = \sum\limits_{j\geq 0}\sum\limits_{k\geq 0} f_{jk}\left(x - x_0\right)^j \left(y - y_0\right)^k$, подставив в обе части ряд для $y(x)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов c_k. Очевидно, что эта система имеет единственное решение.

Аналогичная теорема имеет место и для задачи Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \quad, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

в случае, когда правая часть $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ является аналитической функцией в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\right)$.

Пример 4. Рассмотрим еще раз задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1,$$

точным решением которой является $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (см. пример 2).

Построим ее решение, используя Теорему 3. Обозначив $z(x) = y(x) - 1$, для функции $z(x)$ получим задачу Коши:

$$\frac{dz}{dx} = \left(z+1\right)^2 = 1 + 2z + z^2,$$

$$z(0) = 0 .$$

В окрестности точки $(0,0)$ выполнены все условия Теоремы 3, что позволяет искать решение в виде степенного ряда

$$z(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \ .$$

Подставив данный ряд в обе части уравнения, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k + \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)^2 .$$

Выпишем несколько первых слагаемых сумм справа и слева:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots \ = \ 1 + 2c_1 x + 2c_2 x^2 + 2c_3 x^3 + \ldots + c_1 x^2 + 2c_1 c_2 x^3 + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \ \ldots \ , \ c_k = 1, \ \ldots .$$

Таким образом,

$$z(x) = x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}, \qquad x < 1 ,$$

и решением задачи является

$$y(x) = z(x) - 1 = \frac{x}{1-x} - 1 = \frac{1}{1-x} .$$

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f\left(x, y\right)$. Проверьте выполнение условий этой теоремы в случае $y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 0$ и решите указанную задачу Коши.
2. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f\left(x, y\right)$. Проверьте выполнение условий этой теоремы в случае $y' = y - x, \quad y(0) = 1$ и решите указанную задачу Коши.
3. Решите задачу Коши $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$. Покажите, что решение данной задачи не единственно. Объясните результат.
4. Решите задачу Коши $y' = \sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 0$. Покажите, что решение данной задачи не единственно. Объясните результат.

5. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Используя результат теоремы, оцените максимальный интервал существования решения задачи Коши $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Сравните с результатом точного решения задачи.
6. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Используя результат теоремы, оцените максимальный интервал существования решения задачи Коши $y' = y^3$, $y(0) = 1$. Сравните с результатом точного решения задачи.
7. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Используя результат теоремы, оцените максимальный интервал существования решения задачи Коши $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$. Сравните с результатом точного решения задачи.
8. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Используя результат теоремы, оцените максимальный интервал существования решения задачи Коши $y' = 2y^2 - x$, $y(0) = 1$. Сравните с результатом точного решения задачи.
9. Используя теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ выясните, могут ли графики двух различных решений уравнения $y' = x + y^2$ пересекаться либо касаться в некоторой точке (x_0, y_0) плоскости xOy.
10. Для задачи Коши $y' = y^2$, $y(0) = 1$:
    а) найдите точное решение;
    б) найдите несколько первых членов метода последовательных приближений.
11. Для задачи Коши $y' = y^3$, $y(0) = 1$
    а) найдите точное решение;
    б) найдите несколько первых членов метода последовательных приближений.

Лекция 5

§ 3. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий

1⁰. Постановка задачи

Простейшим примером параметра, от которого зависит решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0 = \mu \ ,$$

является начальное значение. Выбирая различные значения $y_0 = \mu$, получаем семейство решений $y(x, \mu)$, зависящее от параметра μ.

От различных параметров могут зависеть также и правые части уравнения, т.е. $f = f(x, y, \mu)$. При этом часто некоторые величины, входящие в правую часть уравнения, определяются экспериментально и, следовательно, известны с погрешностью. Поэтому вопрос о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров важен и с практической точки зрения.

Покажем, что изучение зависимости решения от параметров, содержащихся в правой части и начальных условиях, может быть проведено единым образом. Действительно, если в задаче Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0 = \mu,$$

сделать замену $z = y - \mu$, то для новой функции z получим задачу

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z + \mu) \equiv f(x, z, \mu),$$
$$z(x_0) = 0,$$

в которой от параметра теперь зависит правая часть уравнения. Поэтому далее будем рассматривать следующую задачу Коши с параметром в правой части:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \qquad\qquad (1)$$
$$y(x_0) = y_0 \quad ,$$

2^0. Теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра

Рассмотрим задачу (1) при следующих ***условиях***.

(У1). Функция $f(x,y,\mu)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в области $\bar{D}=\{|x-x_0|\le a,\quad |y-y_0|\le b,\quad |\mu-\mu_0|\le c\}$ и, следовательно, ограничена, т.е. существует постоянная $M=\max\limits_{\bar{D}}|f(x,y,\mu|$.

(У2). Функция $f(x,y,\mu)$ удовлетворяет в области $\bar{D}$ условию Липшица

$$\left|f(x,y_1,\mu)-f(x,y_2,\mu)\right|\le N\left|y_1-y_2\right| ,$$

где постоянная N не зависит от параметра μ на отрезке $|\mu-\mu_0|\le c$.

Теорема 1. *Пусть* выполнены условия (У1) и (У2).

Тогда на отрезке $[x_0,x_0+H]$, где $H=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, существует единственное решение задачи (1), непрерывное по параметру μ при $|\mu-\mu_0|\le c$.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см. §2) и основано на равномерной сходимости функциональной последовательности

$$\{y_n(x,\mu)\}:\qquad y_n(x,\mu)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f\left(\xi,y_n(\xi,\mu),\mu\right)d\xi\ .$$

Замечание. Результат теоремы очевидным образом обобщается на случай, когда правая часть зависит от нескольких параметров, т.е. $\vec{\mu}=\{\mu_1,\mu_2,...,\mu_m\}$, среди которых $\mu_i=y_0$.

Теорема 2. *Пусть* функция $f(x,y,\mu)$ непрерывна и при каждом $|\mu-\mu_0|\le c$ удовлетворяет условию Липшица в полосе $[x_0,x_0+a],\quad y\in R$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение на отрезке $[x_0,x_0+a]$, непрерывное по параметру μ.

Для доказательства этой теоремы достаточно повторить доказательство теоремы 2 из §2.

§ 4. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств

1^0. Постановка задачи

Теоремы сравнения, лежащие в основе принципа сравнения, играют важную роль в исследовании различных классов нелинейных задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Они гарантируют существование (а при некоторых естественных требованиях и единственность) решения задач при условии существования так называемых верхних и нижних решений. Этот подход в исследовании нелинейных дифференциальных уравнений носит также название метода дифференциальных неравенств и является развитием идей метода «вилки» решения нелинейных конечных уравнений.

Указанный метод будет продемонстрирован нами на примере решения задачи Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка. Эта задача впервые с точки зрения метода дифференциальных неравенств была рассмотрена С.А. Чаплыгиным в начале 20-х годов прошлого века и положила начало одному из наиболее эффективных методов качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений. Отметим, что важность этих результатов подчеркивалась одним из основоположников курса дифференциальных уравнений на физическом факультете МГУ академиком А.Н. Тихоновым, по инициативе которого теоремы Чаплыгина были включены в основной учебник для студентов-физиков [1].

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad 0 < x \le a, \\
&y(0) = y_0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Основной особенностью задачи (1) является то, что она рассматривается на фиксированном промежутке времени $0 \le x \le a$ и значение a входит в постановку задачи. Такая постановка является естественной для приложений, где задача (1) может выступать в качестве математической модели. Классическая теорема существования и единственности (см. Теорему 1 из §2, лекция 3), являющаяся локальной и гарантирующая существование решения в некоторой достаточно малой окрестности начальной точки, как правило, становится мало пригодной.

Напомним формулировки двух теорем, доказанных выше (см. Теоремы 1 и 2, лекция 4).

Теорема 1. *Пусть* функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $D=\{0\le x\le a,\ |y-y_0|\le b\}$ и, следовательно, существует постоянная $M=\max\limits_D|f(x,y)|$. Пусть, кроме того, функция $f(x,y)$ удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|.$$

Тогда на промежутке $0\le x\le\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

Очевидно, что при больших значениях M сформулированная теорема дает слишком грубую оценку промежутка существования решения. Это особенно ярко проявляется для так называемых сингулярно возмущенных задач, когда правая часть имеет вид $\dfrac{1}{\mu}f(x,y)$, где μ – малый параметр. В этом случае $M\sim\dfrac{1}{\mu}$ и, следовательно, промежуток существования решения, гарантированный этой теоремой, имеет оценку $H\sim\mu$, т.е. является асимптотически малым.

Теорема 2. *Пусть* функция $f(x,y)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y в полосе $\{0\le x\le a,\ \ -\infty<y<+\infty\}$.

Тогда на промежутке $0\le x\le a$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

Данная теорема уже не является локальной, однако класс функций $f(x,y)$, удовлетворяющих сформулированным в ней условиям, достаточно узкий. Поэтому во многих случаях более эффективным для исследования задачи (1) является метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. Изложение этого подхода начнем со следующего классического результата.

2^0. Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах

Теорема 3 (*сравнения, Чаплыгина*). *Пусть* существует классическое решение $y(x)$ задачи (1) и существует функция $z(x)$ такая, что

$$z(x) \in C^1\left(0;a\right] \cap C\left[0;a\right], \quad z(0) < y_0$$

$$\text{и} \quad \frac{dz}{dx} < f(x, z(x)), \quad x \in \left(0;a\right].$$

Тогда при всех $x \in [0;a]$ имеет место неравенство $z(x) < y(x)$.

Доказательство. При $x = 0$ неравенство выполняется. Пусть оно первый раз нарушается в точке $x_1 \in \left(0, a\right]$, т.е. имеем $z(x_1) = y(x_1)$. Это означает, что при $x = x_1$ кривые $y = y(x)$ и $y = z(x)$ либо пересекаются, либо касаются. Следовательно,

$$\frac{dz}{dx}(x_1) \geq \frac{dy}{dx}(x_1) = f(x_1, y(x_1)) = f(x_1, z(x_1)),$$

что противоречит условию теоремы. ■

Замечание. С.А. Чаплыгин называл функцию $z(x)$ *нижней функцией*. Аналогично определяется *верхняя функция*.

3^0. Теорема Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши

Используя результат Теоремы 3 можно доказать теорему существования и единственности решения задачи (1). Для этого нам понадобится определение нижнего и верхнего решений. Так в современной литературе принято называть нижние и верхние функции Чаплыгина.

Определение 1. Функция $\alpha(x) \in C^1\left(0, a\right] \cap C[0, a]$ называется ***нижним решением*** задачи (1), если выполнены неравенства

$$\frac{d\alpha}{dx} < f(x, \alpha(x)), \quad 0 < x \leq a, \quad \alpha(0) < y_0.$$

Определение 2. Функция $\beta(x) \in C^1\left(0, a\right] \cap C[0, a]$ называется ***верхним решением*** задачи (1), если выполнены неравенства

$$\frac{d\beta}{dx} > f(x, \beta(x)), \quad 0 < x \leq a, \quad \beta(0) > y_0.$$

Замечание. Используя схему доказательства теоремы сравнения, можно показать, что между нижним решением $\alpha(x)$ и верхним решением $\beta(x)$ имеет место неравенство $\alpha(x) < \beta(x)$.

Теорема 4 (*существования и единственности, Чаплыгина*). *Пусть* существует нижнее $\alpha(x)$ и верхнее $\beta(x)$ решения задачи (1), такие что $\alpha(x) < \beta(x)$, $x \in [0;a]$. *Пусть* функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y т.е. при каждом $x \in [0;a]$ выполнено неравенство

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|, \qquad y_1, y_2 \in \left[\alpha(x), \beta(x)\right].$$

Тогда задача Коши (1) имеет единственное решение $y(x)$, причем

$$\alpha(x) < y(x) < \beta(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Доказательство. Продолжим $f(x,y)$ так, чтобы она была непрерывна и удовлетворяла условию Липшица в полосе $\left\{0 \le x \le a, \quad -\infty < y < +\infty\right\}$, и рассмотрим вместо (1) задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = h(x,y), \qquad 0 < x \le a, \\ &y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где функция $h(x,y)$ выбрана, например, так:

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,\beta(x)) + (y - \beta(x)), & y \ge \beta, \\ f(x,y), \quad \alpha \le y \le \beta, \ (0 \le x \le a) & , \\ f(x,\alpha(x)) + (y - \alpha(x)), & y \le \alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $h(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \max(N;1)$, где $N-$ постоянная Липшица функции $f(x,y)$, введенная в условии теоремы. В силу Теоремы 2 решение задачи (2) существует и единственно. Это решение, лежащее в начальный момент между нижним и верхним решением, не может покинуть область между ними в силу Теоремы 3. Поэтому для указанных значений y имеет место равенство $h(x,y) = f(x,y)$, т.е. решение задачи (2) является решением задачи (1). ■

Замечание 1. Можно показать, что в определении верхнего и нижнего решений допустимы нестрогие знаки неравенств. В частности, в качестве нижнего (верхнего) решения задачи (1) может быть взято решение уравнения в (1) $y^*(x)$, которое в начальный момент $y^*(0) < y_0 \quad \left(y^*(0) > y_0\right)$. Действительно, в этом случае предположение о том, что кривая $y = y^*(x)$ пересекает кривую $y = y(x)$ в некоторой точке x_1, приводит к нарушению условия единственности решения в окрестности этой точки.

Замечание 2. Пусть нижнее и верхнее решения определены на множестве $0 \le x < \infty$, а функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной y с константой N, не зависящей от x. Тогда Теорема 4 остается справедливой на всем промежутке $0 \le x < \infty$. Этот факт будет использован далее при изучении некоторых задач теории устойчивости.

4⁰. Примеры

Пример 1. Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dx} = -y^2, \quad 0 < x \le a,$$
$$y(0) = y_0 > 0,$$

точным решением которой является $y(x) = \dfrac{1}{x + 1/y_0}$.

Классическая теорема существования и единственности дает оценку для промежутка существования решения $0 \le x \le \dfrac{1}{4y_0}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Заметим также, что условие Липшица в полосе $\{0 \le x \le a, \ -\infty < y < +\infty\}$ не выполняется.

Выберем в качестве нижнего решения функцию $\alpha = 0$ (см. замечание 1). Действительно, соответствующее определение выполняется, так как $\dfrac{d\alpha}{dx} - f(x, 0) = 0$.

В качестве верхнего решения возьмем $\beta(x) = d = \text{const} > y_0$. Определение верхнего решения тоже выполнено: $\dfrac{d\beta}{dx} - f(x,\beta) = 0 + d^2 > 0$.

Так как частная производная $f_y(x,y) = -2y$ ограничена при $y \in [0;d]$ и $0 \le x \le a$, где $a > 0$ – любое число, то функция $f(x,y) = -y^2$ удовлетворяет условию Липшица в этой области. Отсюда на основании Теоремы 4 можно утверждать, что при всех $0 \le x < \infty$ существует решение $y(x)$, причем $0 \le y(x) \le d$.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad 0 < x \le a,$$
$$y(0) = y_0,$$

где функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2 и при каждом x имеет вид, изображенный на рис. 1.

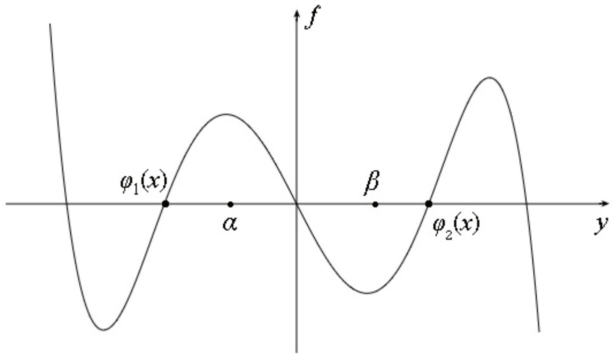


Рис. 1

Пусть $\varphi_1(x)$ – *наибольший отрицательный* корень уравнения $f(x,y) = 0$, $\varphi_2(x)$ – *наименьший положительный* корень этого уравнения. Обозначим $\varphi_* = \max\limits_{[0,a]} \varphi_1(x)$, $\varphi^* = \min\limits_{[0,a]} \varphi_2(x)$ и предположим, что начальное значение y_0 удовлетворяет условию $\varphi_* < y_0 < \varphi^*$. Тогда существует постоянная $\varepsilon > 0$ такая, что $\varphi_* + \varepsilon < y_0 < \varphi^* - \varepsilon$. Выберем в качестве нижнего решения функцию

$\alpha = \varphi_* + \varepsilon$, а в качестве верхнего функцию $\beta = \varphi^* - \varepsilon$. В силу того, что $f(\alpha) > 0$, а $f(\beta) < 0$ (см. рисунок), соответствующие дифференциальные неравенства выполнены. Поэтому из теоремы Чаплыгина (Теорема 4) следует, что существует решение рассматриваемой задачи $y(x)$, удовлетворяющее неравенствам $\varphi_* < y(x) < \varphi^*$.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Сформулируйте теорему Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши. Докажите, что решение начальной задача $y' = -y^2$; $y(0) = 1$ существует на любом сегменте $0 \le x \le a$, причем выполнено неравенство $0 \le y(x) \le 1$.
2. Используя теорему Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши, докажите, что существует единственное решение начальной задачи $y' = y^3 - y$; $y(0) = 0.3$, удовлетворяющее неравенству $-1 < y(x) < 1$.
3. Используя теорему Чаплыгина о существовании и единственности решения задачи Коши, докажите, что существует единственное решение начальной задачи $y' = y^2 + 2y$; $y(0) = -1$, удовлетворяющее неравенству $-2 < y(x) < 0$.

Лекция 6

§ 5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ

1⁰. Постановка задачи

Задача Коши для нормальной системы ОДУ

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(t, \vec{x}\right), \tag{1}$$

состоит в отыскании решения $\vec{x} = \vec{x}(t)$, удовлетворяющего *начальным условиям*

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 . \tag{2}$$

В задаче (1)–(2) введены обозначения: $\vec{x} = \left\{x^1, \ldots, x^m\right\}$, $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right) = \left\{f^1\left(t, \vec{x}\right), \ldots, f^m\left(t, \vec{x}\right)\right\}$, где верхние индексы – номера координат вектора, а вектор-функция $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ задана в области G $\left(m+1\right)-$мерного пространства переменных $\left(t, \vec{x}\right)$. Далее также будем использовать норму вектора $\left\|\vec{y}\right\| = \max\limits_i \left|\vec{y}^i\right|$ и норму вектор-функции $\left\|\vec{f}(t, \vec{x})\right\| = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \max\limits_{t\in[a;b]} \left|\vec{f}^i(t, \vec{x})\right|$.

Предположим, что выполнены следующие ***условия***.

(У1) *Пусть* $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ определена и непрерывна в замкнутом $\left(m+1\right)$-мерном параллелепипеде $D = \left\{|\, t - t_0 \,| \le a,\ |\, x^i - x_0^i \,| \le b_i\right\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ т.е. существует постоянная M такая, что $\left\|\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)\right\| \le M$ в D.

(У2) *Пусть* $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ удовлетворяет ***условию Липшица***, т.е. существует постоянная $N > 0$, не зависящая от i такая, что всюду в замкнутом параллелепипеде D для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ выполнено неравенство

$$\left|f^i\left(t, \vec{y}\right) - f^i\left(t, \vec{z}\right)\right| \le N \cdot \sum_{j=1}^{m} |\, y^j - z^j \,| .$$

Замечание 1. Условие (У2) будет выполнено, в частности, если все частные производные $\dfrac{\partial f^i(t,\vec{x})}{\partial x^j}$ непрерывны в D.

Замечание 2. Так же, как и для скалярного случая, имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть вектор-функция $\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)$ удовлетворяет (У1) в D. Тогда задача Коши для системы (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$\vec{x}\left(t\right)=\vec{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\vec{f}\left(\tau,\vec{x}\left(\tau\right)\right)d\tau \qquad (3)$$

в классе непрерывных функций.

Доказательство практически дословно повторяет доказательство аналогичной леммы из §2.

Теорема 1. *Пусть* выполнены условия (У1) и (У2). *Тогда* решение задачи (1)–(2) существует и единственно на отрезке $\left[t_0-H;\,t_0+H\right]$.

Доказательство можно провести с помощью метода последовательных приближений аналогично доказательству Теоремы 1 в §2 для скалярного случая. Здесь мы докажем эту теорему с помощью *принципа сжимающих отображений*, который подробно рассмотрен в курсе «Интегральные уравнения. Вариационное исчисление» (см. [5]).

2⁰. Принцип сжимающих отображений

Напомним основные понятия, следуя указанному выше курсу лекций. Пусть задан, вообще говоря, нелинейный оператор $\hat{\Phi}$ с множеством определения D, лежащем в *банаховом* пространстве B.

Определение 1. Элемент (точка) $y\in B$ называется неподвижной точкой оператора $\hat{\Phi}$, если $\hat{\Phi}(y)=y$.

Определение 2. Оператор $\hat{\Phi}$ называется сжимающим (или сжимающим отображением) на множестве D, если существует постоянная $q \in (0;1]$ такая, что для любых элементов $y_1,\, y_2 \in D$ выполняется неравенство $\left\|\hat{\Phi}(y_1) - \hat{\Phi}(y_2)\right\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Следующая теорема является незначительной модификацией теоремы о неподвижной точке, доказанной в курсе лекций по интегральным уравнениям, например, в §9 (лекция 6) из учебника [5].

Теорема 2 (*о неподвижной точке*). *Пусть* оператор $\hat{\Phi}$ отображает замкнутое подмножество D банахова пространства B в себя и является сжимающим в D. *Тогда*:

1) в D существует единственная неподвижная точка $y:\ \hat{\Phi}(y) = y$ оператора $\hat{\Phi}$;

2) эта точка может быть найдена методом последовательных приближений $y_{n+1} = \hat{\Phi}(y_n)$, где $y_0 \in D$ – произвольная фиксированная точка, и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y:\ y = \hat{\Phi}(y)$.

3⁰. Доказательство Теоремы 1

Определим оператор $\hat{\Phi}(\vec{x})$, действующий в пространстве непрерывных векторных функций

$$\hat{\Phi}(\vec{x}) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(\tau, \vec{x}(\tau)\right) d\tau \tag{4}$$

Теперь задачу решения интегрального уравнения (3) можно рассматривать как задачу нахождения неподвижной точки оператора $\hat{\Phi}(\vec{x})$.

Обозначим $H = \min\left\{a, \dfrac{\min\limits_i b_i}{M}\right\}$. Аналогично тому, как было сделано в §2, можно показать, что если решение задачи (1)–(2) существует, то интегральная кривая находится в параллепипеде $D_H = \left\{|t - t_0| \le H,\ \ |x^i - x_0^i| \le b_i,\ \ i = 1, 2, ..., m\right\}$. Таким образом, оператор $\hat{\Phi}(\vec{x})$ действует на множестве непрерывных функций, графики которых лежат в замкнутом параллелепипеде D_H.

Покажем, что если H достаточно мало, то оператор $\hat{\Phi}(\vec{x})$ является сжимающим. Действительно, для любых $\vec{x},\, \vec{y} \in D_H$ имеем:

$$\left\|\hat{\Phi}(\vec{x})-\hat{\Phi}(\vec{y})\right\| = (\text{см.определение нормы}) =$$

$$= \max_{i=1,\dots,m} \max_{t\in[t_0-H;t_0+H]} \left| \int_{t_0}^{t} \left[f^i\left(s,\vec{x}(s)\right) - f^i\left(s,\vec{y}(s)\right) \right] ds \right| \le$$

$$\le H\cdot \max_{i=1,\dots,m} \max_{t\in[t_0-H;t_0+H]} \left| f^i\left(t,\vec{x}(t)\right) - f^i\left(t,\vec{y}(t)\right) \right| \le (\text{условие Липшица, см. } (У2)) \le$$

$$\le H\cdot N\cdot \max_{t\in[t_0-H;t_0+H]} \sum_{j=1}^{n} \left| x^j(t) - y^j(t) \right| \le$$

$$\le H\cdot N\cdot n\cdot \max_{j=1,\dots,n} \max_{t\in[t_0-H;t_0+H]} \left| x^j(t) - y^j(t) \right| = (\text{см.определение нормы}) =$$

$$= H\cdot N\cdot n\cdot \left\|\vec{x}-\vec{y}\right\| = H\cdot K\cdot \left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|,$$

откуда следует, что при $H\cdot K<1$ оператор $\hat{\Phi}$ является сжимающим в D_H. Согласно принципу сжимающих отображений, оператор $\hat{\Phi}$ имеет единственную неподвижную точку $y\in D_H$. Это означает, что интегральное уравнение (3), а следовательно, и задача (1)–(2), имеет единственное решение на отрезке $\left[t_0-H;\, t_0+H\right]$.

В случае $H\cdot K\ge 1$ результат теоремы получается путем применения процедуры продолжения решения аналогично тому, как было сделано для скалярного уравнения (см. §2).

Теорема 1 доказана. ■

4^0. Теорема существования и единственности решения задачи Коши в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе

Теорема 3. Если вектор-функция $\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе $\Pi=\left\{t\le t_0\le a\right\}\times\Re^m$, тогда для любой точки $\left(t_0,\vec{x}_0\right)\in\Pi$ существует единственное решение $\vec{x}\left(t\right)$ задачи (1)–(2) на отрезке $t\le t_0\le a$.

Доказательство данной теоремы, так же как и в скалярном случае, лишь незначительно отличается от доказательства Теоремы 1.

Аналогично Теореме 2 из §3 по изложенной выше схеме можно получить следующий результат, который потребуется нам при рассмотрении нелинейных краевых задач.

<u>Теорема 4</u>. *Пусть* функции $f_i\left(t,\vec{y},\mu_1,\mu_2,...,\mu_n\right)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица в полосе $\left\{t_0 \le t \le t_0+a, \quad y_i \in R\right\}$ при $\left|\mu_i-\mu_i^0\right| \le C_i$. Тогда решение задачи (1) существует, единственно и непрерывно зависит от параметров μ_1, μ_2, ... , μ_n при $t_0 \le t \le t_0+a$, $\left|\mu_i-\mu_i^0\right| \le C_i$.

§ 6. Уравнения *n*-го порядка, разрешенные относительно старшей производной

Задача Коши в этом случае выглядит так

$$\begin{aligned} & y^{(n)} = f_i\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right), \\ & y(x_0) = y_1^0, \\ & y'(x_0) = y_2^0, \\ & .... \qquad . \\ & y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0. \end{aligned} \tag{1}$$

Путем замены $y = y_1$, $y' = y_2$,..., $y^{(n-1)} = y_n$ данная задача сводится к задаче Коши для нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \;...... \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_i^0, \;\; i = 1,2,...,n \;\; .$$

Очевидно, что функции в правых частях уравнений $f_i = y_{i+1}$, $i = 1,2,...,n-1$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, и для применения к системе теоремы существования и единственности достаточно потребовать, чтобы функция $f\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right)$ в последнем уравнении также была непрерывна в параллелепипеде $D = \left\{0 \le x \le a, \;\; \left|y_i - y_i^0\right| \le b_i\right\}$, $i = 1,2,...,n$ и удовлетворяла условию Липшица по переменным y_i, т. е.

$$\left|f\left(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n\right) - f\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right)\right| \le N \cdot \sum_{i=1}^{n} |\,\bar{y}_i - y_i\,|.$$

Из Теоремы 1 §5 вытекает следующий результат:

Теорема 5. *Пусть* функция $f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменным y_i в параллелепипеде $D=\left\{0 \le x \le a,\ \left|y_i - y_i^0\right| \le b_i\right\}, \quad i=1,2,\ldots,n$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение на отрезке $[x_0, x_0+H]$, где $H=\min\left\{a,\ \min\limits_{1\le i\le n}\dfrac{b_i}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{D}\left|f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)\right|$.

§ 7. Замечания, примеры, упражнения

Замечание 1. Можно доказать разрешимость задачи Коши лишь при выполнении (У1), т.е. $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right) \in C(D)$ (теорема Пеано). Однако в этом случае решение не обязательно единственно.

Замечание 2. Метод последовательных приближений Пикара обеспечивает существование решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (1)–(2) на некотором отрезке $\left[t_0-H, t_0+H\right]$, т.е. Теорема 1 носит локальный характер.

Замечание 3. *Возможность продолжения решения.*

Рассмотрим решение (1) $\vec{x}=\vec{\varphi}_1(t)$ (простроенное методом Пикара), с начальными значениями $t_1=t_0+H$, $\vec{\varphi}_1\left(t_1\right)=\vec{\varphi}\left(t_0+H\right)=\vec{x}_1$. Это решение существует на некотором отрезке $\left[t_1-H_1, t_1+H_1\right]$. Возьмем функцию $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$, определенную на отрезке $\left[t_0-H, t_1+H_1\right]$:

$$\vec{\psi}(t)=\begin{cases}\vec{\varphi}(t), t\in\left[t_0-H, t_0+H\right],\\ \vec{\varphi}_1(t), t\in\left[t_0-H, t_1+H_1\right].\end{cases}$$

Очевидно, что $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$ будет решением задачи Коши (1)–(2), т.е. мы получили продолжение решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ с отрезка $\left[t_0-H, t_0+H\right]$ на больший отрезок $\left[t_0-H, t_1+H_1\right]$.

Далее, построив решение (1) $\vec{x}=\vec{\varphi}_2(t)$ с начальными условиями $t_2=t_1+H_1$: $\vec{\varphi}_2(t_2)=\vec{\varphi}_1(t_1+H_1)=\vec{x}_2$, получим продолжение решения на еще больший отрезок $[t_0-H,t_2+H_2]$ и т.д. Аналогично можно строить продолжение в сторону убывания *t*.

В результате такого процесса будет построено решение задачи Коши (1), (2), определенное на некотором максимальном интервале (a,b) и такое, что любое его продолжение совпадает с ним самим. Такое решение называется *непродолжаемым*.

Замечание 4. Метод последовательных приближений Пикара является хорошим приближенным методом решения задачи Коши. После *n* итераций получается приближенное решение $\vec{x}_n(t)$, тем более точное, чем больше *n*.

Пример. Методом последовательных приближений найдем решение задачи Коши для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}, \qquad \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0.$$

Последовательные приближения в этом случае будут иметь вид:

$$\vec{x}_0(t)=\vec{x}_0,$$

$$\vec{x}_1(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}A\vec{x}_0(\tau)d\tau=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}A\vec{x}_0d\tau=\vec{x}_0+(t-t_0)A\vec{x}_0,$$

$$\vec{x}_2(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}A\vec{x}_1(\tau)d\tau=\vec{x}_0+(t-t_0)A\vec{x}_0+\frac{(t-t_0)^2}{2}A^2\vec{x}_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{x}_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k\vec{x}_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k\right)\vec{x}_0, \qquad A^0=E.$$

Поскольку для систем линейных уравнений последовательные приближения сходятся равномерно на любом отрезке $t\in[a,b]$, где правая часть системы непрерывна по *t,* в данном случае правая часть от *t* не зависит, то построенная выше функциональная последовательность сходится к решению задачи Коши при всех значениях *t*.

Обозначим $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(t-t_0\right)^k}{k!}A^k\right)=B_n\left(t\right)$, тогда $\vec{x}_n\left(t\right)=B_n\left(t\right)\vec{x}_0$. Полагая $\vec{x}_0=\vec{e}_i\equiv\left\{\delta_i^1,\delta_i^2\ldots,\delta_i^m\right\}, i=1,2,\ldots m$, получим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(B_n\left(t\right)\right)_i^j$, $i,j=1,2\ldots m$. Предел такой матричной последовательности называют ***матричной экспонентой*** и обозначают

$$e^{A\left(t-t_0\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(t-t_0\right)^k}{k!}A^k \ .$$

Теперь решение задачи Коши можно записать в виде $\vec{x}\left(t\right)=e^{A\left(t-t_0\right)}\vec{x}_0$. Ряд для матричной экспоненты быстро сходится, что дает хороший приближенный метод решения задачи Коши для однородной линейной системы ОДУ с постоянной матрицей. Приближенно матричную экспоненту можно вычислить по формуле

$$e^{A\left(t-t_0\right)}\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(t-t_0\right)^k}{k!}A^k \ .$$

Упражнение 1. Покажите, что если $J_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, то

$$e^{J_1t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Покажите, что если $J_2=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, то

$$e^{J_2t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Покажите, что если $J_3=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, то

$$e^{J_3t}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & -\sin\beta t\\ \sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}.$$

Замечание 5. В приложениях часто встречаются линейные однородные дифференциальные уравнения вида

$$a_0\left(t\right)\ddot{x}+a_1\left(t\right)\dot{x}+a_2\left(t\right)x=0$$

с аналитическими коэффициентами, у которых $a_0(t_0)=0$. Такая точка t_0 называется особой точкой уравнения, поскольку в ее окрестности уравнение нельзя разрешить относительно старшей производной. В этом случае, решения представимого в виде степенного ряда может не существовать, но могут существовать решения, представимые в виде обобщенных степенных рядов

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(t-t_0\right)^{r+k},$$

где r – некоторое (не обязательно целое) число.

Упражнение 4 (сложное). Найдите решение уравнения

$$t^2\ddot{x}+\left(t^2+\frac{1}{4}\right)x=0$$

в виде обобщенного степенного ряда

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(t-t_0\right)^{r+k} \quad \left(c_0\neq 0\right).$$

Ответ: $x(t)=c_0\sqrt{t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m t^{2m}}{2^{2m}\left(m!\right)^2}$. Убедитесь, что этот ряд сходится при $t\geq 0$.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Используя теорему о существовании и единственности решения задачи Коши выясните, могут ли графики двух различных решений уравнения $y''=x+y^2$
   а) пересекаться в какой-либо точке (x_0,y_0) плоскости xOy;
   б) касаться в какой-либо точке (x_0,y_0) плоскости xOy.
2. Используя теорему о существовании и единственности решения задачи Коши (теорема 1 §6) выясните, могут ли графики двух различных решений уравнения $y'''=x+y^2$
   а) пересекаться в какой-либо точке (x_0,y_0) плоскости xOy;
   б) касаться в какой-либо точке (x_0,y_0) плоскости xOy.

Глава 3. **ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *n*-ГО ПОРЯДКА**

Лекция 7

В этой главе рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

при условии, что все функции $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а также $f(x)$ непрерывны на множестве X, где X – некоторое подмножество числовой прямой, например, отрезок, интервал, полупрямая или вся числовая прямая.

§ 1. Общие свойства линейных ОДУ *n*-го порядка

<u>Определение</u>. Функция $y(x) \in C^n(X)$ называется решением уравнения (1), если при ее подстановке (1) обращается в тождество.

1^0. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

К уравнению (1) могут быть добавлены начальные условия

$$y(x_0) = y_1^0, \;\; y'(x_0) = y_2^0, \ldots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \;\; x_0 \in X. \tag{2}$$

Уравнение (1) с дополнительными условиями (2) называется ***задачей Коши***.

<u>Теорема 1</u>. Решение задачи Коши (1)–(2) существует и единственно на любом сегменте $[a,b] \in X$.

<u>Доказательство</u> основано на теореме о существовании и единственности решения для системы ОДУ в случае, когда правая часть непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в полосе (см. Теорему 2 из §5 гл. 2).

Действительно, замена $y = y_1$, $y' = y_2$, ..., $y^{(n-1)} = y_n$ приводит к системе

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 \quad , \dots , \quad \frac{dy_n}{dx} = f(x) - a_1(x)y_n - \dots - a_n(x)y_1 ,$$

правые части которой $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1,2,...,n$, как легко видеть, непрерывны в полосе $\{x \in [a,b], \quad y_i \in R\}$ и удовлетворяют условию Липшица

$$\left| f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n) - f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_n) \right| \le N \cdot \sum_{k=1}^{n} \left| \bar{y}_k - \tilde{y}_k \right|, \qquad i = 1,2,...,n$$

с постоянной $N = \max\left[1, \ \max\limits_{i} \left(\max\limits_{[a,b]} |a_i(x)| \right)\right]$. ■

Пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) ,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0 \ .$$

Обозначим $y = y_1$, $y' = y_2$, тогда эквивалентная задача Коши для нормальной системы относительно вектор-функции $\vec{\psi}_1(x) = \{y_1(x), \ y_2(x)\}$ имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -q(x)y_1 - p(x)y_2 - f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_0 \\ y_2(x_0) = v_0 \end{cases} .$$

Решение рассматриваемой задачи существует и единственно.

2^0. Некоторые следствия линейности уравнения

Заметим, что оператор $Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$ в уравнении (1) является линейным и действует из $C^n(X)$ в $C(X)$. Сформулируем ряд утверждений, являющихся следствием линейности указанного оператора.

Теорема 2 (*принцип суперпозиции*). *Пусть* в уравнении (1) $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{M} C_i f_i(x)$, где C_i – некоторые постоянные, а $y_i(x)$ – решения уравнений $Ly_i = f_i(x)$, $i = 1,2,...,M$.

Тогда функция $y(x)=\sum_{i=1}^{M} C_i y_i(x)$ является решением уравнения (1).

Доказательство производится путем прямой подстановки функции $y(x)=\sum_{i=1}^{M} C_i y_i(x)$ в (1):

$$Ly \equiv L\sum_{i=1}^{M} C_i y_i(x) = C_1 L y_1 + C_2 L y_2 + \ldots + C_M L y_M =$$

$$= C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_M f_M(x) = f(x). \ \blacksquare$$

Тривиальным следствием доказанной теоремы являются следующие три утверждения.

Теорема 3. Любая линейная комбинация решений однородного уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0 \qquad (3)$$

также есть решение этого однородного уравнения.

Теорема 4. Разность любых двух решений неоднородного уравнения (1) является решением соответствующего однородного уравнения (3).

Теорема 5. *Пусть* функция $z(x)=u(x)+iv(x)$ удовлетворяет уравнению $Lz = f_1(x)+if_2(x)$.*Тогда* функции $u(x)$ и $v(x)$ – решения уравнений $Lu = f_1(x)$ и $Lv = f_2(x)$.

Верно и обратное утверждение: если $u(x)$ и $v(x)$ есть решения уравнений $Lu = f_1(x)$ и $Lv = f_2(x)$, то $z(x)=u(x)+iv(x)$ удовлетворяет уравнению $Lz = f_1(x)+if_2(x)$.

§ 2. Линейное однородное уравнение

Рассмотрим однородное уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0$$

и выясним структуру его решений. Легко видеть, что множество решений (3) образует линейное пространство. В связи с этим возникают вопросы:

1) какова размерность этого пространства;
2) как построить базис указанного пространства.

Сформулируем еще два определения.

<u>Определение 1</u>. Функции $y_1(x),\ldots,y_m(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на отрезке $\left[a,b\right]$, если существует такой набор постоянных $C_1,\ldots,C_m$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, что выполнено равенство

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_my_m(x)\equiv 0 \qquad x\in\left[a,b\right]. \qquad (4)$$

Если (4) выполняется лишь в случае $C_1=C_2=\ldots=C_m=0$, то функции $y_1(x),\ldots,y_m(x)$ ***линейно независимы*** на отрезке $\left[a,b\right]$.

Пусть $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ – совокупность $n-1$ раз дифференцируемых на отрезке $\left[a,b\right]$ функций (не обязательно решений уравнения (3)).

<u>Определение 2</u>. ***Определителем Вронского*** системы n функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ называется определитель

$$W(x)\equiv W\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]=\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

<u>Теорема 6</u>. *Пусть* функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $\left[a,b\right]$.

Тогда определитель Вронского этой системы функций $W(x)\equiv W\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]\equiv 0,\quad x\in[a,b]$.

<u>Доказательство</u>. По предположению существует ненулевой набор констант, для которого имеет место тождество $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)=0,\quad x\in\left[a,b\right]$. Дифференцируя $n-1$ раз, получим

$$\begin{cases} C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)=0 \\ C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)+\ldots+C_ny_n'(x)=0 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x)+C_2y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases} \qquad x\in\left[a,b\right].$$

Если рассматривать записанные тождества как систему уравнений относительно неизвестных $C_1,\ldots,C_n$, она имеет нетривиальное решение (в силу предположения о линейной зависимости). Следовательно, $W(x)\equiv 0,\ \ x\in[a,b]$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 7. *Пусть* теперь функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ – линейно независимые на отрезке $\left[a,b\right]$ решения однородного уравнения (3).

Тогда определитель Вронского этой системы функций $W(x)\equiv W\left[y_1,y_2,...,y_n\right]\neq 0,\quad \forall x\in[a,b]$.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть существует точка $x_0\in\left[a,b\right]$ такая, что $W(x_0)=0$. Рассмотрим следующую алгебраическую систему относительно неизвестных $C_1,\ldots,C_n$:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+...+C_ny_n(x_0)=0\\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+...+C_ny_n'(x_0)=0\\ \quad ....\quad ....\quad ....\quad ....\quad ....\\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0\ . \end{cases} \tag{6}$$

Так как ее определитель $W(x_0)=0$, то существует нетривиальное решение $C_1^0,\ldots,C_n^0$. Рассмотрим функцию

$$y(x)=C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)+...+C_n^0y_n(x)=0\ , \tag{7}$$

которая является решением однородного уравнения (3). Последовательно дифференцируя (7) и учитывая соотношения (6), получим

$$y(x_0)=0,\quad y'(x_0)=0,\ \ldots\ ,\quad y^{(n-1)}(x_0)=0\ . \tag{8}$$

Далее, в силу теоремы единственности решения (Теорема 1) существует единственное решение $y(x)\equiv 0$, удовлетворяющее условиям (8), что означает (см. (7)) линейную зависимость функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана. ■

Из доказанных теорем 6 и 7 вытекает:

Следствие.Определитель Вронского некоторой системы решений однородного уравнения

$$Ly\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=0$$

либо тождественно равен нулю на отрезке $[a,b]$, и тогда эти решения линейно зависимы, либо не обращается в ноль ни в одной точке отрезка $[a,b]$; в этом случае рассматриваемые решения линейно независимы.

Определение 3. Совокупность любых n (число n – порядок уравнения) линейно независимых на отрезке $[a,b]$ решений уравнения (3), называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР) однородного линейного дифференциального уравнения.

Следствие. Определитель Вронского, составленный из функций, входящих в ФСР, отличен от нуля.

Теорема 8 (*о существовании ФСР*). Всякое линейное однородное дифференциальное уравнение с непрерывными коэффициентами имеет ФСР.

Доказательство. Зададим произвольный числовой, отличный от нуля, определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Построим n решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ следующих задач Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y_k(x_0) = a_{1k}, \\ y'_k(x_0) = a_{2k}, \qquad\qquad k = 1,2,\ldots,n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(n-1)}(x_0) = a_{nk}, \end{cases}$$

Составим определитель Вронского для этих решений. Очевидно, что $W(x_0) = \Delta \neq 0$. Следовательно, решения $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ линейно независимы, т.е. образуют ФСР, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Так как существует множество способов задать определитель Δ, фигурирующий в доказательстве теоремы 8, то ФСР однородного линейного дифференциального уравнения определена неединственным образом.

Теорема 9. *Пусть* $y_1(x),\dots,y_n(x)$ – ФСР линейного однородного уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 .$$

Тогда любое решение $z(x)$ этого уравнения представимо в виде $z(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, где $C_1,\dots, C_n$ – некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $z(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} Lz = 0 \\ z(x_0) = z_1^0, \\ z'(x_0) = z_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z^{(n-1)}(x_0) = z_n^0. \end{cases} \qquad (9)$$

Покажем, что можно выбрать постоянные $C_1,\dots, C_n$ так, что $z(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$. Подставив это выражение в начальные условия в (9), получим систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = z_1^0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = z_2^0 \\ \dots. \quad \dots. \quad \dots. \quad \dots. \quad \dots. \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = z_n^0 \end{cases},$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, т.е. система имеет решение $C_1^0,\dots, C_n^0$. Составим функцию $z^0(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$ и заметим, что она также является решением задачи Коши (9). Но по Теореме 1 решение задачи Коши (9) единственно. Следовательно,

$$z(x) \equiv z^0(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x), \qquad x \in [a,b],$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Выражение $z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, где набор функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ есть ФСР, дает общее решение однородного линейного уравнения. Доказанная теорема утверждает, что ФСР образует базис в пространстве решений однородного линейного уравнения.

§ 3. Неоднородное линейное уравнение

1⁰. Общее решение неоднородного уравнения

Рассмотрим снова уравнение (1)

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x).$$

Пусть $\tilde{y}(x)$ – некоторое его частное решение.

Теорема 10.Любое решение $y(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения (1) представимо в виде суммы его частного решения $\tilde{y}(x)$ и общего решения $z(x)$ соответствующего однородного уравнения, т.е.

$$y(x) = \tilde{y}(x) + z(x) \equiv \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ есть ФСР, а $C_1^0, \ldots, C_n^0$ – произвольные постоянные.

Доказательство.Пусть $y(x)$ – любое решение уравнения (1). Легко видеть (в силу линейности), что функция $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ удовлетворяет однородному уравнению. Тогда $y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, что и доказывает утверждение теоремы. ■

2⁰. Функция Коши

Если известна ФСР однородного уравнения, то можно построить частное решение соответствующего неоднородного уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0 & a < \xi < x < b \\ y(\xi) = 0, \quad y'(\xi) = 0, \quad ,...., & y^{(n-1))}(\xi) = 1 \end{cases}.$$

Известно, что ее решение существует и непрерывно вместе с производными зависит от параметра ξ. Обозначим $K(x,\xi)$ – решение этой специальной задачи.

Примеры.

1) $$\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(\xi) = 1 \end{cases}, \qquad ==> \qquad y \equiv K(x,\xi) = e^{x-\xi};$$

2) $$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\xi) = 0, \quad y'(\xi) = 1 \end{cases}, \qquad ==> \qquad y \equiv K(x,\xi) = \sin(x-\xi) .$$

<u>Определение</u>. Функция $K(x,\xi)$, являющаяся решением специальной задачи Коши

$$\begin{cases} L_x K(x,\xi) = 0, & a < \xi < x < b, \\ K(\xi,\xi) = 0, \quad K'_x(\xi,\xi) = 0, \quad ,...., & K_x^{(n-1)}(\xi,\xi) = 1, \end{cases}$$

называется ***функцией Коши*** уравнения (1).

<u>Теорема 11</u>. Функция $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$, где $K(x,\xi)$ – функция Коши уравнения (1), является решением задачи Коши для неоднородного уравнения (1) с нулевыми начальными условиями, т.е.

$$\begin{cases} Ly = f(x), & x \in [a,b] \\ y(x_0) = y'(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0, & x_0 \in [a,b] \end{cases}.$$

<u>Доказательство</u>. Мы должны убедиться в том, что функция $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$ удовлетворяет уравнению и указанным нулевым начальным условиям. Непосредственно проверяется:

Начальные условия

$$a_n(x)\times \qquad y=\int\limits_{t_0}^{t} K(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad \Rightarrow \quad y(x_0)=0$$

$$a_{n-1}(x)\times \qquad y'=\underbrace{K(x,x)}_{=0}f(x)+\int\limits_{x_0}^{x} K'_x(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad \Rightarrow \quad y'(x_0)=0$$

$$a_{n-2}(x)\times \qquad y''=\underbrace{K'_x(x,x)}_{=0}f(x)+\int\limits_{x_0}^{x} K''_x(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad \Rightarrow \quad y''(x_0)=0$$

....

$$a_1(x)\times \qquad y^{(n-1)}=\underbrace{K_x^{(n-2)}(x,x)}_{=0}f(x)+\int\limits_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,\xi)f(\xi)d\xi \quad \Rightarrow y^{(n-1)}(x_0)=0$$

$$1\times \qquad y^{(n)}=\underbrace{K_x^{(n-1)}(x,x)}_{=1}f(x)+\int\limits_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

Умножая $a_{n-k}(x)$ на $y^{(k)}(x)$ и складывая полученные равенства, имеем

$$Ly=f(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\underbrace{L_xK(x,\xi)}_{=0}f(\xi)d\xi=f(x),$$

т.е. функция $y(x)=\int\limits_{x_0}^{x}K\left(x,\xi\right)f\left(\xi\right)d\xi$ удовлетворяет уравнению (1) и нулевым начальным условиям. Теорема доказана. ■

Примеры.

1) $\begin{cases} y'-ay=f(x), \\ \quad y(0)=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y(x)=\int\limits_0^x e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi.$

2) $\begin{cases} \quad y''+y=f(x), \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y=\int\limits_0^x \sin(x-\xi)f(\xi)d\xi..$

3⁰. Метод вариации постоянных

<u>**Теорема 12**</u>. *Пусть* $y_1(x),\dots,y_n(x)$ – ФСР однородного уравнения

$$Ly\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0 \ .$$

Тогда функция $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$ будет решением неоднородного уравнения (1), если $c^i(x)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(j)}(x)=0, & j=0,1,2,\dots,n-2 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)=f(x) & . \end{cases} \tag{10}$$

<u>*Доказательство*</u>. Система (10) однозначно разрешима относительно $c_i'(x)$, так как определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x)\neq 0$. Заметим, что вектор-функции

$$\vec{\psi}_1(x)=\left\{y_1(x),\dots,y_1^{(n-1)}(x)\right\},\ \dots,\ \vec{\psi}_n(t)=\left\{y_n(x),\dots,y_n^{(n-1)}(x)\right\}$$

образуют ФСР для системы уравнений $\vec{\psi}'=A(x)\vec{\psi}$.

Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что если $c_i'(x)$ удовлетворяют уравнениям (10), то функция

$$\vec{z}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\vec{\psi}_i(x)$$

является решением неоднородной системы

$$\vec{z}'=A(x)\vec{z}+\vec{F}(x),$$

где

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}(x)=\{0,\dots,0,\ f(x)\}.$$

Но тогда первая координата вектора $\vec{z}(x)$, т.е. функция $y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\psi_i^1(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$ есть решение (1). ■

Замечание 1 (*физический смысл функции Коши*). Рассмотрим Задачу Коши

$$Ly(x) = \delta(x-\xi_0)$$
$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0\ .$$

Ее решение

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)\delta(\xi-\xi_0)d\xi \overset{\substack{\text{По определению}\\ \delta\text{-функции}}}{=} K(x,\xi_0)\,.$$

Таким образом, функция Коши – функция влияния на точку с координатой x источника, сосредоточенного в точке ξ_0 ("импульсная" функция).

Замечание 2. Для уравнения с постоянными коэффициентами функция Коши может быть найдена по формуле (докажите самостоятельно)

$$K(x,\xi) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \ldots & y_n'(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}.$$

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Пусть для функций $u(x), v(x)$ определитель Вронского $W[u,v] \not\equiv 0$ при $x \in [a,b]$. Следует ли отсюда, что функции $u(x)$ и $v(x)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$.
2. Пусть для функций $u(x), v(x)$ определитель Вронского $W[u,v] \equiv 0$ при $x \in [a,b]$. Следует ли отсюда, что функции $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$.
3. Пусть функции $y_1(x),\ y_2(x)$ – два различных решения линейного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ и их определитель Вронского $W[y_1, y_2] \equiv 0$ при $x \in [a,b]$. Следует ли от-

сюда, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$?

4. Докажите, используя определение, что функции $u(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1\le x\le 2\end{cases}$ и $v(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1\\ (x-1)^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$ – линейно независимы на отрезке $[0,2]$, однако их определитель Вронского $W\left[u,v\right]\equiv 0$ на этом отрезке.
5. Докажите, что функции $y_1(x)\equiv 1$, $y_2(x)=\sin x$ и $y_3(x)=\cos x$ образуют ФСР линейного однородного уравнения $y'''+y'=0$.
6. Докажите, что функции $y_1(x)=\operatorname{sh} x$ и $y_1(x)=\operatorname{sh}(l-x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения $y''-y=0$ на отрезке $[0,l]$.
7. Докажите, что функции $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=2\cos x$ и $y_3(x)=\cos x+3\sin x$ не могут быть ФСР никакого линейного однородного уравнения.
8. Сформулируйте и докажите теорему о существовании ФСР линейного <u>однородного</u> дифференциального уравнения n-го порядка.
9. Сформулируйте и докажите теорему о представлении общего решения <u>однородного</u> линейного дифференциального уравнения n-го порядка через ФСР.
10. Сформулируйте и докажите теорему о структуре общего решения линейного <u>неоднородного</u> дифференциального уравнения n-го порядка.
11. Постройте функцию Коши и запишите с ее помощью решение начальной задачи:

а) $y'-y=f(x), \quad y(0)=0$;

б) $y'+y=f(x), \quad y(0)=0$;

в) $y''-y=f(x), \quad y(0)=0, \; y'(0)=0$;

г) $y''+y=f(x), \quad y(0)=0, \; y'(0)=0$.

Лекция 8

§ 4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь частный случай линейного дифференциального уравнения – ***линейное однородное уравнение*** с постоянными коэффициентами

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \quad a_i = \text{const}. \tag{1п}$$

1⁰. Общее решение однородного уравнения

Нетривиальные частные решения однородного уравнения

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \quad a_i = \text{const} \tag{2п}$$

будем строить в виде $y(x) = Ce^{\lambda x}$, где $C \neq 0$ и λ – постоянные (*метод Эйлера*). Подставляя в (2п), получим:

$$L\left[Ce^{\lambda x}\right] = C\left[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\right]e^{\lambda x} \equiv CM(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(\lambda) = 0.$$

<u>Определение</u>. Многочлен $M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$, называется ***характеристическим многочленом*** уравнения (1п), а уравнение

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{3п}$$

называется ***характеристическим уравнением*** для (1п).

Очевидно, что характеристическое уравнение имеет ровно n корней (с учетом кратности). Рассмотрим несколько возможных вариантов.

Характеристическое уравнение (3п) имеет n *<u>различных</u>* (простых) корней λ_1, λ_2,... λ_n: $M(\lambda_k) = 0$. Каждому корню λ_k соответствует функция $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $k = 1,2,\ldots,n$, которая является решением однородного уравнения (2п) в силу (3п), так как $L\left[e^{\lambda_k x}\right] = M(\lambda_k)e^{\lambda_k x} = 0$.

<u>Теорема 1</u>. *Пусть* корни характеристического многочлена (3п) простые. *Тогда* функции $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $k = 1,2,\ldots,n$ образуют ФСР уравнения (2п).

<u>*Доказательство*</u>. Для доказательства достаточно показать линейную независимость указанной системы функций. Предположим обратное, т.е. пусть существует набор констант $C_1, C_2, \dots, C_n$, что $\sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0$ и выполнено соотношение

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} = 0. \qquad (4п)$$

Положим, для определенности, $C_1 \neq 0$. Разделим (4п) на $e^{\lambda_n x} \neq 0$ и продифференцируем. Получим

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n)e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)e^{(\lambda_2-\lambda_n)x} + \dots + C_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x} = 0.$$

Разделим последнее соотношение на $e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x} \neq 0$ и снова продифференцируем:

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_1-\lambda_{n-1})x} + C_2(\lambda_2 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_2-\lambda_{n-1})x} + \dots$$
$$+ C_{n-2}(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1})x} = 0.$$

Выполнив указанную процедуру $n-1$ раз, будем иметь

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n) \cdot (\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} = 0.$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$, так как $e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \neq 0$ и все λ_i различны по предположению. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Таким образом, в случае *простых корней характеристического уравнения* общее решение однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}$, где λ_k – корни уравнения (3п).

Замечание. В случае комплексных корней пару комплекснозначных функций $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$, отвечающих паре комплексно сопряженных корней $\lambda_k = \alpha + i\beta$, $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta$, обычно заменяют функциями $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ и получают ФСР, содержащую только действительные функции.

1. Пусть характеристическое уравнение $\mathrm{M}(\lambda) = 0$ (3п) имеет <u>кратные корни</u>, т.е.

$$M(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{k_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{k_2}...\left(\lambda-\lambda_s\right)^{k_s}...\left(\lambda-\lambda_m\right)^{k_m}=0,$$

где k_s – кратность корня λ_s, причем $k_1+k_2+...+k_s+...+k_m=n$.

В этом случае ФСР выглядит иначе. Далее рассмотрим случай, когда имеется один кратный корень.

Теорема 2. *Пусть* λ_i, $i=1,2,...,k=n-p$ – простые корни характеристического уравнения, а λ_{k+1} – корень кратности *p*.

Тогда корню λ_{k+1} отвечает *p* линейно независимых частных решений уравнения (2п)

$$e^{\lambda_{k+1}x},\ xe^{\lambda_{k+1}x},\ x^2 e^{\lambda_{k+1}x},\ ...,\ x^{p-1}e^{\lambda_{k+1}x},$$

т.е. совокупность n функций

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ ...,\ e^{\lambda_k x},\ e^{\lambda_{k+1}x},\ xe^{\lambda_{k+1}x},\ x^2 e^{\lambda_{k+1}x},\ ...,\ x^{p-1}e^{\lambda_{k+1}x}$$

образуют ФСР однородного уравнения (2п).

Доказательство. Покажем, что все указанные функции удовлетворяют однородному уравнению (2п). Это проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (2п) функций системы $e^{\lambda_{k+1}x},\ xe^{\lambda_{k+1}x},\ x^2 e^{\lambda_{k+1}x},\ ...,\ x^{p-1}e^{\lambda_{k+1}x}$.

Рассмотрим тождество $L\left[e^{\lambda x}\right]=M(\lambda)e^{\lambda x}$ и продифференцируем его по λ. Применяя формулу Лейбница, получим

$$L\left[xe^{\lambda x}\right]=M'(\lambda)e^{\lambda x}+M(\lambda)xe^{\lambda x},\ ....$$

$$L\left[x^p e^{\lambda x}\right]=\left\{x^p M(\lambda)+px^{p-1}M'(\lambda)+...+M^{(p)}(\lambda)\right\}e^{\lambda x}.$$

Если λ_s – корень кратности k_s, то

$$M(\lambda_s)=0,\ \ M'(\lambda_s)=0,\ ...,\ M^{(k_s-1)}(\lambda_s)=0,\ \ M^{(k_s)}(\lambda_s)\neq 0.$$

Следовательно, $L\left[x^p e^{\lambda x}\right]=0$ при всех $p=0,1,...,k_s-1$, т.е. функции вида $x^p e^{\lambda x}$, где $p=0,1,...,k_s-1$, являются решениями однородного уравнения (2п).

Вторую часть теоремы, т.е. линейную независимость указанных функций, можно доказать аналогично тому, как это было сделано в Теореме 1. В качестве упражнения докажите указанное утверждение для случая корня кратности 2.

Замечание. В случае комплексных корней каждую пару комплекснозначных функций $x^p e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $x^p e^{(\alpha-i\beta)x}$, отвечающих паре комплексно сопряженных кратных корней $\lambda_k=\alpha+i\beta$ и $\lambda_{k+1}=\alpha-i\beta$, заменяют функциями $x^p e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $x^p e^{\alpha x}\sin\beta x$, получая ФСР, содержащую только действительные функции.

2^0. Неоднородное уравнение

Напомним, что (см. §3) общее решение $y(x)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения представимо в виде суммы его частного решения $\tilde{y}(x)$ и общего решения $z(x)$ соответствующего однородного уравнения, т.е.

$$y(x)=\tilde{y}(x)+z(x)\equiv\tilde{y}(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x),$$

где $y_1(x),\dots,y_n(x)$ есть ФСР, а $C_1^0,\dots,C_n^0$ – произвольные постоянные.

Общие методы поиска частных решений линейных уравнений были рассмотрены в §3. Для уравнений с постоянными коэффициентами *в случае специального вида правых частей* частные решения могут быть эффективно получены еще несколькими способами.

Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами.

$$Ly=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=f(x), \qquad (5п)$$

где $f(x)=P_l(x)e^{\lambda x}$, $P(x)$ – многочлен степени l, λ – константа.

<u>Лемма 1</u>. *Пусть* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s,\dots,\lambda_m$ – корни характеристического уравнения $M(\lambda)=0$ кратностей $k_1,k_2,\dots,k_s,\dots,k_m$, где $k_1+k_2+\dots+k_s+\dots+k_m=n$.

Тогда:

1) Если $\lambda\neq\lambda_s (s=1,\dots,m)$ (нерезонансный случай) то частное решение уравнения (5п) ищем в виде

$$\tilde{y}(x)=Q_l(x)e^{\lambda x},$$

где $Q_l(x)$ – многочлен степени l, с неопределенными коэффициентами.

2) Если $\lambda = \lambda_s$ (кратности k_s) (резонансный случай), то частное решение уравнения (5п) ищем в виде

$$\tilde{y}(x) = x^{k_s} R_l(x) e^{\lambda x},$$

где $R_l(x)$ – многочлен степени l с неопределенными коэффициентами.

Подставляя искомый вид решений в (5п) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим неопределенные коэффициенты многочленов $Q_l(x)$ и $R_l(x)$ (*метод неопределенных коэффициентов*).

Примеры

1) $y'' + 4y = e^{3x}$, $M(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 2i \neq \lambda = 3$,
$\tilde{y} = Ae^{3x}$;

2) $y'' + 4y = (x+2)e^{3x}$, $M(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0,$ $\lambda_{1,2} = \pm 2i \neq \lambda = 3$,
$\tilde{y} = (Ax + B)e^{3x}$;

3) $y'' - 4y = (x+2)e^{2x}$, $M(\lambda) = \lambda^2 - 4 = 0,$
$\lambda_{1,2} = \pm 2,\ m_1 = 1,$ $\lambda = \lambda_1$, $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{2x}$;

4) $y''' + 3y'' + 3y' + y = (x+2)e^{-x}$, $M(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = 0$,
$\lambda_1 = -1,\ m_1 = 3,$ $\lambda = \lambda_1 = -1$; $\tilde{y} = x^3(Ax + B)e^{-x}$;

5) $y'' - 4y = \cos 2x = Re e^{\pm 2ix}$, $M(\lambda) = \lambda^2 - 2 = 0,$
$\lambda_{1,2} = \pm 2, \lambda = \pm 2i, \lambda \neq \lambda_k$, $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$;

6) $y'' + 4y = \cos 2x = \mathrm{Re} e^{\pm 2ix}$, $M(\lambda) = \lambda^2 + 2 = 0$,
$\tilde{y} = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$.

Замечание 1. К уравнению с постоянными коэффициентами сводится однородное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

если положить $x = e^t$.

Замечание 2. Методом неопределенных коэффициентов решается неоднородное уравнение Эйлера со специальной правой частью $f(x)=S(\ln x)x^{\lambda}$ (переходящей при замене $x=e^{t}$ в функцию $f(t)=S(t)e^{\lambda t}$).

Операторный метод Хевисайда

Пусть $D=\dfrac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования, тогда $D^{k}=\dfrac{d^{k}}{dx^{k}}$. Используя введенные обозначения, получим

$$Ly=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=D^{n}y+a_1D^{n-1}y+...+a_{n-1}Dy+a_ny\equiv P_n(D)y$$

и запишем уравнение (5п) в виде

$$P_n(D)y=f(x),$$

а его частное решение как $\tilde{y}=\dfrac{1}{P_n(D)}f(x)$.

Свойства операторного многочлена $P_n(D)$.

1. $P_n(D)kv(x)=kP_n(D)v(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{P_n(D)}(kv(x))=k\dfrac{1}{P_n(D)}(v(x))$;

2. $P_n(D)e^{kx}=P_n(k)e^{kx}\Leftrightarrow\dfrac{1}{P_n(D)}\left(e^{kx}\right)=\dfrac{e^{kx}}{P_n(k)}$;

3. $P_n\left(D^{2}\right)\left(\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}P_n\left(-a^{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{P_n\left(D^{2}\right)}\left(\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix}\right)=\frac{1}{P_n\left(-a^{2}\right)}\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\end{Bmatrix};$$

4. $P_n(D)\left(e^{kx}v(x)\right)=e^{kx}P_n(D+k)(v(x))\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{P_n(D)}\left(e^{kx}v(x)\right)=e^{kx}\frac{1}{P_n(D+k)}(v(x));$$

5. $\dfrac{1}{D^{n}}$, $n\in N$ – это операция n-кратного интегрирования;

6. $\left(a_mD^{m}+a_{m+1}D^{m+1}+...a_MD^{M}\right)P_{m-1}(x)\equiv0\quad(M>m)$;

7. $\dfrac{1}{P_n(D)}\left(F_k(x)\right)=\left\{1\equiv P_n(D)Q_k(D)+R_{>k}(D)\right\}=Q_k(D)F_k(x)$;

8. $\dfrac{1}{P_n(D)}\left(k_1v_1(x)+k_2v_2(x)\right)=k_1\dfrac{1}{P_n(D)}v_1(x)+k_2\dfrac{1}{P_n(D)}v_2(x)$;

9. $\dfrac{1}{F_1(D)F_2(D)}\left(v(x)\right)=\dfrac{1}{F_2(D)F_1(D)}\left(v(x)\right)$.

Примеры.

1) $y'=e^{4x},\quad Dy=e^{4x},\quad y(x)=\int e^{4x}dx=\dfrac{1}{4}e^{4x}$;

2) $y''-2y'-3y=e^{4x}$, $\left(D^2-2D-3\right)y=e^{4x}$,

$$y(x)=\frac{1}{D^2-2D-3}\left(e^{4x}\right)=\frac{e^{4x}}{4^2-2\cdot4-3}=\frac{e^{4x}}{5};$$

3) $y''+9y=\sin 5x$, $\left(D^2+9\right)y=\sin 5x$,

$$y(x)=\frac{1}{D^2+9}\left(\sin 5x\right)=\frac{\sin 5x}{-5^2+9}=-\frac{1}{16}\sin 5x;$$

4) $y^{IV}+y''=7x$, $\left(D^4+D^2\right)y=7x$,

$$y(x)=\frac{1}{D^4+D^2}7x=\frac{1}{D^2\left(D^2+1\right)}7x.$$

Вычислим $\dfrac{1}{D^2+1}7x$. Воспользуемся правилом деления многочлена «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l}1\\ 1\ \ +D^2\end{array} & \dfrac{1+D^2}{1-D^2} \\ \hline -D^2 & \end{array}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{D^2+1}x=\left(1-\frac{D^2}{D^2+1}\right)x=x-\frac{\overbrace{D^2x}^{=0}}{D^2+1}=x-0=x,$$

откуда

$$y(x)=\frac{1}{D^2\left(D^2+1\right)}7x=7\frac{1}{D^2}x=7\int\left(\int xdx\right)dx=\frac{7x^3}{6}.$$

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Сформулируйте и докажите теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.
2. Сформулируйте и докажите теорему о структуре ФСР однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае наличия одного двукратного корня характеристического уравнения.
3. Образует ли множество решений <u>однородного</u> линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами линейное пространство? Если да, то укажите его размерность и базис. Ответ обоснуйте.
4. Образует ли множество решений <u>неоднородного</u> линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами линейное пространство? Если да, то укажите его размерность и базис. Ответ обоснуйте.
5. Найдите ФСР и общее решение однородного уравнения:

   $y'' + y = 0$; $y'' - y = 0$; $y''' + y = 0$; $y''' - y = 0$;

   $y^{IV} - y = 0$; $y'' + y' = 0$; $y'' - y' = 0$; $y''' + y' = 0$;

   $y''' + y'' = 0$; $y^{IV} - y'' = 0$;

   $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y'' - 6y' + 9y = 0$;

   $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;

   $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y'' - 2y' + 5y = 0$.
6. Выпишите вид частного решения (с неопределенными коэффициентами) для неоднородного дифференциального уравнения $y'' + y = f(x)$, если:

   $f(x) = \sin x$; $f(x) = x\cos x$;

   $f(x) = \cos 2x$; $f(x) = x\sin 2x$;

   $f(x) = 3e^{-x}$; $f(x) = x^2 e^{-x}$; $f(x) = e^{2x}\cos x$;

   $f(x) = 2x^2 - x + 1$.
7. Выпишите вид частного решения (с неопределенными коэффициентами) для неоднородного уравнения $y'' + y' = f(x)$, если:

   $f(x) = \sin x$; $f(x) = x\cos x$;

   $f(x) = \cos 2x$; $f(x) = x\sin 2x$;

$f(x)=3e^{-x}$; $f(x)=x^2e^{-x}$; $f(x)=e^{2x}\cos x$;

$f(x)=2x^2-x+1$.

8. Выпишите вид частного решения (с неопределенными коэффициентами) для неоднородного дифференциального уравнения $y''+4y'+5y=f(x)$, если:

$f(x)=2x^2+1$; $f(x)=xe^{-2x}$; $f(x)=x^2e^x$;

$f(x)=\cos x$; $f(x)=x\sin x$;

$f(x)=3x\sin 2x$; $f(x)=e^{-2x}\cos x$; $f(x)=2e^{2x}\sin x$.

Глава 4. **СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Лекция 9

§ 1. Общие свойства систем линейных ОДУ

Определение 1. ***Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений*** называется система вида

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица $(n \times n)$, а $\vec{F}(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ – заданная вектор-функция, определенные при $t \in [a, b]$, $\vec{x}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$.

Везде далее предполагается, что элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$, а также функции $f_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Определение 2. ***Однородной системой линейных дифференциальных уравнений***, соответствующей системе (1), называется система уравнений

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} \tag{2}$$

Сформулируем и докажем несколько теорем, устанавливающих наиболее важные свойства решений систем *линейных* уравнений, и являющихся следствием линейности операций дифференцирования и умножения матриц.

Теорема 1. Любая линейная комбинация решений однородной системы (2) также является решением этой системы.

Доказательство. Пусть $\dot{\vec{x}}_1 = A(t)\vec{x}_1$ и $\dot{\vec{x}}_2 = A(t)\vec{x}_2$. Положим $\vec{x} = \alpha\,\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2$, тогда

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\dot{\vec{x}}_1 + \beta\dot{\vec{x}}_2 =$$

$$= \alpha A(t)\vec{x}_1 + \beta A(t)\vec{x}_2 = A(t)(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = A(t)\vec{x}\,. \blacksquare$$

Теорема 2. Разность любых двух решений неоднородной системы (1) есть решение однородной системы (2).

Доказательство. Пусть $\dot{\vec{x}}_1 = A(t)\vec{x}_1 + \vec{F}(t)$ и $\dot{\vec{x}}_2 = A(t)\vec{x}_2 + \vec{F}(t)$. Тогда, вычитая, получим

$$\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A(t)\vec{x}_1 - A(t)\vec{x}_2 = A(t)(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \blacksquare$$

Следствие. Сумма любого (частного) решения неоднородной системы (1) и решения соответствующей однородной системы (2) есть решение неоднородной системы (1).

Сформулируем правило сложения решений неоднородной системы линейных уравнений, которое применяется при практическом нахождении решений неоднородной системы.

Теорема 3. Если $\dot{\vec{x}}_1 = A(t)\vec{x}_1 + \vec{F}_1(t)$ и $\dot{\vec{x}}_2 = A(t)\vec{x}_2 + \vec{F}_2(t)$, то их линейная комбинация $\vec{x} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ – решение системы уравнений $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \alpha\vec{F}_1(t) + \beta\vec{F}_2(t)$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Теорема 4 (*существования и единственности для линейной системы*). Решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ существует и единственно на любом отрезке $[t_0, T] \subset [a,b]$.

Доказательство. Сформулированный результат следует из того, что функции $G_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) = f_i(t) + a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + ... + a_{in}(t)x_n$ непрерывны, имеют ограниченные непрерывные частные производные по переменным x_i и, следовательно, удовлетворяют условию Липшица в полосе $t \subset [a,b]$, $-\infty < x_i < \infty$. Поэтому применима теорема существования и единственности решения нормальной системы, где постоянная Липшица $N \geq \max\limits_{i,j}\left[\max\limits_{[a,b]}\left|a_{i,j}(t)\right|\right]$.

Замечание. Поскольку $\vec{x}(t) = \vec{0}$ очевидно есть решение (2), то решение $\vec{x}(t)$ однородной линейной системы с непрерывной матрицей $A(t)$ тождественно равно нулю на всем отрезке $[a,b]$, если оно равно нулю в какой-либо точке этого отрезка. Это следует из Теоремы 4.

§ 2. Однородная система

1⁰. Линейная зависимость системы вектор-функций. Определитель Вронского

Пусть задана совокупность *n* решений $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$ однородной системы

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}, \tag{2}$$

определенных на отрезке $t \in [a,b]$.

Определение 3. Решения $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$ однородной системы (2) называются ***линейно зависимыми*** на отрезке $[a,b]$, если существует постоянный вектор $\vec{C}=\{c_1,c_2,...,c_n\}$, $\vec{C}\neq\vec{0}$ такой, что

$$X(t)\cdot\vec{C} \equiv \vec{0}, \qquad t \in [a,b].$$

Если последнее равенство выполняется лишь в случае $\vec{C}=\vec{0}$, то решения $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$ называются ***линейно независимыми***.

Определение 4. Определитель $\Delta(t) = \det X(t)$ матрицы $X(t) = (\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t))$, столбцами которой являются решения системы (2) называется ***определителем Вронского*** совокупности решений $\{\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)\}$.

2⁰. ФСР однородной системы и ее свойства

Определение 5. Совокупность *n* линейно независимых на отрезке $[a,b]$ решений $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$ однородной линейной системы (2) называется ***фундаментальной совокупностью решений*** (***ФСР***), а матрица $W(t)=(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t))$, столбцами которой являются эти решения – ***фундаментальной матрицей***.

Теорема 5. Определитель Вронского $\det W(t)$ фундаментальной матрицы определенной на отрезке $t \in [a,b]$, (т.е. составленной из столбцов ФСР на отрезке $[a,b]$) отличен от нуля во всех точках этого отрезка.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть $\det W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$. Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений относительно компонент вектора $\vec{C} = \{c^1, \ldots, c^n\}$:

$$W(t_0)\vec{C} = \vec{0}. \tag{3}$$

Так как определитель этой системы $\det W(t_0) = 0$, то существует нетривиальное решение $\vec{C} \neq \vec{0}$ системы уравнений (3). Это означает, что столбцы матрицы $W(t_0)$ – векторы $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ – линейно зависимы, что противоречит определению ФСР. ■

Теорема 6. *Пусть* матрица $A(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и в какой-либо точке $t_0 \in [a,b]$ векторы $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ линейно независимы.

Тогда совокупность решений $\{\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)\}$ линейно независима на всем отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Докажем, что при каждом фиксированием $t \in [a,b]$ равенство $W(t)\vec{C} = \vec{0}$ выполняется лишь при $\vec{C} = \vec{0}$. Предположим обратное, т.е. пусть при некотором $t_1 \in [a,b]$ существует такой вектор $\vec{C} \neq \vec{0}$, что $W(t_1)\vec{C} = \vec{0}$. Тогда линейная комбинация $\vec{x}(t) = W(t_1)\vec{C}$ есть решение системы (2), удовлетворяющее условию $\vec{x}(t_1) = \vec{0}$. Согласно теореме 4 $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}, \quad t \in [a,b]$. В частности, для $t = t_0$

$$\vec{0} = \vec{x}(t_0) = W(t_0)\vec{C},$$

т. е. векторы $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ линейно зависимы, что противоречит условию. ■

Следствие. Пусть $\{\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_n(t)\}$ – любая совокупность решений системы (2), определенных на отрезке $[a,b]$. Определитель Вронского этой совокупности решений либо отличен от нуля во всех точках отрезка $[a,b]$ (если он отличен от нуля хотя бы в одной точке этого отрезка), либо тождественно равен нулю на всем отрезке $[a,b]$. В первом случае соответствующие решения однородной системы (2) $\{\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_n(t)\}$ линейно независимы, во втором – линейно зависимы.

Теорема 7. Любое решение $\vec{x}(t)$ однородной системы (2) есть линейная комбинация столбцов ФСР:

$$\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}c^k\vec{x}_k(t)=W(t)\vec{C}\,.$$

Доказательство. Действительно, в точке $t_0\in[a,b]$

$$\vec{x}(t_0)=\sum_{k=1}^{n}c^k\vec{x}_k(t_0)=W(t_0)\vec{C} \tag{4}$$

Рассмотрим два решения однородной системы (2): $\vec{x}(t)$ и $\sum_{k=1}^{n}c^k\vec{x}_k(t)$. В силу (4) эти два решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию при $t=t_0$. Следовательно, на основании Теоремы 5

$$\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}c^k\vec{x}_k(t)=W(t)\vec{C}$$

при любом $t\in[a,b]$. ■

Замечание. Из Теоремы 8 следует, что общее решение однородной системы (2) имеет вид

$$\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}c^k\vec{x}_k(t)=W(t)\vec{C}\quad, \tag{5}$$

где $W(t)$ – фундаментальная матрица, $\vec{C}$ – произвольный постоянный вектор.

Следствие. Множество всех решений однородной системы (2) образует n-мерное векторное (линейное) пространство, базисом которого может служить любая ФСР.

<u>*Доказательство*</u>. При любых $c^1,\ldots,c^n$ выражение (5) представляет собой решение системы (2), а в силу Теоремы 8 любое решение (2) может быть записано в виде (5). Поэтому (5) есть общее решение (2). Сумма двух решений (2) и произведение решения (2) на число есть снова решения этой системы. Кроме того, любая ФСР линейно независима и любое решение через нее линейно выражается. Следовательно, множество всех решений (2) образует n-мерное векторное пространство, базисом которого служит любая ФСР. ■

Замечание. Так как каждый столбец матрицы $W(t)=\left(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)\right)$ является решением системы (2), то фундаментальная матрица $W(t)$ однородной системы (2) удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dW}{dt}=A(t)\cdot W$$

и может быть определена как решение этого уравнения с условием $\det W(t)\neq 0,\quad t\in[a,b]$.

<u>Теорема 8</u>. Линейная однородная система (2) имеет ФСР.

<u>*Доказательство*</u>. Определим фундаментальную матрицу (и, следовательно, ФСР) как решение задачи Коши

$$\frac{dW}{dt}=A(t)\cdot W,\qquad W(t_0)=B,\quad \det B\neq 0.$$

В силу следствия из Теоремы 7 $\det W(t)\neq 0$ при всех $t\in[a,b]$. Таким образом, $W(t)$ – фундаментальная матрица, а ее столбцы образуют ФСР системы (2). ■

Замечание. В качестве фундаментальной матрицы удобно использовать $W(t)=\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ – решение специальной задачи Коши

$$\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\cdot\Phi,\qquad \Phi(t_0)=E,$$

где E – единичная $(n\times n)$ матрица.

§ 3. Неоднородная система

1⁰. Общее решение неоднородной системы

Рассмотрим неоднородную систему (1)

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\cdot\vec{x} + \vec{F}(t).$$

Пусть $\vec{y}_ч(t)$ – некоторое частное решение этой системы.

<u>Теорема 9</u>. Любое решение $\vec{x}(t)$ неоднородной системы (1) представимо в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_ч(t) + W(t)\cdot\vec{C},$$

где $W(t)$ – фундаментальная матрица, $\vec{C}$ – произвольный постоянный вектор.

<u>Доказательство</u>. Достаточно проверить подстановкой, что вектор-функция $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_ч(t)$ является решением однородной системы. ■

2⁰. Метод вариации постоянных (метод Лагранжа). Матрица Коши

Пусть матрица $A(t)$ и вектор $\vec{F}(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, и известна ФСР однородной системы (2). Покажем, что тогда общее решение неоднородной линейной системы (1) может быть найдено с помощью квадратур.

Пусть $\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t)$ – ФСР однородной системы (2), $W(t) = (\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_n(t))$ – ее фундаментальная матрица. Как было показано выше, фундаментальная матрица $W(t)$ является решением матричного уравнения

$$\dot{W}(t) = A(t)W(t). \tag{6}$$

Заметим, что определитель фундаментальной матрицы $\det W(t) \neq 0,\quad t\in[a,b]$, и будем искать решение системы (1) в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c^k(t)\vec{x}_k(t) = W(t)\vec{C}(t) \tag{7}$$

Дифференцируя (7) и подставляя

$$\dot{\vec{x}}(t) = W(t)\dot{\vec{C}}(t) + \dot{W}(t)\vec{C}(t)$$

в (1), получим

$$W(t)\dot{\vec{C}}(t) + \left[\dot{W}(t) - A(t)W(t)\right]\vec{C}(t) = \vec{F}(t). \quad (8)$$

В силу (6) квадратная скобка в (8) равно нулю, поэтому (8) принимает вид

$$W(t)\dot{\vec{C}}(t) = \vec{F}(t) \quad (9)$$

Так как $\det W(t) \neq 0$, то существует обратная матрица $W^{-1}(t)$. Тогда

$$\dot{\vec{C}}(t) = W^{-1}(t)\vec{F}(t),$$

откуда

$$\vec{C}(t) = \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)d\tau + \vec{C}_0, \quad (10)$$

где $\vec{C}_0$ – произвольный постоянный вектор. Подставляя (10) в формулу (7), получим

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C}_0 + W(t)\int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Докажем, что (11) есть общее решение неоднородной системы (1). Так как $\vec{C}_0$ – произвольный постоянный вектор, то, выбирая $\vec{C}_0 = \vec{0}$, получим частное решение системы (1):

$$\vec{x}_ч(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)d\tau.$$

Теперь (11) можно переписать в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_ч(t) + W(t)\vec{C}_0, \quad (12)$$

где $\vec{C}_0$ – произвольный постоянный вектор. С другой стороны, $\vec{x}_0(t) = W(t)\vec{C}_0$ – общее решение однородной системы (2), и в силу Теоремы 8 формула (12) (следовательно, и (11)), дает общее решение неоднородной системы (1).

Покажем теперь, как с помощью представления (11) решить задачу Коши для системы (1):

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\cdot\vec{x} + \vec{F}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$$

Полагая в формуле (11) $t=t_0$ получим $\vec{x}(t_0)=W(t_0)\vec{C}_0=\vec{x}^0$, откуда

$$\vec{C}_0=W^{-1}(t_0)\cdot\vec{x}^0$$

Таким образом, решение задачи Коши для системы (1) дается формулой

$$\vec{x}(t)=W(t)W^{-1}(t_0)\cdot\vec{x}^0+W(t)\int\limits_{t_0}^{t}W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)d\tau,$$

или

$$\vec{x}(t)=W(t)W^{-1}(t_0)\cdot\vec{x}^0+\int\limits_{t_0}^{t}W(t)W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)d\tau.$$

Если обозначить $W(t)W^{-1}(\tau)=K(t,\tau)$, то решение задачи Коши для системы (1) примет вид

$$\vec{x}(t)=K(t,t_0)\cdot\vec{x}^0+\int\limits_{t_0}^{t}K(t,\tau)\vec{F}(\tau)d\tau.$$

Определение 6. Матрица $K(t,\tau)=W(t)W^{-1}(\tau)$ называется ***матрицей Коши, "импульсной" матрицей*** или ***матрицантом***.

Замечание. Очевидно, что матрица Коши однозначно определяется как решение задачи Коши $\frac{d}{dt}K(t,t_0)=A(t)K(t,t_0)$, где $K(t_0,t_0)=E$ – единичная матрица. Следовательно, для построения матрицы Коши можно либо воспользоваться определением и формулой (22), либо решить n векторных задач Коши:

$$\dot{\vec{x}}_k=A(t)\vec{x}_k,\qquad \vec{x}_k(t_0)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow k,\qquad k=1,2,...,n.$$

Теорема 10. ФСР однозначно определяет нормальную форму линейной однородной системы, т.е. матрицу $A(t)$. Иначе говоря, зная фундаментальную матрицу $W(t)$ системы, можно однозначно восстановить эту систему уравнений. ■

<u>*Доказательство*</u>. Пусть задана фундаментальная матрица $W(t)$ однородной системы (2). Тогда из (6)

$$\dot{W}(t) = A(t)W(t) \qquad \Rightarrow \qquad A(t) = \dot{W}(t)W^{-1}(t). \blacksquare$$

Замечание. Общее решение неоднородной системы (1) однозначно определяет эту систему. В самом деле $A(t) = \dot{W}(t)W^{-1}(t)$. Далее, выбирая какое-нибудь частное решение $\vec{x}_ч(t)$ системы (1), находим вектор $\vec{F}(t) = \dot{\vec{x}}_ч(t) - A(t)\vec{x}_ч(t)$.

Рассмотрим теперь вопрос о степени гладкости решения линейной неоднородной системы (1). По определению решение $\vec{x} = \vec{x}(t)$ является дифференцируемой вектор-функцией переменного t на всем отрезке $[a,b]$. Может ли решение обладать большей гладкостью?

<u>**Теорема 11**</u>. *Пусть* матрица $A(t)$ и вектор $\vec{F}(t)$ k раз дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. *Тогда* любое решение $\vec{x} = \vec{x}(t)$ системы (1) $k+1$ раз дифференцируемо.

<u>*Доказательство*</u>. Так как $\vec{x}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то в правой части системы (1) при $k \geq 1$ стоит дифференцируемая вектор-функция. Поэтому существует

$$\ddot{\vec{x}} = A(t)\dot{\vec{x}} + \dot{A}(t)\vec{x} + \dot{\vec{F}}(t).$$

Если $k \geq 2$ то в правой части только что полученного равенства снова стоит дифференцируемая вектор-функция, и потому существует $\dddot{\vec{x}}(t)$. Повторяя это рассуждение k раз, получим утверждение теоремы. ■

Замечание. Если матрица $A(t)$ и вектор $\vec{F}(t)$ бесконечно дифференцируемы, т. е. имеют на $[a,b]$ производные всех порядков, то из доказанной теоремы следует, что и любое решение системы (1) бесконечно дифференцируемо.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Могут ли указанные совокупности вектор-функций образовывать ФСР однородной системы линейных дифференциальных уравнений при $t \in [0;+\infty)$? Если да, то запишите соответствующую однородную систему:

а) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \end{pmatrix};$

б) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \end{pmatrix};$

в) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix};$

г) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} te^t \\ (t+1)e^t \end{pmatrix};$

д) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix};$

е) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix};$

ж) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix};$

з) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$

2. Образует ли множество решений нормальной системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка линейное пространство? Если да, то какова его размерность и что можно взять в качестве базиса? Ответ обоснуйте.
3. Можно ли, зная ФСР <u>однородно</u>й системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, восстановить матрицу этой системы? Если да, то опишите алгоритм. Если нет – обоснуйте.

4. Можно ли, зная общее решение неоднородной нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, восстановить матрицу этой системы и ее правую часть? Если да, то опишите алгоритм. Если нет – обоснуйте.
5. Для уравнения $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ запишите эквивалентную нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
6. Сведите систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t), \end{cases}$$

к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

7. Найдите матрицу Коши системы линейных уравнений и запишите с ее помощью решение задачи Коши:

а) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + f_2(t), & x_2(0) = 2\ ; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + f_1(t), & x_1(0) = -1, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + f_2(t), & x_2(0) = 1\ . \end{cases}$$

Лекция 10

§ 4. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

1^0. Однородная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \tag{1}$$

где a_{ij} – числа, т.е. $A = \left(a_{ij}\right)$, $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ – постоянная $\left(n \times n\right)$ матрица.

Будем искать ее решение в виде

$$\vec{y}(t) = \vec{h}e^{\lambda t}, \tag{2}$$

где $\vec{h}$ – постоянный вектор. Подставляя (2) в (1), получим

$$\lambda\vec{h}e^{\lambda t} = A\vec{h}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad A\vec{h} = \lambda\vec{h},$$

т.е. $\vec{h}$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ.

Соответствующая задача рассматривалась в курсе линейной алгебры. Напомним некоторые результаты.

Собственные значения матрицы A определяются из уравнения

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

Определение. Уравнение (3) называется ***характеристическим уравнением***

Уравнение (3) – алгебраическое уравнение n-го порядка, следовательно, имеет ровно n корней (с учетом кратности). Поэтому возможны следующие случаи.

а) Все корни характеристического уравнения (3) λ_k, $k = 1,2,...,n$ – простые (будем называть их *простыми собствен-*

ными значениями матрицы A). В этом случае им соответствуют линейно независимые собственные векторы $\vec{h}_k$, $k = 1,2,...,n$ (всего n штук), которые образуют базис в линейном пространстве n-мерных столбцов.

б) Среди корней характеристического уравнения (3) имеются кратные, но корни λ_k, $k = 1,2,...,n$ уравнения (3) также являются *простыми собственными значениями матрицы* A, т.е. число линейно-независимых собственных векторов, отвечающих этим собственным значениям, равно кратности корня (алгебраическая кратность каждого корня совпадает с геометрической). В этом случае матрица A также имеет n линейно независимых собственных векторов, и эти векторы образуют базис в пространстве n-мерных столбцов.

в) Среди корней уравнения (3) имеются кратные, но корни λ_k, $k = 1,2,...,n$ уравнения (3) являются *кратными собственными значениями матрицы* A, т.е. число линейно-независимых собственных векторов меньше, чем кратность корня. В этом случае собственные векторы не образуют базиса в линейном пространстве n-мерных столбцов, и для построения этого базиса нужно использовать также присоединенные векторы.

Структура ФСР в случае простых собственных значений матрицы системы

Теорема 1. *Пусть* все собственные значения λ_k, $k = 1,2,...,n$ матрицы A простые и им соответствуют собственные векторы $\vec{h}_k$, $k = 1,2,...,n$. Тогда вектор-функции $\vec{\psi}_\kappa(t) = \vec{h}_k \cdot e^{\lambda_k t}$, $k = 1,2,...,n$ образуют ФСР однородного уравнения (1).

Доказательство. Напомним, что *собственные значения* матрицы A *простые*, если реализуется либо случай а), либо б) приведенной выше классификации. В этом случае матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов, которые образуют базис в пространстве n-мерных столбцов.

По построению все вектор-функции $\vec{\psi}_к(t)=\vec{h}_k\cdot e^{\lambda_k t}$, $k=1,2,...,n$ являются решениями уравнения (1). Составим определитель Вронского этого набора вектор-функций

$$\det W(t)=\det\left(\vec{\psi}_1(t),\vec{\psi}_2(t),...,\vec{\psi}_n(t)\right)=$$
$$=\det\left(\vec{h}_1\cdot e^{\lambda_1 t},\vec{h}_2\cdot e^{\lambda_2 t},...,\vec{h}_n\cdot e^{\lambda_n t}\right)=e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)t}\cdot\det\left(\vec{h}_1,\vec{h}_2,...,\vec{h}_n\right).$$

Так как собственные векторы $\vec{h}_k$, $k=1,2,...,n$ линейно независимы, то при всех $t>0$

$$\det W(0)=\det\left(\vec{h}_1,\vec{h}_2,...,\vec{h}_n\right)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \det W(t)=\underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_3)\cdot t}}_{\neq 0}\cdot W(0)\neq 0,$$

т.е. вектор-функции $\vec{\psi}_к(t)=\vec{h}_k\cdot e^{\lambda_k t}$, $k=1,2,...,n$ линейно независимы при $t>0$ и образуют ФСР однородной системы (1). ■

Структура ФСР в случае кратных собственных значений матрицы системы

Этот случай рассмотрим при некотором дополнительном условии, а именно пусть матрица A имеет $l<n$ простых собственных значений λ_k, $k=1,2,...,l<n$, которым соответствуют (линейно независимые) собственные векторы $\vec{h}_k$, $k=1,2,...,l<n$, а также одно кратное $\overline{\lambda}$ (кратности $q=n-l$), т.е. $\overline{\lambda}=\lambda_{l+1}=\lambda_{l+2}=...=\lambda_n$. Обозначим $\vec{h}_{l+1}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda}$, а $\vec{h}_{l+1}^{(i)}$, $i=1,2,...,q-1$ – присоединенные векторы, которые находятся из следующих уравнений (см. курс линейной алгебры):

$$A\vec{h}_{l+1}=\overline{\lambda}\vec{h}_{l+1},$$
$$A\vec{h}_{l+1}^{(1)}=\overline{\lambda}\vec{h}_{l+1}^{(1)}+\vec{h}_{l+1},$$
$$A\vec{h}_{l+1}^{(i)}=\overline{\lambda}\vec{h}_{l+1}^{(i)}+\vec{h}_{l+1}^{(i-1)},\qquad i=2,3,...,q-1.$$

Из курса линейной алгебры известно, что указанные векторы существуют и являются линейно независимыми, т.е. совокупность n столбцов $\{\ \underbrace{\vec{h}_1,\vec{h}_2,...,\vec{h}_l}_{l\ штук},\underbrace{\vec{h}_{l+1},\vec{h}_{l+1}^{(1)},\vec{h}_{l+1}^{(2)},...,\vec{h}_{l+1}^{(q-1)}}_{q=n-l\quad штук}\ \}$ образует базис в пространстве столбцов длины n.

Теорема 2. *Пусть* матрица A имеет $l<n$ простых собственных значений λ_k, $k=1,2,...,l<n$, которым соответствуют (линейно независимые) собственные векторы $\vec{h}_k$, $k=1,2,...,l<n$, и одно – кратное $\bar{\lambda}$ (кратности $q=n-l$) с собственным вектором $\vec{h}_{l+1}$ и набором присоединенных векторов $\vec{h}^{(i)}_{l+1}$, $i=1,2,...,q-1$.

Тогда ФСР однородной системы (1) имеет следующую структуру:

$$\vec{\psi}_\kappa(t)=\vec{h}_k\cdot e^{\lambda_k t}, \qquad k=1,2,...,l$$

$$\vec{\psi}_{l+1}(t)=\vec{h}_{l+1}\cdot e^{\bar{\lambda}t}$$

$$\vec{\psi}_{l+2}(t)=\left(\vec{h}^{(1)}_{l+1}+t\cdot\vec{h}_{l+1}\right)\cdot e^{\bar{\lambda}t}$$

....

$$\vec{\psi}_n(t)=\left(\vec{h}^{(q-1)}_{l+1}+t\cdot\vec{h}^{(q-2)}_{l+1}+...+\frac{t^{q-2}}{(q-2)!}\cdot\vec{h}^{(1)}_{l+1}+\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}\cdot\vec{h}_{l+1}\right)\cdot e^{\bar{\lambda}t}.$$

В том, что это решения, можно убедиться непосредственной подстановкой в систему (1). Линейная независимость следует из того, что в силу отмеченной выше линейной независимости n столбцов $\left\{\vec{h}_1,\vec{h}_2,...,\vec{h}_l,\vec{h}_{l+1},\vec{h}^{(1)}_{l+1},\vec{h}^{(2)}_{l+1},...,\vec{h}^{(q-1)}_{l+1}\right\}$ при всех $t>0$ имеем

$$\det W(0)=\det\left(\vec{h}_1,\vec{h}_2,...,\vec{h}_l,\vec{h}_{l+1},\vec{h}^{(1)}_{l+1},\vec{h}^{(2)}_{l+1},...,\vec{h}^{(q-1)}_{l+1}\right)\neq 0 \;\Rightarrow\; W(t)\neq 0. \blacksquare$$

Теорема легко обобщается на случай наличия нескольких кратных собственных значений с соответствующими цепочками присоединенных векторов различной длины.

Пример. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-2x_2,\\ \dot{x}_2=x_1+3x_2+x_3,\\ \dot{x}_3=-2x_1-2x_2-x_3\,.\end{cases}$$

Решение. Матрица системы имеет вид $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&3&1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$, а ее собственными значениями являются $\lambda_1=1,\ k_1=3$;

$$B_1 = A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1^2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_1^3 \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix};$$

$$B_1 \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 \\ -2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}, \quad B_1^2 \vec{C}_1 = \begin{pmatrix} -2c_1 - 4c_2 - 2c_3 \\ 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + 2c_3 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}(t) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 \\ -2c_1 - 2c_2 - 2c_3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -2c_1 - 4c_2 - 2c_3 \\ 0 \\ 2c_1 + 4c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \right\} e^t .$$

2 $^{\mathbf{0}}$***. Неоднородная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами***

Рассмотрим неоднородную систему

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – постоянная матрица. Напомним, что общее решение неоднородной линейной системы имеет вид $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_ч$, где $\vec{x}_0$ – общее решение соответствующей однородной системы, а $\vec{x}_ч$ – любое частное решение неоднородной.

Способы нахождения частного решения неоднородной системы.

1. Метод вариации постоянных или с помощью матрицы Коши.
2. Для правых частей специального вида ("квазиполинома") подбор решений методом неопределенных коэффициентов.
3. Операторный метод.

§ 5. Некоторые приемы, упрощающие решение линейных дифференциальных уравнений и систем

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые частные случаи, когда решение дифференциальных уравнений либо упрощается, либо сводится к квадратурам.

1⁰. Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = 0.$$

Пусть известно частное решение $\varphi(t)$ этого уравнения, отличное от нуля на рассматриваемом отрезке $[a, b]$. Тогда порядок уравнения можно понизить, сделав замену переменных $x = y \cdot \varphi(t)$. Получим следующее уравнение для y:

$$\varphi(t)y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(t)\cdot\dot{y} + \\ + \left(\varphi^{(n)} + a_1(t)\varphi^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\varphi\right)\cdot y = 0.$$

Последнее слагаемое этой формуле равно нулю, так как $\varphi(t)$ является решением исходного уравнения. Обозначая $\dot{y} = z$, получим линейное однородное уравнение $(n-1)$-го порядка относительно функции $z(t)$ $\left(\varphi(t) \neq 0\right)$:

$$\varphi(t)z^{(n-1)} + b_1(t)z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(t)z = 0.$$

2⁰. Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t)$$

с диагональной матрицей

$$A(t) = \mathrm{diag}\left(a_{11}(t),\ldots,a_{nn}(t)\right) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

В этом случае система распадается на n линейных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = a_{ii}(t)x_i + f_i(t) \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

и потому интегрируется в квадратурах.

3⁰. Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{F}(t)$$

с треугольной матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

В этом случае интегрирование системы также сводится к квадратурам. Действительно, первое уравнение системы

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + f_1(t)$$

– линейное уравнение с одной неизвестной функцией $x_1(t)$, и его решения находятся с помощью квадратур. Второе уравнение системы, записанное в виде

$$\dot{x}_2 = a_{22}(t)x_2 + \left(f_2(t) + a_{21}(t)x_1(t)\right)$$

– также линейное уравнение с одной неизвестной функцией $x_2(t)$. Последовательно решая получившиеся линейные уравнения, найдем решение исходной системы.

4⁰. Метод исключения для системы линейных дифференциальных уравнений

Выше было показано, что одно линейное уравнение n-го порядка сводится к линейной системе из n уравнений. Имеет место и обратное утверждение, т.е. любой линейной системе можно сопоставить линейное уравнение n-го порядка. Этот способ решения системы линейных дифференциальных уравнений называется методом исключения. Мы не будем обосновывать такую возможность в общем виде, а ограничимся лишь рассмотрением примера.

Указанный метод особенно эффективен в случае системы двух уравнений: ее можно свести к одному уравнению 2-го порядка, построить ФСР и общее решение для него, а затем и для системы.

Пример. Рассмотрим систему с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

и сведем ее к одному уравнению второго порядка относительно функции $x_1(t)$. Для этого продифференцируем первое уравнение и вместо производных $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ подставим правые части исходной системы:

$$\ddot{x}_1 = a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 + \dot{f}_1 = a_{11}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1\right) + a_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2\right) \equiv$$
$$\equiv b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + q_1(t) \quad .$$

Выразим x_2 из первого уравнения исходной системы

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(\dot{x}_1 - a_{11}x_1 - f_1\right)$$

и подставим в правую часть записанного выше соотношения. Получим

$$\ddot{x}_1 = b_{11}x_1 + \frac{b_{12}}{a_{12}}\left(\dot{x}_1 - a_{11}x_1 - f_1\right) + q_1,$$

или

$$a_{12}\ddot{x}_1 - b_{12}\dot{x}_1 + \left(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}\right)x_1 = g_1(t).$$

Записав общее решение этого уравнения, найдем $x_1(t)$. Подставив его в выражение для x_2, найдем общее решение системы $\{x_1(t),\ x_2(t)\}$.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Образует ли множество решений нормальной системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка линейное пространство? Если да, то какова его размерность и что можно взять в качестве базиса? Ответ обоснуйте.
2. Образует ли множество решений нормальной системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка линейное пространство? Если да, то

какова его размерность и что можно взять в качестве базиса? Ответ обоснуйте.

3. На каком интервале решение задачи Коши для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка существует и единственно? Ответ обоснуйте.
4. Является ли решение задачи Коши для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка функцией ограниченной степени роста? Ответ обоснуйте.
5. Найдите производную определителя Вронского, построенного на решениях нормальной системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
6. Выведите формулу Лиувилля для определителя Вронского, построенного на решениях нормальной системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка
7. Можно ли, зная фундаментальную матрицу решений нормальной системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, восстановить матрицу этой системы? Если да, то опишите алгоритм. Если нет – обоснуйте.
8. Можно ли, зная общее решение нормальной системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, восстановить матрицу этой системы и ее правую часть? Если да, то опишите алгоритм. Если нет – объясните, почему?
9. Какова степень гладкости решения нормальной системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка?
10. Для уравнения $\ddot{x} + 2\gamma_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 0 < \gamma_0 < \omega_0$ запишите эквивалентную нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
11. Сведите систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

12. Для следующих нормальных систем ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = \ \ x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \ \ x, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \ \ y, \\ \dot{y} = 4x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = \ \ x - y, \end{cases}$$

найдите:

а) фундаментальную совокупность решений и общее решение;

б) фундаментальную матрицу и ее определитель;

в) матрицу Коши;

г) решение задачи Коши с начальными условиями $x(0) = 1,\ \ y(0) = -1$.

Глава 5. **КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ**

Лекция 11

Краевыми задачами называются задачи для дифференциальных уравнений, в которых дополнительные условия (в отличие от начальной задачи) ставятся в нескольких точках.

Далее мы рассмотрим двухточечные краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка и некоторые задачи для нелинейных уравнений 2-го порядка. Более подробно будет изучена краевая задача с граничными условиями 1-го рода (Дирихле) и отмечены некоторые особенности задач с граничными условиями 2-го рода (Неймана) и 3-го рода.

§ 1. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка

1⁰. Постановка задачи

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f_1(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

с дополнительными краевыми условиями первого рода (задача Дирихле)

$$u(0) = u^0, \quad u(l) = u^l, \tag{2}$$

предполагая, что функции $a_1(x), a_2(x), f_1(x) \in C[0,l]$.

<u>Определение</u>. Классическим решением задачи Дирихле (1)–(2) будем называть функцию $u(x) \in C^2(0,l) \bigcap C[0,l]$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2).

Замечание. В случае краевых условий 2-го и 3-го рода $u(x) \in C^2(0,l) \bigcap C^1[0,l]$.

Преобразуем уравнение (1) к более удобному для дальнейшего исследования виду. Умножим (1) на $p(x)=e^{\int a_1(x)\,dx}>0$. Тогда $p'(x)=a_1(x)\,p(x)$ и

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\underbrace{a_1(x)\,p(x)}_{p'(x)}\frac{du}{dx}+\underbrace{p(x)a_2(x)}_{-q(x)}u=\underbrace{p(x)\,f_1(x)}_{f_2(x)},$$

или

$$L[u]\equiv\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=f_2(x).$$

Далее везде, где не оговорено другое, будем использовать обозначение

$$L[u]=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=p(x)u''+p'(x)u'-q(x)u\ .$$

Легко видеть, что замена переменных $u(x)=y(x)+v(x)$, где $v(x)\in C^2[0,l]$ и удовлетворяет краевым условиям (2), например $u(x)=y(x)+\left[u^0+\frac{u^l-u^0}{l}x\right]$, приводит задачу (1)–(2) к задаче с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases}L[y]=f_2(x)-L[v]\equiv f(x), & 0<x<l, \qquad f(x)\in C[0,l],\\ y(0)=0, \qquad y(l)=0.\end{cases}$$

Поэтому, не ограничивая общности, далее будем рассматривать краевую задачу

$$\begin{aligned}&L[y]=f(x), \qquad 0<x<l,\\ &B_0[y](0)=y(0)=0,\\ &B_l[y](l)=y(l)=0\ .\end{aligned}\tag{3}$$

Аналогично может быть рассмотрена задача с краевыми условиями 2-го рода $B_{0,l}[y]\equiv\frac{dy}{dx}$ или 3-го рода $B_{0,l}[y]\equiv\frac{dy}{dx}+hy$, где $h=\text{const}$.

2^0. Формулы Грина. Тождество Лагранжа

Пусть $u(x), v(x) \in C^2[0,l]$. Умножим $L[u]$ на v и проинтегрируем от 0 до l по частям. Получим

$$\int_0^l v(\xi)L[u](\xi)d\xi =$$

$$= p(\xi)v(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_0^l - \int_0^l \left[p(\xi)\frac{du}{d\xi}\frac{dv}{d\xi} + q(\xi)u(\xi)v(\xi)\right]d\xi \quad (4)$$

– *первая формула Грина*.

Меняя в (4) местами функции v и u и вычитая почленно полученное соотношение из (4), получим

$$\int_0^l (vL[u] - uL[v])d\xi = \left\{ p(\xi)\left(v(\xi)\frac{du}{d\xi} - u(\xi)\frac{dv}{d\xi}\right)\right\}\bigg|_0^l$$

– *вторая формула Грина*.

Следствие. Нетрудно доказать (проведите необходимые выкладки самостоятельно), что на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, оператор

$$L[u] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u$$

является самосопряженным, т.е. $(u, L[v]) = (v, L[u])$, где скалярное произведение

$$(u,v) = \int_0^l u(x)v(x)dx\,.$$

Для этого нужно произвести интегрирование по частям в равенстве $(u, L[v]) = (v, L[u])$ и учесть граничные условия, причем в случае граничных условий 3-го рода при $x = 0$ имеем

$$\frac{du}{dx}(0) + hu(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}(0) = -hu(0),$$

$$\frac{dv}{dx}(0) + hv(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}(0) = -hv(0),$$

$$p(0)\left(v(0)\frac{du}{d\xi}(0)-u(0)\frac{dv}{d\xi}(0)\right)=p(0)\big(-v(0)hu(0)+u(0)hv(0)\big)=0\,.$$

Аналогично, обращается в 0 подстановка в точке $x=l$.

Заменив во *второй формуле Грина* верхний предел интегрирования на $x\in[0,l]$, получим

$$\int_0^x\big(vL[u]-uL[v]\big)d\xi=\left\{p(\xi)\left(v(\xi)\frac{du}{d\xi}-u(\xi)\frac{dv}{d\xi}\right)\right\}\Bigg|_0^x$$

и продифференцируем обе части написанного равенства по переменной x:

$$vL[u]-uL[v]=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left(v(x)\frac{du}{dx}-u(x)\frac{dv}{dx}\right)\right\}.$$

Подставив вместо $u(x)$ и $v(x)$ функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – ФСР однородного уравнения, получим °

$$y_2\underbrace{L[y_1]}_{=0}-y_1\underbrace{L[y_2]}_{=0}=0\Rightarrow\frac{d}{dx}\left\{p(x)\underbrace{\left(y_2(x)\frac{dy_1}{dx}-y_1(x)\frac{dy_2}{dx}\right)}_{W(x)\neq0}\right\}=0$$

– *тождество Лагранжа*.

Далее, интегрируя последнее равенство, будем иметь $p(x)W(x)=C$ – *формула Лиувилля–Остроградского*, где $W(x)$ — определитель Вронского для решений $y_1(x)$, $y_2(x)$.

3⁰. Теорема единственности решения неоднородной краевой задачи

<u>Теорема 1</u>. *Пусть* однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

Тогда соответствующая ей неоднородная задача имеет не более одного решения.

<u>Доказательство</u>. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи

$$\begin{aligned}&L[y]=f(x),\quad 0<x<l,\\&B_0[y](0)=0,\quad B_l[y](l)=0,\end{aligned}\qquad(5)$$

тогда $w(x)=y_1(x)-y_2(x)$ – решение однородной краевой задачи

$$\begin{aligned} &L[w]=0, \quad 0<x<l, \\ &B_0[w](0)=0, \quad B_l[w](l)=0, \end{aligned} \tag{6}$$

которая по условию имеет только нулевое решение, т.е. $w(x)\equiv 0$, или $y_1(x)\equiv y_2(x)$. ■

4⁰. Теорема о достаточных условиях единственности решения неоднородной краевой задачи

Сформулируем некоторые достаточные условия того, что однородная краевая задача имеет только тривиальные решения.

Теорема 2. *Пусть* в операторе $L[u]$ $q(x)\geq 0$. *Тогда* однородная краевая задача имеет:

1) в случае граничных условий 1-го рода только тривиальное решение;

2) в случае граничных условий 2-го рода только тривиальное решение, если $q(x)>0$, или нетривиальное решение $u(x)=\text{const}$, если $q(x)\equiv 0$;

Доказательство. Пусть $y=u(x)$ – решение однородной задачи. Применим *первую формулу Грина*:

$$\int_0^l u(\xi)\underbrace{L[u]}_{=0}(\xi)d\xi=0=$$

$$=p(\xi)u(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_0^l-\int_0^l\left[p(\xi)\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+q(\xi)u^2(\xi)\right]d\xi.$$

.

Далее

$$0=\underbrace{p(\xi)u(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_0^l}_{=0}-\int_0^l\left[p(\xi)\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+q(\xi)u^2(\xi)\right]d\xi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^l\left[p(\xi)\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+q(\xi)u^2(\xi)\right]d\xi=0 \ .$$

Так как $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, то оба слагаемых под интегралом неотрицательны, а равенство возможно лишь в когда $\dfrac{du}{dx} \equiv 0$. Поэтому $u(x) = \text{const}$ независимо от граничных условий.

1) Если заданы граничные условия 1-го рода $u(0) = u(l) = 0$, тогда $u(x) = \text{const} = u(0) = u(l) = 0$.
2) В случае граничных условий 2-го рода:

$$\frac{du}{dx} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = \text{const} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad q(x) > 0, \\ C, & \text{если} \quad q(x) \equiv 0. \end{cases} \blacksquare$$

5⁰. Функция Грина и ее свойства

Определение. Функцией Грина краевой задачи (1)–(2) называется функция двух переменных $G(x,s)$ такая, что:

1) $G(x,s)$ определена и непрерывна в квадрате $\{0 \leq x \leq l\} \times \{0 \leq s \leq l\}$;
2) $G(x,s)$ удовлетворяет однородному уравнению $L_x[G] = 0$ при $0 < x, s < l$;
3) $G(x,s)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$;
4) в точке $x = s$ первая производная по G_x имеет разрыв I рода со скачком:

$$\left.\frac{dG(x,s)}{dx}\right|_{x=s-0}^{x=s+0} = \frac{dG}{dx}(s+0,s) - \frac{dG}{dx}(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}.$$

Замечание. Из определения функции $G(x,s)$ следует, что

1) $$\frac{dG}{dx}(x+0,x) - \frac{dG}{dx}(x-0,x) = \frac{1}{p(x)};$$

2а) $$\frac{dG}{dx}(x,x-0) = \frac{dG}{dx}(x+0,x);$$

2б) $$\frac{dG}{dx}(x,x+0) = \frac{dG}{dx}(x-0,x).$$

<u>Теорема 3</u>. *Пусть* однородная краевая задача (5) имеет только тривиальное (т.е. $y \equiv 0$) решение.

Тогда функция Грина краевой задачи (3) существует.

<u>Доказательство</u>. Подробное доказательство проведем лишь для случая граничных условий 1-го рода (задача Дирихле). В случае других краевых условий теорема доказывается аналогично.

Для доказательства приведем алгоритм построения функции Грина. Рассмотрим уравнение $L[y]=0$ и выберем 2 его решения, удовлетворяющие каждое только одному из граничных условий

$$y_1(x): \qquad y_1(0)=0, \qquad y_1'(0)\neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1(x)\not\equiv 0;$$

$$y_2(x): \qquad y_2(l)=0, \qquad y_2'(l)\neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_2(x)\not\equiv 0.$$

Докажем, что эти два решения линейно независимы. Действительно, пусть это не так, т.е. $y_2(x)=C\cdot y_1(x)$. Тогда $y_2(0)=C\cdot y_1(0)=0$, но по условию теоремы задача с нулевыми краевыми условиями

$$L[y]=0; \qquad y(0)=0, \quad y(l)=0,$$

имеет только тривиальное решение. Полученное противоречие означает, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы.

Функцию Грина $G(x,s)$ будем строить в виде

$$G(s,x) = \begin{cases} C_1\cdot y_1(x), & 0\le x\le s, \\ C_2\cdot y_2(x), & s\le x\le l. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что такая функция $G(s,x)$ удовлетворяет уравнению $L_x[G]=0$ и однородным краевым условиям (см. пп. 2) и 3) определения функции Грина).

Запишем условие непрерывности функции $G(s,x)$ и скачка производной в точке $x=s$ (см. пп. 1) и 4) определения):

$$\begin{gathered} C_2 y_2(s) - C_1 y_1(s) = 0, \\ C_2 y_2'(s) - C_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}, \end{gathered} \tag{8}$$

и найдем C_1 и C_2. Определитель системы (8) есть определитель Вронского системы функций $\{\, y_1(s)\,,\; y_2(s)\,\}$, следовательно

$$W(s)=\det\begin{vmatrix} y_2(s) & y_1(s) \\ y_2'(s) & y_1'(s)\end{vmatrix}\neq 0\ .$$

в силу доказанной ранее их линейной независимости. Поэтому система (8) имеет единственное решение

$$C_1(s)=\frac{y_2(s)}{p(s)\cdot W(s)},\qquad C_2(s)=\frac{y_1(s)}{p(s)\cdot W(s)},$$

подставляя которое в (7), получим

$$G(s,x) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)\cdot W(s)}, & 0\le x\le s,\\[2ex] \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{p(s)\cdot W(s)}, & s\le x\le l. \end{cases} \tag{9}$$

Замечание. Далее будет доказано, что функция Грина линейной краевой задачи единственна.

<u>**Теорема 4**</u>. *Пусть* однородная краевая задача (6) имеет только тривиальное решение.

Тогда решение неоднородной краевой задачи (5) существует, единственно при любой непрерывной функции $f(x)$ и представимо в виде

$$y(x)=\int_0^l G(x,s)f(s)ds\,, \tag{10}$$

где $G(s,x)$ – функция Грина.

<u>*Доказательство*</u> существования решения проведем непосредственной подстановкой формулы (10) в задачу (5). Введем обозначения

$$G(s,x) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{p(s)\cdot W(s)}\equiv G_1(x,s), & 0\le x\le s\le l\\[2ex] \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{p(s)\cdot W(s)}\equiv G_2(x,s), & 0\le s\le x\le l \end{cases}. \tag{11}$$

Тогда условие скачка производной функции Грина в точке $x=s$ примет вид

$$\left.\frac{dG(x,s)}{dx}\right|_{x=s-0}^{x=s+0}=G_{2x}(x,x)-G_{1x}(x,x)=\frac{1}{p(x)}.$$

Из (10), используя введенные обозначения (11), получим:

$$y'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x G_2(x,s)f(s)ds+\int_x^l G_1(x,s)f(s)ds\right]=$$

$$=\int_0^x G_{2x}(x,s)f(s)ds+\underbrace{\left[G_2(x,x)-G_1(x,x)\right]}_{=0\ \textit{по определению функции Грина}}\cdot f(x)+$$

$$+\int_x^l G_{1x}(x,s)f(s)ds;\quad(12)$$

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x G_{2x}(x,s)f(s)ds+\int_x^l G_{1x}(x,s)f(s)ds\right]=$$

$$=\int_0^x G_{1xx}(x,s)f(s)ds+\underbrace{\left[G_{2x}(x,x)-G_{1x}(x,x)\right]}_{=\frac{1}{p(x)}\ \textit{из (11) из определению ф. Грина}}\cdot f(x)+$$

$$+\int_x^l G_{1xx}(x,s)f(s)ds\ .$$

Подставляя (10), (12)–(13) в уравнение (5), получим(13)

$$L[y]=p(x)y''+p'(x)y'-q(x)y=$$

$$=\int_0^x \underbrace{L_x[G_2]}_{=0}\cdot f(s)ds+\int_x^l \underbrace{L_x[G_1]}_{=0}\cdot f(s)ds+f(x)=f(x),$$

что и доказывает существование решения.

Единственность следует из линейности задачи, так как разность любых двух решений неоднородной краевой задачи (5) удовлетворяет однородной задаче (6), т.е. тождественно равна нулю в силу условия теоремы. ■

Замечание. Очевидно, что $G(x,s)=G(s,x)$.

Теорема 5. *Пусть* однородная краевая задача (6) имеет только тривиальное решение.

Тогда функция Грина определена единственным образом.

Доказательство. Пусть существуют две различные функции Грина $G(x,s)\not\equiv\tilde{G}(s,x)$. Для произвольной непрерывной функции $f(x)$ построим два решения неоднородной краевой задачи (5) с помощью формулы (10): $y(x)=\int\limits_0^l G(x,s)f(x)ds$ и $\tilde{y}(x)=\int\limits_0^l \tilde{G}(x,s)f(x)ds$. Их разность есть решение однородной краевой задачи (6), т.е. по условию теоремы

$$y(x)-\tilde{y}(x)=\int\limits_0^l \left[G(x,s)-\tilde{G}(x,s)\right]f(s)ds\equiv 0,$$

откуда в силу произвольности выбора $f(x)$ вытекает, что $G(x,s)-\tilde{G}(x,s)\equiv 0$. ■

Замечание (физический смысл функции Грина). Рассмотрим краевую задачу

$$L[y]=\delta(x-x_0),\quad x,x_0\in(0,l),$$
$$y(0)=0,\quad y(l)=0,$$

т.е. уравнение с внешним источником, сосредоточенным в точке $x_0\in(0;l)$. Решение методом функции Грина дает

$$y(x)=\int\limits_0^l G(x,s)\delta(s-x_0)ds=G(x,x_0),$$

т.е. $G(x,x_0)$ – это значение решения $y(x)$ в точке $x\in(0;l)$, если в точке x_0 расположен источник $f(x)=\delta(x-x_0)$.

Теорема 6. *Пусть* однородная краевая задача (6) имеет нетривиальное решение $y=\psi(x)$.

Тогда необходимым условием разрешимости неоднородной задачи (5) является ортогональность правой части уравнения (5) и решения однородной задачи (6) $y=\psi(x)$, т.е.

$$\left(f(x),\psi(x)\right)=\int\limits_0^l f(x)\cdot\psi(x)\,dx=0.$$

Доказательство. Умножим правую и левую части уравнения (5) на $\psi(x)$, проинтегрируем по отрезку $[0;l]$ и воспользуемся отмеченным выше фактом самосопряженности оператора L. Получим

$$\left(f(x),\psi(x)\right) \equiv \int\limits_0^l f(x)\cdot\psi(x)\,dx = \int\limits_0^l L\left[y\right]\cdot\psi(x)\,dx \equiv$$

$$\equiv \left(L[y],\psi\right) = \left(y, L[\psi]\right) = 0,$$

так как $\psi\left(x\right)$ – решение однородного уравнения, т.е. $L\left[\psi\right]=0$. ■

Замечание. Можно показать (см., например, [1]), что условие ортогональности $\left(f(x),\psi(x)\right)=0$ является также и достаточным для разрешимости задачи (5).

Пример (статическая задача о профиле струны). Рассмотрим следующую задачу:

$$y'' = f\left(x\right), \qquad 0 < x < 1, \qquad f(x) \in C[0,1],$$
$$y\left(0\right)=0, \quad y\left(l\right)=0,$$

т.е. в принятых выше обозначениях $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$, а $L[y]\equiv y''$.

Решение. Рассмотрим однородную задачу и покажем, что она имеет только тривиальное решение:

$$\begin{cases} y''=0 & \longrightarrow \quad y = C_1 x + C_2, \\ y\left(0\right)=0 & \longrightarrow \quad C_2 = 0 \\ y\left(l\right)=0 & \longrightarrow \quad C_1\cdot l + C_2 = 0 \;\to\; C_1 = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y\left(x\right)\equiv 0.$$

Следовательно, исходная задача имеет единственное решение.

Построим функцию Грина. Выберем два решения, каждое из которых удовлетворяет одному из граничных условий:

$$y_1(x): \qquad \begin{cases} y''_1(x)=0, \\ y_1(0)=0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y_1(x)=x,$$

$$y_2(x): \qquad \begin{cases} y''_2(x)=0, \\ y_2(1)=0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y_2(x)=x-1.$$

Далее, воспользуемся формулой (9) и получим

$$G(x,s) = \frac{1}{p\left(s\right)W\left(s\right)}\cdot\begin{cases} x\left(s-1\right), & 0\le x\le s, \\ \left(x-1\right)s, & s\le x\le 1, \end{cases}$$

где $W\left(s\right)=\det\begin{vmatrix} s & s-1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$ $\qquad p\left(x\right)=1$. $\qquad$ Следовательно,

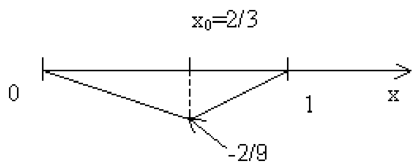
$$G(x,s)=\begin{cases} x(s-1), & 0\le x\le s \\ (x-1)s, & s\le x\le 1 \end{cases}.$$

Теперь решение задачи запишем в виде $y(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)f(s)ds$. Физический смысл полученного решения – профиль струны при статической нагрузке $f(x)$.

В частности, если нагрузка сосредоточена, например, в точке $x_0=2/3$, то интеграл вычисляется. Точный ответ и соответствующий профиль струны приведены ниже:

$$\begin{cases} y''(x)=\delta\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\equiv f(x), \\ y(0)=0, \quad y(1)=0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)f(s)ds=G\left(x,\frac{2}{3}\right)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x, & 0\le x\le\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{2}{3}(x-1), & \dfrac{2}{3}\le x\le 1. \end{cases}$$



Замечание. Иногда для построения функции Грина бывает удобнее использовать не готовую формулу (9) ввиду ее трудной для запоминания структуры, а действовать, непосредственно следуя алгоритму, изложенному при доказательстве Теоремы 3.

Рассмотрим еще раз приведенный выше пример. Используя полученные функции $y_1(x)=x$ и $y_2(x)=x-1$, ищем функцию Грина в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1\cdot y_1(x)=C_1\cdot x, & 0\le x\le s, \\ C_2\cdot y_2(x)=C_2\cdot(x-1), & s\le x\le 1. \end{cases}$$

Из условий непрерывности функции Грина и скачка ее производной в точке $x=s$ получаем

$$\begin{cases} C_1 \cdot s - C_2 \cdot (s-1) = 0 \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = s-1 \\ C_2 = s \end{cases}.$$

Следовательно,

$$G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \le x \le s, \\ (x-1)s, & s \le x \le 1, \end{cases}$$

что совпадает с результатом, полученным в рассмотренном выше примере.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Решите краевую задачу $y'' = 1, x \in (0,1); \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$.
2. Сформулируйте условия разрешимости краевой задачи $y'' = f(x) \quad x \in (0,1); \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$.
3. Решите краевую задачу $y'' = 1, x \in (0,1); \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$. Объясните результат.
4. Решите краевую задачу $y'' = 0, x \in (0,1); \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$. Объясните результат.
5. Сформулируйте определение и условия существования функции Грина линейной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка.
6. Опишите алгоритм построения функции Грина линейной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка.
7. Проверьте выполнение условий существования и найдите функцию Грина краевой задачи
$$y'' = f(x) \quad x \in (0,1); \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0 .$$
Запишите решение этой задачи через функцию Грина.
8. Проверьте выполнение условий существования и найдите функцию Грина краевой задачи
$$y'' = f(x) \quad x \in (0,1); \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 .$$
Запишите решение этой задачи через функцию Грина.
9. Проверьте выполнение условий существования и найдите функцию Грина краевой задачи
$$y'' = f(x) \quad x \in (0,1); \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 .$$
Запишите решение этой задачи через функцию Грина.

Лекция 12

§ 2. Нелинейные краевые задачи

1^0. Постановка задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u,x), \qquad x \in (0;1) \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \quad u(1) = u^1 . \tag{2}$$

Если функция $f(u,x)$ не линейна по переменной u, то решить задачу аналитически весьма сложно или вовсе невозможно. Поэтому основные методы решения таких задач – численные. В основном они основаны на конечно-разностных методах, и среди них можно выделить следующие.

1) Разностные методы – производные заменяются конечными разностями, задача линеаризуется, для ее решения применяется метод прогонки, а затем применяются методы последовательных приближений.

2) Метод стрельбы – задается $u'(0) = \gamma$ и решается начальная задача для $u(x,\gamma)$. Параметр γ подбирается так, чтобы $u(1,\gamma) = u^1$.

При этом необходимо установить разрешимость задачи (1)-(2), а при использовании метода стрельбы важно выделить классы нелинейностей, когда задача (1)-(2) разрешима указанным методом.

В последние годы важную роль в исследовании различных классов нелинейных задач приобрели методы качественной теории дифференциальных уравнений, в основе которых лежат так называемые теоремы сравнения. Этот подход носит также название метод дифференциальных неравенств. Этот метод развивает и распространяет идеи С.А. Чаплыгина для начальных задач на более сложные классы задач, в том числе краевые. Основной целью настоящего раздела курса ДУ является знакомство с этими эффективными подходами.

В качестве вспомогательного результата нам понадобится теорема, доказательство которой основано на методе стрельбы и приводится в следующем разделе.

2^0. Существование решения в случае ограниченной правой части (метод стрельбы)

Первый достаточно простой результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $f(u,x)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица при $x \in [0,1]$, $u \in R$. *Тогда* задача (1) имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{aligned} &u'' = f\left(u,x\right), \quad x \in (0,1], \\ &u(0) = u^0, u'(0) = \gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Докажем, что можно выбрать параметр γ так, что $u(1,\gamma) = u^1$ и, следовательно, решение задачи (3) будет являться решением задачи (1)-(2) (*метод стрельбы*).

Лемма 1. Задача Коши (3) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от параметра γ.

Результат Леммы 1 является следствием известных теорем существования и единственности, а также теорем о непрерывной зависимости от параметров решения уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $u(x,\gamma)$ – решение задачи Коши (3). Тогда, интегрируя дважды полученное тождество, будем иметь

$$u(x,\gamma) = u^0 + \gamma x + \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(u,s)ds\,,$$

откуда найдем

$$u(1,\gamma) = u^0 + \gamma + \int_0^1 d\xi \int_0^\xi f(u,s)ds\,.$$

В силу условий Теоремы 1 существует постоянная $M > 0$ такая, что $M \ge |f(u,x)|$ при $x \in [0;1]$, $u \in R$. Выберем теперь $\gamma = \gamma_0 > 0$, тогда

$$u(1,\gamma_0) \ge u^0 + \gamma_0 - M > u^1,$$

если $\gamma_0 > 0$ достаточно велико. Аналогичным образом получаем, что

$$u(1,-\gamma_0) \le u^0 - \gamma_0 + M < u^1$$

при достаточно большом γ_0 (выбираем γ_0 так, чтобы выполнялись оба неравенства).

Так как функция $u(1,\gamma)$ непрерывна, то существует такое $\gamma \in (-\gamma_0;\gamma_0)$, что $u(1,\gamma) = u^1$. При этом значении γ решение задачи (3) является решением задачи (1)-(2). Таким образом, Теорема 1 доказана.

Замечание. Класс функций f в Теореме 1 достаточно узкий: в него не попадает даже функция $f = u$. Поэтому область применимости изложенного метода весьма ограничена. Поэтому далее рассмотрим конструктивный подход, основанный на методе дифференциальных неравенств, предложенный японским математиком Нагумо (Nagumo) и являющийся развитием идей С.А. Чаплыгина.

3^0. Теорема Нагумо

Определение. Функции $\alpha(x)$, $\beta(x) \in C^2(D) \bigcap C(\bar{D})$ называются соответственно ***нижним*** и ***верхним решениями*** задачи (1) – (2), если выполняются следующие неравенства:

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - f(\alpha(x),x) \ge 0, \quad \frac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta(x),x) \le 0, \qquad x \in D,$$
$$\alpha(0) \le u^0 \le \beta(0), \qquad \alpha(1) \le u^1 \le \beta(1).$$

Теорема 2 (*Нагумо*). *Пусть* существуют $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – нижнее и верхнее решение задачи (1), причем $\alpha(x) \le \beta(x)$, $x \in [0,1]$, а функция $f(u,x)$ – непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной u при $u \in [\alpha,\beta]$, $x \in [0,1]$.

Тогда существует решение задачи (1) $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(x) \le u(x) \le \beta(x), \; x \in [0,1].$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированную задачу (1)–(2):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = h(u,x), \; x \in (0,1) \tag{1*}$$

$$u(0) = u^0, \quad u(1) = u^1, \tag{2}$$

где

$$h(u,x) = \begin{cases} f(\beta,x) + (u-\beta)/(1+u^2), & u > \beta, \\ f(u,x), \alpha \le u \le \beta, \\ f(\alpha,x) + (u-\alpha)/(1+u^2), & u < \alpha \; . \end{cases}$$

Лемма 2. Задача (1*)–(2) имеет решение.

Доказательство. Проверим, что $h(u,x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, т.е. $h(u,x)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица при $x \in [0,1]$, $u \in R$.

Ее непрерывность очевидна, а ограниченность немедленно следует из непрерывности и существования предела при $u \to \pm\infty$.

Проверим выполнение условия Липшица в полосе $x \in [0,1]$, $u \in R$. Легко заметить, что производная функции $h(u,x)$ по переменной u при $u \ge \beta, \quad 0 \le x \le 1$

$$h_u(u,x) = (1 - u^2 - 2u\beta)/(1+u^2)^2$$

ограничена. Тогда, как известно, функции $h(u,x)$ удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$\left|h(u_1,x) - h(u_2,x)\right| \le L_1 \left|u_1 - u_2\right|,$$

где в качестве постоянной Липшица L_1 можно взять $L_1 = \sup\left|h_u(u,x)\right|, u \ge \beta, 0 \le x \le 1$.

Аналогично можно показать, что функция $h(u,x)$ удовлетворяет условию Липшица в области $u \le \alpha, \quad 0 \le x \le 1$.

Пусть при $\alpha(x) \le u \le \beta(x)$ функция $h(u,x) \equiv f(u,x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L_0. Покажем, что она удовлетворяет условию Липшица в полосе $x \in [0,1]$, $u \in R$. Рассмотрим лишь случай $u_2 > \beta$, $\alpha \le u_1 \le \beta$. Положим $u_0 = \beta$, тогда

$$
\begin{aligned}
\left|h(u_1,x) - h(u_2,x)\right| = \left|h(u_1,x) - h(u_0,x) + h(u_0,x) - h(u_2,x)\right| \le \\
\left|h(u_1,x) - h(u_0,x)\right| + \left|h(u_0,x) - h(u_2,x)\right| \le \\
\le L_0\left|u_1 - u_0\right| + L_1\left|u_0 - u_2\right| \le L \cdot \left|u_1 - u_2\right|,
\end{aligned}
$$

где $L = \max(L_0, L_1)$.

Таким образом, все условия Теоремы 1 выполнены и, следовательно, задача (1*)–(2) имеет решение $u = u(x)$. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что это решение удовлетворяет неравенствам $\alpha \le u \le \beta$. Предположим, что нарушается первое неравенство, т.е. существует точка $x^* \in (0,1)$ такая, что $\alpha(x^*) - u(x^*) > 0$. Тогда существует точка $x^0 \in (0,1)$, в которой разность $\alpha(x) - u(x)$ достигает положительного максимума и, следовательно,

$$
(\alpha(x) - u(x))''\Big|_{x=x_0} \le 0 . \tag{4}
$$

В этой точке $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$
-u''(x_0) = -f(\alpha(x_0), x_0) + (\alpha(x_0) - u(x_0)) / (1 + u^2(x_0)) ,
$$

а $\alpha(x)$ – дифференциальному неравенству

$$
\alpha''(x_0) \ge f(\alpha(x_0), x_0) .
$$

Складывая два последних соотношения, получим

$$
(\alpha(x) - u(x))''\Big|_{x=x_0} \ge (\alpha(x_0) - u(x_0)) / (1 + u^2(x_0)) > 0 ,
$$

что противоречит (4), а значит $\alpha(x) \le u(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Аналогично показывается что $\beta(x) \ge u(x)$ при $x \in [0,1]$.

Заметим, что если $\alpha(x) \le u \le \beta(x)$, то имеет место $h(u,x) \equiv f(u,x)$, следовательно, решение модифицированной задачи (1*)–(2) является также решением задачи (1)–(2). Это завершает доказательство теоремы.

4^0. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу (1)–(2) с кубической нелинейностью

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u\big(u - \varphi_1(x)\big)\big(u - \varphi_2(x)\big), \qquad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u^0,\ u(1) = u^1; \qquad u^0, u^1 > 0,$$

предполагая, что $\varphi_1(x) < 0$, $\varphi_2(x) > 0$ – непрерывные при $x \in [0,1]$ функции.

Докажем существование решения. Очевидно, что $\alpha(x) \equiv 0$ – нижнее решение. Пусть $\bar{\varphi}_2 = \max\limits_{[0,1]} \varphi_2(x)$. Тогда в качестве верхнего решения можно взять любую постоянную $C = \beta(x) \geq \max[\bar{\varphi}_2, u^0, u^1]$. Действительно, в этом случае $f(C,x) \geq 0$ (см. рисунок) и, следовательно, $\dfrac{d^2\beta}{dx^2} - f(\beta, x) \leq 0$.

Тогда по теореме Нагумо существует решение краевой задачи $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq u(x) \leq \beta(x) = \max[\bar{\varphi}_2, u^0, u^1].$$

В качестве нижнего решения можно выбрать также $\alpha(x) = \delta > 0$, где $\delta \leq \min(\min\limits_{[0,1]} \varphi_2(x), u^0, u^1)$, оставив верхнее решение прежним. Таким образом, можно показать существование положительного решения $u(x)$, удовлетворяющего неравенствам $\delta \leq u(x) \leq \beta(x)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу (1)–(2) со степенной нелинейностью

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u^p, \qquad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u^0,\ u(1) = u^1; \quad u^0, u^1 > 0,$$

где $p > 1$.

В этом случае $\alpha(x) \equiv 0$ – нижнее решение. В качестве верхнего решения можно взять любую постоянную $C = \beta(x) \geq \max[u^0, u^1]$. Тогда из теоремы Нагумо следует существование неотрицательного решения краевой задачи $u(x)$, удовлетворяющего неравенствам

$$0 \leq u(x) \leq \beta(x) = \max[u^0, u^1].$$

Глава 6. **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Лекция 13

§ 1. Постановка задачи. Основные понятия

Ранее было показано, что решение задачи Коши для нормальной системы ОДУ

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(t, \vec{x}\right) \tag{1}$$

непрерывно зависит от начальных условий при $t \in \left[a, b\right]$, если правая часть $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ удовлетворяет условиям теорем существования и единственности. В этой главе мы исследуем зависимость решения задачи Коши от начальных условий, когда $t \in \left[t_0, +\infty\right)$.

Далее будем использовать следующее определение нормы вектор-функции $\vec{y} = \left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$: $\quad \left|\vec{y}\right| \equiv \left|\vec{y}\right|_{R^m} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (y^i)^2}$.

Предположим, что для системы уравнений (1) выполнены условия теорем существования и единственности на множестве таких точек $\left(t, \vec{x}\right)$, что $t \in \left(\alpha, +\infty\right)$, $\quad \vec{x} \in D$, где D — открытое множество в пространстве переменного $\vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t\right)$ – решение системы уравнений (1), определенное при $t \geq t_0$.

<u>Определение</u>. Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t\right)$ системы (1) называется ***устойчивым по Ляпунову***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $\vec{x}_0$: $\left|\vec{\varphi}\left(t_0\right) - \vec{x}_0\right| < \delta$ решение $\vec{x} = \vec{\psi}\left(t\right)$ системы (1) с начальным условием $\vec{\psi}\left(t_0\right) = \vec{x}_0$ определено при $t \geq t_0$ и $\left|\vec{\psi}\left(t\right) - \vec{\varphi}\left(t\right)\right| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Если, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\vec{\psi}(t)-\vec{\varphi}(t)\right|=0$, то решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ называется ***асимптотически устойчивым***.

Исследование устойчивости решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ системы уравнений (1) может быть сведено к исследованию устойчивости тривиального решения, т.е. некоторого положения равновесия другой нормальной системы. В самом деле, введем новую неизвестную функцию

$$\vec{y}(t)=\vec{x}(t)-\vec{\varphi}(t), \tag{2}$$

которая удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\dot{\vec{y}}=\vec{f}\left(t,\vec{y}+\vec{\varphi}\right)-\vec{f}\left(t,\vec{\varphi}\right)=\vec{f}_1\left(t,\vec{y}\right), \tag{3}$$

где $\vec{f}_1\left(t,\vec{0}\right)=\vec{0}$. При этом устойчивость (по Ляпунову или асимптотическая) решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ равносильна устойчивости решения $\vec{y}=\vec{0}$ системы уравнений (3).

В дальнейшем будем считать, что замена (2) уже сделана. Тогда система уравнений (1) имеет решение $\vec{x}\equiv\vec{0}$, т.е. $\vec{f}\left(t,\vec{0}\right)=\vec{0}$.

§ 2. Однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчивость тривиального решения

Рассмотрим однородную систему из n линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}, \tag{1}$$

где A – постоянная действительная матрица. Пусть $\lambda_k=\mu_k+i\nu_k$, $k=1,2,\ldots,m,\quad m\le n$ – собственные значения матрицы A.

Лемма 1. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_k=\mu_k<0,\quad k=1,2,\ldots,m$, тогда существуют постоянные $\alpha>0,\ R>0$ такие, что при всех $t\ge 0$ для решения системы (1) $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ справедлива оценка

$$\left|\vec{\varphi}(t)\right|\le Re^{-\alpha t},$$

где норма вектор-функции $\left|\vec{\varphi}\right| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\varphi^{i}\right)^{2}}$.

<u>*Доказательство*</u>. Как было показано ранее, любое решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(x)$ системы уравнений (1) имеет вид

$$\vec{\varphi}\left(t\right) = \sum_{k=1}^{m}\vec{g}_{k}\left(t\right)e^{\lambda_{k}t} , \tag{2}$$

где $\vec{g}_{k}\left(t\right)$ – вектор-функция, каждая координата которой есть некоторый многочлен.

По условию леммы $\operatorname{Re}\lambda_{k} = \mu_{k} < 0, \quad k = 1, 2, ..., m$. Поэтому существует константа $\alpha > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re}\lambda_{k} = \mu_{k} < -\alpha < 0, \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{3}$$

Из (2) следует, что $\left|\vec{\varphi}\left(t\right)\right| \le \sum\limits_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|\left|e^{\left(\mu_{k}+i\nu_{k}\right)t}\right| \le \sum\limits_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|e^{\mu_{k}t}$.

Умножив это неравенство на $e^{\alpha t}$, получим

$$\left|\vec{\varphi}\left(t\right)\right|e^{\alpha t} \le \sum_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|\left|e^{\left(\mu_{k}+i\nu_{k}\right)t}\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|e^{\overbrace{\left(\mu_{k}+\alpha\right)t}^{<0\,(3)}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|e^{\overbrace{\left(\mu_{k}+\alpha\right)t}^{<0}} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \exists\, R > 0 : \sum_{k=1}^{m}\left|\vec{g}_{k}\left(t\right)\right|e^{\left(\mu_{k}+\alpha\right)t} \le R, \quad t \ge 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\vec{\varphi}\left(t\right)\right|e^{\alpha t} \le R \Rightarrow \left|\vec{\varphi}\left(t\right)\right| \le Re^{-\alpha t}.$$

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_{k} = \mu_{k} < 0, \quad k = 1, 2, ..., m$, тогда для любого решения системы (1) $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t, \vec{x}_{0}\right)$, удовлетворяющего начальному условию $\vec{\varphi}\left(0, \vec{x}_{0}\right) = \vec{x}_{0}$, выполнена равномерная на промежутке $t \ge 0$ оценка

$$\left|\vec{\varphi}\left(t, \vec{x}_{0}\right)\right| \le r\left|\vec{x}_{0}\right|e^{-\alpha t}, \quad t \ge 0,$$

где $\alpha > 0, \quad r > 0$ - некоторые постоянные.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}_j(t)$ – решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}_j(0) = \vec{e}_j = \left\{\delta_j^1, \delta_j^2, \ldots, \delta_j^n\right\}$ – единичный координатный вектор. Тогда, по теореме единственности

$$\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \vec{\varphi}_j(t)\, x_0^j, \quad \vec{x}_0 = \left\{x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right\},$$

так как в правой части последнего равенства записано решение системы уравнений (1), удовлетворяющее при $t = 0$ тому же начальному условию, что и $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$.

В силу Леммы 1 существуют постоянные $\alpha, R_j > 0$ такие, что при всех $t \ge 0$ верно

$$\left|\vec{\varphi}_j(t)\right| \le R_j e^{-\alpha t}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Положим $R = \max\left\{R_1, \ldots, R_n\right\}$, тогда

$$\left|\vec{\varphi}_j(t)\right| \le R e^{-\alpha t}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, при всех $t \ge 0$

$$\left|\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\right| \le \sum_{k=1}^{m} \left|\vec{\varphi}_j(t)\right| \cdot \left|x_0^j\right| \le \sum_{k=1}^{m} R e^{-\alpha t} \left|\vec{x}_0\right| = \underbrace{nR}_{r}\, e^{-\alpha t} \left|\vec{x}_0\right| = r e^{-\alpha t} \left|\vec{x}_0\right|.$$

Установим теперь необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы уравнений (1).

<u>**Теорема 1**</u>. Для того чтобы положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы уравнений (1) было *асимптотически устойчивым*, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A имели отрицательные действительные части.

<u>*Доказательство*</u>.

<u>Достаточность</u>. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, а $\vec{x} = \vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ – решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\psi}(0) = \vec{x}_0$. В силу Леммы 2 справедлива равномерная при $t \ge 0$ оценка

$$\left|\vec{\psi}(t)\right| \equiv \left|\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\right| \le r \left|\vec{x}_0\right| e^{-\alpha t},$$

где $\alpha > 0, \ \ r > 0$ – некоторые постоянные.

Пусть $\delta = \varepsilon / r$, тогда если $\left|\vec{x}_0\right| < \delta$, то $\left|\vec{\psi}\left(t\right)\right| < r\dfrac{\varepsilon}{r}e^{-\alpha t} \le \varepsilon$ при всех $t \ge 0$, т.е. положение равновесия *устойчиво по Ляпунову*.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\vec{\psi}\left(t\right)\right| = 0$, следовательно, положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ *асимптотически устойчиво*. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть существует k такое, что $\operatorname{Re}\lambda_k = \mu_k \ge 0$, тогда положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ не может быть устойчивым по Ляпунову.

В самом деле, положим $\operatorname{Re}\lambda_1 = \mu_1 \ge 0$ и рассмотрим $\vec{h} \ne \vec{0}$ – собственный вектор матрицы A, т.е. $A\vec{h} = \lambda_1\vec{h}$. Тогда $\vec{x} = \operatorname{Re}\left(\vec{h}e^{\lambda_1 t}\right)$ – решение системы уравнений (1). Пусть $\vec{h} = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2$, тогда

$$\vec{x} = \operatorname{Re}\left(\left(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2\right)e^{\left(\mu_1 + i\nu_1\right)t}\right) = e^{\mu_1 t}\left(\vec{h}_1\cos\nu_1 t - \vec{h}_2\sin\nu_1 t\right) \underset{t\to+\infty}{\not\to} \vec{0}.$$

Этим же свойством, очевидно, обладает любое решение $\vec{x} = c\operatorname{Re}(\vec{h}e^{\lambda_1 t})$, которое при достаточно малом c сколь угодно близко в момент $t = 0$ к положению равновесия $\vec{x} = \vec{0}$, но при $t \to +\infty$ не стремится к нулю. Следовательно, положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ не является асимптотически устойчивым. Необходимость доказана. ■

Замечание. Для устойчивости по Ляпунову положения равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы уравнений (1) необходимо (но не достаточно!), чтобы все собственные значения матрицы A имели неположительные действительные части.

§ 3. Второй метод Ляпунова. Лемма Ляпунова

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(t, \vec{x}\right). \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\vec{x}=\vec{0}$ – решение этой системы. Такое предположение, как было показано в § 1, не нарушает общности. Из него, в частности, следует, что $\vec{f}\left(t,\vec{0}\right)=\vec{0}$.

Лемма Ляпунова. Пусть правая часть системы уравнений (1) определена на множестве D: $|\vec{x}|\le r,\quad t\ge t_0$. Предположим, что выполнены условия теорем существования и единственности и, кроме того, при $|\vec{x}|\le r$ определена неотрицательная функция $V(\vec{x})\ge 0,\quad V(\vec{x})\in C^1\left(|\vec{x}|\le r\right)$, обращающаяся в нуль только при $\vec{x}=\vec{0}$, причем на множестве D

$$\left(\operatorname{grad} V,\vec{f}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^i}f^i\le 0\,.$$

Тогда решение $\vec{x}=\vec{0}$ системы уравнений (1) устойчиво по Ляпунову.

Если, кроме того, на множестве D

$$\left(\operatorname{grad} V,\vec{f}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^i}f^i\le -W(\vec{x}),$$

где $W(\vec{x})\ge 0$ – некоторая непрерывная функция, обращающаяся в нуль только при $\vec{x}=\vec{0}$, то решение $\vec{x}=\vec{0}$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon\in(0;r)$ и обозначим S_ε поверхность шара $|\vec{x}|\le\varepsilon$. Пусть

$$V_\varepsilon=\min_{\vec{x}\in S_\varepsilon}V(\vec{x})\,. \tag{2}$$

Выберем $\delta>0$ таким образом, чтобы при $|\vec{x}|\le\delta$ выполнялось неравенство

$$V(\vec{x})\le V_\varepsilon\,. \tag{3}$$

Такое δ существует, поскольку функция $V(\vec{x})$ непрерывна при $|\vec{x}|\le\varepsilon$ и $V(\vec{0})=0$.

Покажем, что всякое решение $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$, для которого выполнено $\left|\vec{\varphi}(t_0)\right|<\delta$, определено при всех $t\ge t_0$ и удовлетворяет неравенству $\left|\vec{\varphi}(t)\right| < \varepsilon$, т. е. решение $\vec{x} = \vec{0}$ будет устойчивым по Ляпунову.

В самом деле, пусть непродолжаемое решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ определено на интервале (m_1,m_2), где $m_2 < +\infty$. Тогда по свойству непродолжаемых решений это возможно лишь, если траектория $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ пересекает поверхность S_ε (в противном случае при всех $t_0 \le t < m_2$ выполняется неравенство $\left|\vec{\varphi}(t)\right| < \varepsilon$ и график решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ не может выйти за пределы замкнутого ограниченного множества $\left|\vec{x}\right| \le \varepsilon, t_0 \le t < m_2$). Таким образом, траектория $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ пересекает поверхность S_ε.

Обозначим t_1 $(t_1 > t_0)$ – наименьшее значение параметра t, при котором траектория впервые достигает поверхности S_ε. Рассмотрим сложную функцию $V\left(\vec{\varphi}(t)\right)$. В силу условий леммы

$$\frac{d}{dt}V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{\varphi})\dot{\varphi}^i(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{\varphi})f^i(t,\vec{\varphi}) \le 0,$$

т. е. функция $V\left(\vec{\varphi}(t)\right)$ не возрастает. Но тогда в силу (2) и (3)

$$V_\varepsilon > V\left(\vec{\varphi}(t)\right) \ge V\left(\vec{\varphi}(t_1)\right) \ge V_\varepsilon,$$

что невозможно. Следовательно, решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ определено при всех $t \ge t_0$, и его траектория не может достигать поверхности S_ε, т.е. при всех верно неравенство $\left|\vec{\varphi}(t)\right| < \varepsilon$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так же, как это делалось выше. Тогда для любой траектории $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, для которой $\left|\vec{\varphi}(t_0)\right| < \delta$, имеет место неравенство $\left|\vec{\varphi}(t)\right| < \varepsilon$.

Рассмотрим снова функцию $V\left(\vec{\varphi}(t)\right)$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to+\infty} V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = 0$. В самом деле, допустив противное, мы придем к заключению, что у невозрастающей неотрицательной функции $V\left(\vec{\varphi}(t)\right)$ существует положительный предел

$$\lim_{t\to+\infty} V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = A > 0\,. \tag{4}$$

Заметим, что тогда $V\left(\vec{\varphi}(t)\right) \geq A, \quad t \geq t_0$, а значит, существует постоянная $\sigma > 0$ такая, что $\left|\vec{\varphi}(t)\right| > \sigma, \quad t \geq t_0$. Действительно, если это не так, найдется последовательность $t_k \geq t_0$, для которой $\left|\vec{\varphi}(t_k)\right| \to 0 \quad \Rightarrow \quad V\left(\vec{\varphi}(t_k)\right) \to 0$ поскольку $V(\vec{0}) = 0$, что противоречит (4). Таким образом, для всех $t \geq t_0$ верно $\sigma \leq \left|\vec{\varphi}(t)\right| \leq \varepsilon$.

По условию леммы $W\left(\sigma \leq |\vec{x}| \leq \varepsilon\right) > 0$. Поэтому существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $W\left(\sigma \leq |\vec{x}| \leq \varepsilon\right) \geq \alpha$ и

$$\frac{d}{dt} V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{\varphi})\dot{\varphi}^i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{\varphi}) f^i(t,\vec{\varphi}) \leq -W(\vec{\varphi}) \leq -\alpha\,. \tag{5}$$

Интегрируя неравенство (5) в пределах от t_0 до t, получим

$$V\left(\vec{\varphi}(t)\right) - V\left(\vec{\varphi}(t_0)\right) \leq -\alpha(t - t_0) \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = -\infty\,,$$

что противоречит $V(\vec{x}) \geq 0$. Таким образом,

$$\lim_{t\to+\infty} V\left(\vec{\varphi}(t)\right) = 0\,. \tag{6}$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{\varphi}(t) = \vec{0}$. Предположим противное, т.е. существуют постоянная $\eta > 0$ и последовательность $t_n \to +\infty$, для которых, ввиду $V(\vec{0}) = 0$, верно $\left|\vec{\varphi}(t_n)\right| \geq \eta$.

Функция $V\left(\eta \leq |\vec{x}| \leq \varepsilon\right) > 0$, поэтому найдется постоянная $\beta > 0$, для которой имеет место неравенство $V\left(\sigma \leq |\vec{x}| \leq \varepsilon\right) \geq \beta > 0$, откуда следует $V\left(\vec{\varphi}(t)\right) \geq \beta > 0$, что противоречит (6).

Итак, $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{\varphi}(t) = \vec{0}$, т.е. положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ асимптотически устойчиво. ■

Замечание. Для облегчения последующих вычислений заметим, что каково бы ни было решение $\vec{x} = \vec{x}(t)$ системы уравнений (1), имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x^i}\left(\vec{x}(t)\right)f^i\left(t,\vec{x}(t)\right)=\frac{d}{dt}V\left(\vec{x}(t)\right).$$

Пример. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}=xy^4,\qquad \dot{y}=-x^2y.$$

Положим $V(x,y)=x^2+y^4$, т.е. $V\left(x,y\right)\geq 0$ для всех (x,y) и обращается в нуль только при $x=y=0$. Кроме того,

$$\frac{\partial V}{\partial x}xy^4-\frac{\partial V}{\partial y}x^2y=-2x^2y^4\leq 0.$$

Поэтому, в силу доказанной выше леммы Ляпунова, положение равновесия $x=y=0$ рассматриваемой системы устойчиво по Ляпунову.

§ 4. Исследование на устойчивость по первому приближению (первый метод Ляпунова). Теорема Ляпунова

Пусть $\vec{x}=\vec{0}$ – положение равновесия нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}}=\vec{f}\left(t,\vec{x}\right),\tag{1}$$

правая часть которой удовлетворяет условиям теорем существования и единственности и имеет вид

$$\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)=A\left(t\right)\vec{x}+\vec{F}\left(t,\vec{x}\right),$$

где $A(t)=\left\|a_j^i(t)\right\|$ – квадратная матрица, а $\lim\limits_{|\vec{x}|\to 0}\dfrac{\left|\vec{F}\left(t,\vec{x}\right)\right|}{\left|\vec{x}\right|}=0$.

<u>Определение</u>. Линейная однородная система дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}}=A\left(t\right)\vec{x}$ называется ***первым приближением*** или ***линеаризацией*** исходной системы уравнений (1) в окрестности точки $\vec{x}=\vec{0}$.

Заметим, что согласно предположениям $\vec{F}\left(t,\vec{0}\right)=\vec{0}$, а $a_j^i(t)=\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\left(t,\vec{0}\right)$ – элементы *матрицы Якоби*. Далее рассмотрим частный случай, когда матрица $A(t)=\left\|a_j^i(t)\right\|$ постоянна.

<u>Теорема 2</u> (*Ляпунова*). Пусть имеется нормальная система уравнений

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{F}(t,\vec{x}), \qquad \left(\vec{F}\left(t,\vec{0}\right) = \vec{0}\right), \tag{2}$$

где A – постоянная матрица. *Пусть* также при всех $t \geq t_0$ и достаточно малом $|\vec{x}|$

$$\left|\vec{F}(t,\vec{x})\right| \leq M|\vec{x}|^{1+\alpha}, \quad \alpha, M > 0\,.$$

Тогда положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ системы уравнений (2)

а) <u>асимптотически устойчиво</u> по Ляпунову, если <u>все</u> собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части;

б) <u>неустойчиво</u>, если среди собственных значений матрицы A имеется <u>хотя бы одно с положительной действительной частью</u>.

<u>*Доказательство*</u> этой теоремы в общем случае мы не приводим. Его можно найти, например, в [2]. Далее доказательство будет проведено лишь для скалярного случая.

Замечание. Если все собственные значения матрицы A нулевые или чисто мнимые, либо часть собственных значений имеет отрицательную действительную часть, а остальные – нулевые или чисто мнимые, то сформулированная теорема ответа на вопрос об устойчивости или неустойчивости не дает.

Пример. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений вида (2):

$$\dot{x} = -x - y + \frac{xy}{1+t}, \qquad \dot{y} = 2x - 3y + \frac{y^2}{1+t}\,.$$

При $t \geq 0$ выполнены все условия теоремы Ляпунова, так как матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Поэтому положение равновесия $x = y = 0$ асимптотически устойчиво.

При исследовании устойчивости положения равновесия по первому приближению важно иметь возможность установить тот факт, что <u>все</u> собственные значения действительной матрицы A, т. е. все корни характеристического многочлена имеют отрицательные действительные части. Известна следующая терема.

<u>Теорема 3</u> (*Гурвица*). Для того чтобы все корни многочлена $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные (угловые) миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \left(a_k = 0, \quad k > n\right)$$

были положительными, т. е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} a_n > 0.$$

Последнее условие можно заменить условием $a_n > 0$, т.е. для многочлена второй степени $P_2(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ имеем $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, а для многочлена третьей степени $P_3(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ нужно $a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0$.

§ 5. Применение теорем Чаплыгина в некоторых задачах теории устойчивости

Пусть задано *автономное* уравнение

$$\frac{dx}{dt} = V(x), \tag{3}$$

т.е. уравнение, правая часть которого не содержит t явно. Каждый корень уравнения $V(x) = 0$ является решением уравнения (3). Не ограничивая общности, будем считать, что уравнение (3) имеет *стационарное решение* $x = x_0$, т.е. $V\left(x_0\right) = 0$. Стационарное решение является решением задачи Коши, когда для уравнения (3) задается начальное условие

$$x(0) = x_0. \qquad (4)$$

Естественным является вопрос об *устойчивости* этого решения *по Ляпунову,* т.е. *устойчивости относительно малых возмущений начального условия*, когда вместо условия (4) для уравнения (3) ставится дополнительное условие

$$x(0) = x_\delta. \qquad (5)$$

Определение. ***Стационарное решение*** $x(t) = x_0$ задачи (3)–(4) называется ***устойчивым по Ляпунову***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_\delta - x_0| < \delta$ для всех $t \geq 0$ существует $x(t)$ – решение задачи (3), (5) такое, что $|x(t) - x_0| < \varepsilon$.

Стационарное решение называется ***асимптотически устойчивым***, если оно устойчиво и удовлетворяет дополнительному требованию $x(t) \to x_0$ при $t \to \infty$.

Решение, не являющееся устойчивым, называется ***неустойчивым***. Определение неустойчивости решения может быть дано как отрицание приведенного выше определения устойчивости.

Ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости стационарного решения задачи (3)–(4) следует из более общей *теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению*.

Теорема 4. *Пусть* $V(x_0) = 0$ и функция $V(x)$ непрерывна вместе с производной в некоторой окрестности $|x - x_0| \leq \mu$.

Тогда решение задачи (3), (4) $x = x_0$ будет устойчивым, если $V_x(x_0) < 0$, и неустойчивым, если $V_x(x_0) > 0$.

Доказательство.

1. Асимптотическая устойчивость. Пусть $V_x(x_0) < 0$. Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $\delta < \min(\mu, \varepsilon)$. Определим функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с помощью следующих выражений:

$$\alpha(t) = x_0 - \delta e^{-pt}, \beta(t) = x_0 + \delta e^{-pt},$$

где $p>0$ – постоянная. Покажем теперь, что при достаточно малых δ и p функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (3), (5), если $|x_\delta - x_0| < \delta$. Тогда, в силу теоремы Чаплыгина о существовании и единственности (Теорема 4 § 4 гл. 2), решение задачи (3), (5) существует и удовлетворяет неравенствам $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$ при $0 \le t < \infty$, из которых следует, что для $x = x_0$ выполняется определение асимптотической устойчивости.

Проверим выполнение соответствующего дифференциального неравенства для $\beta(t)$. Учитывая, что $V(x_0)=0$, получим:

$$\frac{d\beta}{dt} - V\left(\beta(t)\right) = -\delta p e^{-pt} - V\left(x_0 + \delta e^{-pt}\right) =$$

$$= -\delta p e^{-pt} - V\left(x_0 + \delta e^{-pt}\right) + V(x_0) - V(x_0) =$$

$$= -\delta p e^{-pt} - \left[V\left(x_0 + \delta e^{-pt}\right) - V(x_0)\right] - \underbrace{V(x_0)}_{=0} =$$

$$= -\delta p e^{-pt} - \left[V\left(x_0 + \delta e^{-pt}\right) - V(x_0)\right] =$$

(*по теореме Лагранжа*)

$$= -\delta p e^{-pt} - V_x\left(x_0 + \theta\delta e^{-pt}\right)\delta e^{-pt} =$$

$$= \delta e^{-pt}\left(-p - V_x(x_0) - V_x\left(x_0 + \theta\delta e^{-pt}\right) + V_x(x_0)\right) =$$

$$= \delta e^{-pt}\left(-p - V_x(x_0) - \left[V_x\left(x_0 + \theta\delta e^{-pt}\right) - V_x(x_0)\right]\right),$$

где $0 \le \theta \le 1$.

Выберем δ таким малым, чтобы

$$\left|V_x\left(x_0 + \theta\delta e^{-pt}\right) - V_x(x_0)\right| \le \eta < \frac{-V_x(x_0)}{2},$$

тогда

$$\frac{d\beta}{dt} - V\left(\beta(t)\right) \ge \delta e^{-pt}\left(-p - \frac{V_x(x_0)}{2}\right).$$

Полагая $0 < p < \dfrac{-V_x(x_0)}{2}$ и учитывая, что $V_x(x_0) < 0$, получим $\dfrac{d\beta}{dt} - V\left(\beta(t)\right) > 0$, т.е. $\beta(t)$ – верхнее решение.

Аналогично проверяется неравенство $\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0$ (сделайте это самостоятельно), т.е. $\alpha(t)$ – нижнее решение. Первая часть теоремы 4 доказана.

2. Неустойчивость. Пусть $V_x(x_0) > 0$. Покажем, что $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall\, \delta > 0$ $\exists x_\delta$, $|x_\delta - x_0| < \delta$ такое, что $\exists\, t > 0$, при котором решение задачи (3), (5) $x(t)$ отклонится от стационарного решения больше чем на ε: $|x(t) - x_0| > \varepsilon$. Это будет означать, что стационарное решение задачи (3), (4) является неустойчивым.

Рассмотрим интервал $|x_\delta - x_0| < \delta$ и построим нижнее решение задачи (3), (5) в виде

$$\alpha(t) = x_0 + \rho\left(1 - \sigma e^{-pt}\right),$$

где $0 < \rho < \mu$, $0 < \sigma < 1$, $p > 0$ – постоянные.

Поскольку $\alpha(0) = x_0 + \rho(1 - \sigma)$, то выбирая σ достаточно близким к единице, можно получить $\alpha(0)$ меньше любого x_δ: $|x_\delta - x_0| < \delta$. При $t \to \infty$ $\alpha(t) \to x_0 + \rho$ снизу, и, следовательно, для t больших некоторого t^* выполнено неравенство $\alpha(t) > x_0 + \rho/2$. В силу теоремы сравнения Чаплыгина (Теорема 3 § 4 гл. 2) решение $x(t)$ задачи (3), (5) (если оно существует) отклонится от стационарного решения сильнее чем на величину $\varepsilon = \rho/2$, т.е. $|x(t) - x_0| > |\alpha(t) - x_0| > \rho/2$. Это и означает неустойчивость стационарного решения.

Остается проверить, что $\alpha(t)$ удовлетворяет неравенству из определения нижнего решения. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt} - V\left(\alpha(t)\right) = \rho\sigma p e^{-pt} - V\left(\alpha(t)\right) = \\
&= \rho\sigma p e^{-pt} - V\left(\alpha(t)\right) + V\left(x_0\right) - V\left(x_0\right) = \\
&= \rho\sigma p e^{-pt} - \left[V\left(\alpha(t)\right) - V\left(x_0\right)\right] - V\left(x_0\right) = \\
&= \rho\sigma p e^{-pt} - \left[V\left(\alpha(t)\right) - V\left(x_0\right)\right] =
\end{aligned}$$

(*по теореме Лагранжа*)

$$= \rho\sigma p e^{-pt} - V_x\left(x_0 + \theta\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right)\right)\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right) =$$

$$= -V_x\left(x_0\right)\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right) + \rho\sigma p e^{-pt} +$$

$$+\left[V_x\left(x_0\right) - V_x\left(x_0 + \theta\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right)\right)\right]\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right),$$

где $0 \le \theta \le 1$. Поэтому

$$\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) =$$

$$= -V_x\left(x_0\right)\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right) + \rho\sigma p e^{-pt} +$$

$$+\left[V_x\left(x_0\right) - V_x\left(x_0 + \theta\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right)\right)\right]\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right).$$

Теперь, выбирая ρ достаточно малым, получим

$$\rho\sigma p e^{-pt} + \left[V_x\left(x_0\right) - V_x\left(x_0 + \theta\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right)\right)\right]\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right) <$$

$$< V_x\left(x_0\right)\rho\left(1-\sigma e^{-pt}\right),$$

т.е. $\dfrac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0$. Этим завершается доказательство второй части теоремы 4. ■

Пример. Рассмотрим уравнение (3) в случае, когда $V\left(x\right) = x\left(x^2 - 1\right)$ и исследуем устойчивость его стационарных точек. Получаем три стационарные точки: $x = \pm 1$ и $x = 0$. Производная равна $V_x\left(x\right) = 3x^2 - 1$. В стационарных точках $V_x(\pm 1) = 2 > 0$, $V_x\left(0\right) = -1 < 0$. Следовательно, стационарные точки $x = \pm 1$ – неустойчивые, а стационарная точка $x = 0$ – асимптотически устойчивая.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Решите задачу Коши $\dot{y} = -y + t, \quad y(0) = 1$. Используя определение устойчивости по Ляпунову, исследуйте устойчивость полученного решения.
2. Решите задачу Коши $\dot{y} = y + t, \quad y(0) = 0$. Используя определение устойчивости по Ляпунову, исследуйте устойчивость полученного решения.

3. Найдите точки покоя уравнения $\dot{y} = y^2 - y$ и исследуйте их устойчивость.
4. Найдите точки покоя уравнения $\dot{y} = y - y^3$ и исследуйте их устойчивость.
5. Найдите точки покоя уравнения $\dot{y} = \sin y$ и исследуйте их устойчивость.
6. Решите задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, & x(0) = \ \ 1, \\ \dot{y} = \ \ x, & y(0) = -1. \end{cases}$$

Используя определение устойчивости по Ляпунову, исследуйте устойчивость полученного решения.

7. Исследуйте устойчивость точки покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2, \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

а) по первому приближению;

б) методом функций Ляпунова, выбрав $V(x, y) = x^2 + y^2$.

8. Исследуйте устойчивость точки покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

а) по первому приближению;

б) методом функций Ляпунова, выбрав $V(x, y) = 2\left(1 - \cos x\right) + y^2$.

9. Методом функций Ляпунова исследуйте устойчивость точки покоя $\left(0,0\right)$ динамической системы $\begin{cases} \dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = -x^2 y \end{cases}$, выбрав $V(x, y) = x^2 + y^4$.

10. Исследуйте на устойчивость положение равновесия $O\left(0,0\right)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \dfrac{xy}{1+t}, \\ \dot{y} = 2x - 3y + \dfrac{y^2}{1+t}. \end{cases}$$

Лекция 14

§ 6. Классификация точек покоя линейной системы двух уравнений с постоянными действительными коэффициентами

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{1}$$

Точка покоя этой системы – начало координат $x = y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \equiv \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{Tr}\,A + \det A = 0.$$

При решении последнего уравнения возможны следующие варианты.

1) *Вещественные различные ненулевые собственные значения*. В этом случае в некоторой системе координат общее решение системы (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{где} \quad t = \frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{x}{C_1}\right) \quad \Rightarrow \quad y = C_2\left(\frac{x}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

а) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, тогда

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad y = C_2 e^{\lambda_2 t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad y = C_2\left(\frac{x}{C_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(>0,\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1\right)}.$$

В этом случае точка покоя $x = y = 0$ – ***устойчивый узел*** – асимптотически устойчива.

б) Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, тогда

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad y = C_2 e^{\lambda_2 t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad y = C_2\left(\frac{x}{C_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(>0,\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|>1\right)}.$$

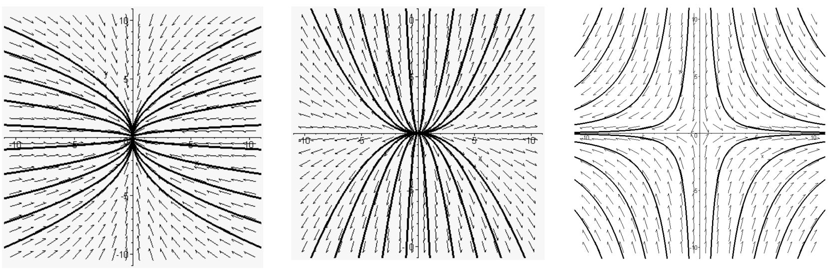
Поэтому точка покоя $x = y = 0$ – ***неустойчивый узел*** – неустойчива.

в) Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, тогда

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0, \quad y = C_2 e^{\lambda_2 t} \underset{t\to+\infty}{\to} \infty, \quad y = C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(<0)}.$$

Точка покоя $x = y = 0$ – ***седло*** – неустойчива.

Траектории решений системы (1) вблизи точек покоя представлены на рис. 1.



Устойчивый узел Неустойчивый узел Седло

Рис. 1

2) *Комплексно сопряженные собственные значения* $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тогда в некоторой системе координат общее решение рассматриваемой системы (1)

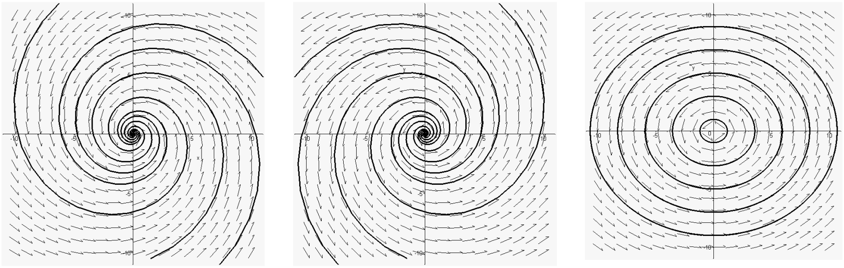
$$x = C_1 e^{\alpha t} \cos\beta t, \quad y = C_2 e^{\alpha t} \sin\beta t \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_2^2} = e^{2\alpha t}.$$

а) Пусть $\alpha < 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***устойчивый фокус*** – асимптотически устойчива.

б) Пусть $\alpha > 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***неустойчивый фокус*** – неустойчива.

в) Пусть $\alpha = 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***центр*** – устойчива, но не асимптотически.

Траектории решений системы (1) вблизи точек покоя представлены на рис. 2.



Устойчивый фокус *Неустойчивый фокус* *Центр*

Рис. 2

3) *Простые кратные собственные значения* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда общее решение рассматриваемой системы (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \quad y = C_2 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C_2}{C_1} x .$$

а) Пусть $\lambda < 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***устойчивый дикритический узел*** – асимптотически устойчива.

б) Пусть $\lambda > 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***неустойчивы дикритический узел*** – неустойчива.

4) *Непростые кратные собственные значения* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае общее решение системы (1) выглядит так:

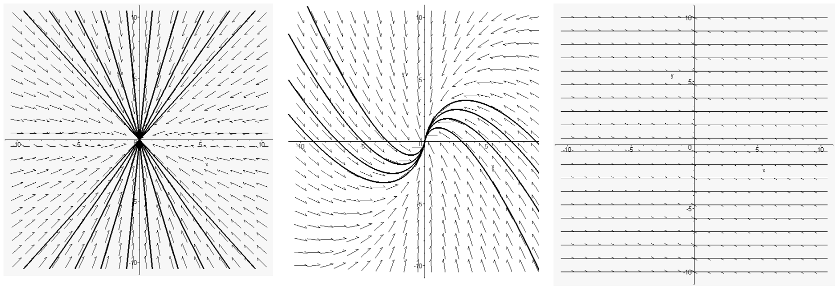
$$x = C_1 e^{\lambda t}, \quad y = \left(C_2 + C_1 t\right) e^{\lambda t}, \quad \text{где} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x}{C_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(C_2 + \frac{C_1}{\lambda} \ln\left(\frac{x}{C_1}\right)\right) \frac{x}{C_1} .$$

а) Пусть $\lambda < 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***устойчивый вырожденный узел*** – асимптотически устойчива.

б) Пусть $\lambda > 0$, тогда точка покоя $x = y = 0$ – ***неустойчивый вырожденный узел***– неустойчива.

Траектории решений системы (1) вблизи точек покоя представлены на рис. 3.



Дикритический узел *Вырожденный узел* *Нулевое с.з.*

Рис. 3

5) Пусть имеется *нулевое собственное значение* $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0$. Тогда решение (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y = C_2 .$$

§ 7. Консервативная механическая система с одной степенью свободы

Консервативная механическая система с одной степенью свободы (без трения) описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ – функция класса $C^1(a,b)$. Тогда функция

$$U(x) = -\int_c^x f(\xi) d\xi, \qquad c \in (a,b) \tag{2}$$

называется *потенциальной энергией* механической системы.

Уравнение второго порядка (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{y} &= f(x) = -U'(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Непрерывность производной $f'(x)$ обеспечивает, в силу соответствующих теорем, существование и единственность решения задачи Коши для системы уравнений (3). Положению равновесия $x = x_0$ уравнения (1) соответствует точка покоя $x = x_0,\ p = 0$ системы уравнений (3). Положение равновесия $x = x_0$ уравнения (1) является также стационарной точкой потенциальной энергии $U(x)$.

В самом деле, если $x = x_0$ – положение равновесия, то $f(x_0) = 0$ и, в силу (2), $U'(x_0) \equiv -f(x_0) = 0$.

В случае, когда x_0 является точкой строгого экстремума потенциальной энергии $U(x)$, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f(x)$ – функция класса $C^2(a,b)$. *Тогда*,

1) если $x = x_0$ – точка строгого минимума потенциальной энергии $U(x)$, то положение равновесия $x = x_0,\ p = 0$ системы уравнений (3) устойчиво по Ляпунову;
2) если $x = x_0$ – точка строгого максимума потенциальной энергии $U(x)$ и $f'(x_0) > 0$, то положение равновесия $x = x_0,\ p = 0$ системы уравнений (3) неустойчиво.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$, так как этого всегда можно добиться заменой переменных $y = x - x_0$.

Пусть $x = 0$ – точка строгого минимума потенциальной энергии, тогда в некоторой окрестности этой точки имеет место $U(x) > U(0)$ при $x \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$V(x,p) = U(x) - U(0) + \frac{p^2}{2}$$

– полная энергия механической системы. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x} p + \frac{\partial V}{\partial p}\left(-U'(x)\right) = 0,$$

следовательно, в силу леммы Ляпунова, положение равновесия $x = x_0,\ p = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пусть $x = 0$ – точка строгого максимума потенциальной энергии $U(x)$ и $f'(0) > 0$, тогда $U'(0) = 0$, $U''(0) = -f'(0) < 0$ и

$$U'(x) = \underbrace{U'(0)}_{=0} + U''(0)x + \frac{1}{2}\underbrace{U'''(\theta x)}_{-f''(\theta x)}x^2 = U''(0)x \underbrace{- \frac{1}{2} f''(\theta x) x^2}_{F(x)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Система (3) принимает вид

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -U''(0)x + F(x), \tag{4}$$

где $F(x) = -\frac{1}{2} f''(\theta x) x^2$, и при достаточно малых x имеет место оценка $|F(x)| \le Mx^2$.

Линеаризуем систему уравнений (4):

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -U''(0)x\,.$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{pmatrix}$ имеет действительные собственные значения $\lambda = \pm\sqrt{-U''(0)}$, одно из которых положительно. Поэтому, в силу теоремы о неустойчивости, положение равновесия $x = 0,\ p = 0$. Теорема доказана. ■

Замечание. Как видно из доказательства, первое утверждение теоремы остается справедливым также в случае, когда $f(x)$ – функция класса $C^1(a,b)$. Можно показать, что и второе утверждение теоремы остается верным при этих же предположениях.

§ 8. Фазовая плоскость для нелинейного автономного уравнения 2-го порядка

1^0. Постановка задачи

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = f(x). \tag{1}$$

Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = f(x) = -U'(x)\,. \tag{2}$$

Определение 1. Плоскость переменных (x,p) называется ***фазовой плоскостью*** системы (2) (или уравнения (1)).

Точки покоя системы (2) определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{cases} p = 0, \\ f(x) = 0\,. \end{cases}$$

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет n корней $x=x_i^0$, $i=1,2,...,n$. Тогда точки $\left(x_i^0,0\right)$ фазовой плоскости (x,p) являются точками покоя системы (2). Ниже будем предполагать, что корни уравнения (3) простые, т.е. $f'_x\left(x_i^0\right)\neq 0, \quad i=1,2,...,n$.

На практике часто бывает нужно не только исследовать устойчивость точек покоя, но и знать расположение всего множества траекторий на фазовой плоскости.

Определение 2. ***Фазовой траекторией*** называется проекция интегральной кривой системы (2) (уравнения (1)) на фазовую плоскость.

Фазовые траектории могут быть эффективно использованы для качественного описания поведения решения. Для уравнения вида (1) это описание будет достаточно простым и полным. Кроме того, оказывается, что расположение фазовых траекторий в малой окрестности точек покоя уравнения (1) полностью аналогично расположению фазовых траекторий для линеаризованного уравнения (1) (или линеаризованной системы (2)).

2^0. Система первого приближения

Выберем одну из точек $x=x_i^0$ и разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки с точностью до членов первого порядка

$$f(x)=\underbrace{f\left(x_i^0\right)}_{=0}+f'_x\left(x_i^0\right)\left(x-x_i^0\right)+o\left(x-x_i^0\right).$$

Сохранив в правой части системы (2) только линейные слагаемые, получим

$$\dot{x}=p, \qquad \dot{p}=f'_x\left(x_i^0\right)\left(x-x_i^0\right)$$

–систему *первого приближения*.

Обозначим $x-x_i^0=\overline{x}$. В новых переменных $(\overline{x},p)$ исследование точки покоя $(x,p)=\left(x_i^0,0\right)$ сводится к исследованию точки покоя $(\overline{x},p)=(0,0)$ системы

$$\dot{\overline{x}}=p, \qquad \dot{p}=f'_x\left(x_i^0\right)\cdot\overline{x}.$$

Исследуем характеристические числа этой системы. Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f'_x\left(x_i^0\right) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - f'_x\left(x_i^0\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{f'_x\left(x_i^0\right)} \ .$$

Если $f'_x\left(x_i^0\right) > 0$, то характеристические числа действительные и разных знаков, если $f'_x\left(x_i^0\right) < 0$, то характеристические числа чисто мнимые. В первом случае из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что соответствующая точка покоя системы (2) является неустойчивой. Во втором случае эта теорема ответ об устойчивости не дает.

Для системы первого приближения в случае действительных $\lambda_{1,2}$ разных знаков точка покоя является седлом, а в случае чисто мнимых $\lambda_{1,2}$ – центром. Эта классификация переносится и на систему (2) и уравнение (1).

3⁰. Фазовые траектории

В области $p > 0$ фазовый портрет системы (2), а, следовательно, и уравнения (1) образуют фазовые траектории, являющиеся интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dp}{dx} = \frac{f(x)}{p}. \tag{4}$$

Разделяя переменные в уравнении (4), получим $pdp = f(x)dx$, откуда

$$\frac{p^2}{2} = \int f(x)\,dx + C \quad \text{или} \quad p = \sqrt{2\int f(x)\,dx + C} \ .$$

Аналогично, в области $p < 0$,

$$p = -\sqrt{2\int f(x)\,dx + C} \ .$$

Очевидно, что при каждом C интегральные кривые, если они существуют, расположены симметрично относительно оси x на фазовой плоскости.

<u>Определение 3</u>. Фазовые траектории уравнения (4), проходящие через точки покоя типа седла, называют ***сепаратрисами***.

Замечание. Можно показать, что движение точки фазовой плоскости по сепаратрисам, проходящим через данное седло $\left(x^0,0\right)$, происходит так, что точка приближается к этому седлу при $t\to+\infty$ или при $t\to-\infty$.

Уравнения сепаратрис, проходящих через седловую точку $\left(x^0,0\right)$, удобно записывать в виде

$$p=\pm\sqrt{2\int\limits_{x^0}^{x} f(s)ds}\,. \tag{5}$$

Отметим, что в силу автономности уравнения (1) и единственности решения задачи Коши для этого уравнения, через каждую точку $\left(x^0,p^0\right)$ фазовой плоскости может проходить только одна фазовая траектория, откуда следует, что фазовые траектории уравнения (1) не пересекаются. Точки покоя не могут лежать на фазовых траекториях системы, поскольку они сами являются решениями системы, и, таким образом, будет нарушена единственность решения системы. Фазовые траектории могут лишь стремиться к указанным точкам при $t\to+\infty$ или при $t\to-\infty$. Если начальное условие задачи Коши соответствует точке покоя, то решение не меняется при изменении t, оставаясь этой точкой покоя.

4⁰. Примеры решения задач

Пример 1. (*уравнение с квадратичной нелинейностью*). Рассмотрим уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2}=x\left(a-x\right)\equiv f\left(x\right)$, где $a>0$. Это уравнение эквивалентно системе ОДУ 1-го порядка

$$\dot{x}=p,\qquad \dot{p}=x\left(a-x\right). \tag{6}$$

Корни $x_1=0,\ \ x_2=a$ уравнения $f(x)=0$ определяют две точки покоя системы (6) $\left(x,p\right)=\left(0,0\right)$ и $\left(x,p\right)=\left(a,0\right)$. Причем, $f_x'\left(0\right)=a>0$; $f_x'\left(a\right)=-a<0$, поэтому $\left(0,0\right)$ – точка покоя типа *седла*, $\left(a,0\right)$ – точка покоя типа *центра*.

Получим явное выражение для фазовых траекторий системы (6). В соответствии с п. 3,

$$\frac{p^2}{2} = \int x(x-a)dx + C = -U(x) + C,$$

где $U(x) = \frac{x^3}{3} - a\frac{x^2}{2}$.

Тогда уравнения фазовых траекторий описываются формулой

$$p = \pm\sqrt{2\int x(x-a)\,dx + C} = \pm\sqrt{-2U(x) + C}\ . \qquad (7)$$

Графики функции $f(x)$ и ее первообразных при различных значениях C, а также фазовые портрет для системы (6) изображены на рис. 1.

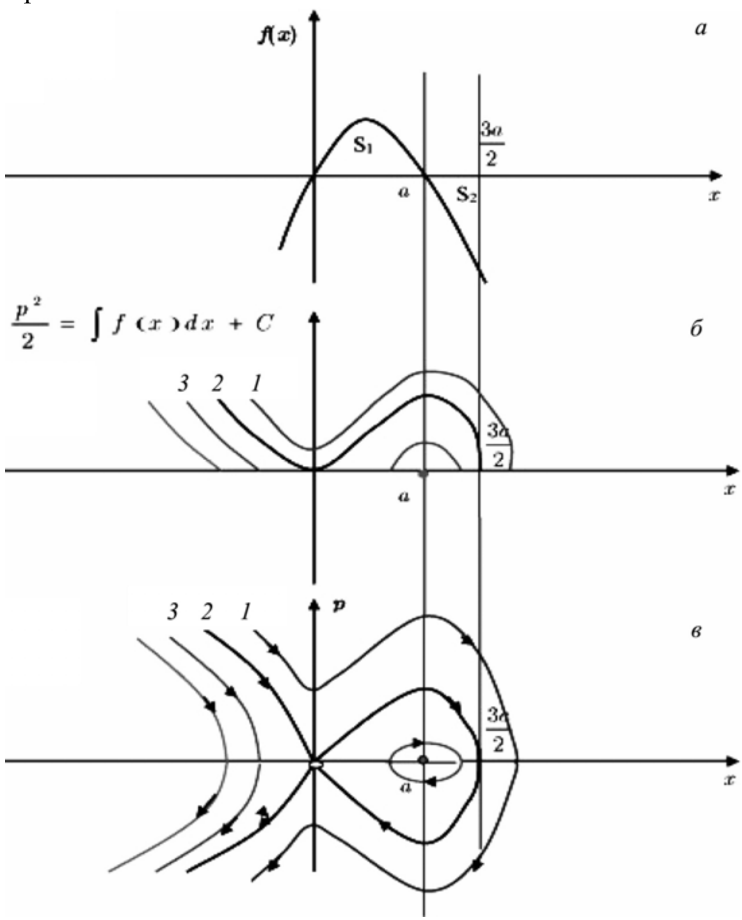


Рис. 1

На рис. 1, *а* показана функция $f(x)$. На рис. 1, *б* представлены различные первообразные функции $f(x)$:

$$\frac{p^2}{2} = \int f(x)\,dx + C = -U(x) + C\,.$$

Кривая *2* на рис. 1, *б* – первообразная, соответствующая сепаратрисе. Значение этой первообразной в каждой точке x численно равно площади под кривой $f(x)$, изображенной на рис. 1, *а*.

Здесь мы полагаем значение площади под графиком $f(x)$ положительным при $f(x) > 0$ и отрицательным при $f(x) < 0$. В области положительных значений x функция $p^2/2$ возрастает до тех пор, пока $f(x) > 0$. В точке $x = a$ график $f(x)$ проходит через ноль и затем становится меньше нуля, т.е. $p^2/2$ начинает убывать.

Когда площади S_1 и S_2 сравняются по абсолютной величине, $U(x) = -p^2/2$ обратится в нуль. Соответствующее значение $x = \tilde{x}$ можно определить из уравнения $\int\limits_0^a x(a-x)dx = -\int\limits_a^{\tilde{x}} x(a-x)\,dx$, то есть $\int\limits_0^{\tilde{x}} x(a-x)dx = 0$. Это точка $\tilde{x} = 3a/2$. Дальше в область положительных значений x сепаратрису продолжить нельзя, так как $p^2/2$ может принимать только неотрицательные значения.

В области отрицательных значений x функция $\frac{p^2}{2} = \int\limits_0^x f(s)\,ds$ принимает положительные значения при $f(x) < 0$ и, следовательно, $U(x) = -p^2/2$ существует при всех отрицательных x.

На рис. 1, *в* номером *2* обозначены сепаратриса, проходящая через седло $(0,0)$. При этом часть сепаратрисы, расположенная в правой полуплоскости, образует так называемую *петлю*. Стрелками показано направление движения точки по фазовой траектории при изменении t. Это направление можно определить, исходя из следующих соображений: если $p = \frac{dx}{dt} > 0$ (верхняя полуплоскость), то x – возрастает, т.е. движение происходит направо; в нижней полуплоскости $p = \dfrac{dx}{dt} < 0$, x убывает, т.е. движение по фазовым траекториям – налево.

Будем изменять значение C. При увеличении C кривая (график первообразной) на рис. 1, *б* приподнимается (кривая *1*). Формула (7) определяет незамкнутые фазовые траектории, которые продолжаются вправо до некоторой точки, лежащей правее $\tilde{x}$.

При уменьшении C кривая на рис.1, *б* опускается и её положительная часть будет состоять из двух отдельных кривых (кривая *3*). Формула (7) определяет в правой полуплоскости замкнутые траектории, стягивающиеся с уменьшением C к точке покоя $(a,0)$. Эти замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. В левой полуплоскости на рис. 1, *в* формула (7) определяет незамкнутые траектории.

Задача. При каких значениях x^0 разрешима краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(a-x), \quad x(0) = x^0, \quad x(\infty) = 0.$$

Решение. Согласно п. 3^0, точка фазовой плоскости, двигаясь по сепаратрисе седла $(0,0)$, приближается к этому седлу либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Поэтому задача разрешима при тех x^0, которым соответствует точка фазовой плоскости, лежащая на сепаратрисе, входящей в точку покоя $(0,0)$.

Подберем значение $\dot{x}(0) = z(0)$ так, чтобы точка $(x^0, p(0))$ фазовой плоскости находилась на сепаратрисе. Тогда, двигаясь по сепаратрисе от точки $(x^0, p(0))$ в направлении $t \to +\infty$, она будет приближаться к точке $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

При $x^0 < 0$ и $x^0 = 3a/2$ задача имеет единственное решение. Если $0 < x^0 < 3a/2$, то задача имеет два решения, так как каждому x^0, лежащему внутри петли, соответствует два значения $p(0)$ таких, что точка $(x^0, p(0))$ лежит на петле, то есть на сепаратрисе, входящей в точку покоя $(0,0)$. В случае $p^0 > 3a/2$, очевидно, решений краевой задачи нет.

Пример 2. (*уравнение с кубической нелинейностью*). В этом случае в зависимости от вида функции $f(x)$ могут представиться следующие варианты.

а) *Симметричный случай* – ячейка на фазовой плоскости.

Построим фазовый портрет для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \equiv x\left(x^2 - a^2\right).$$

Определим точки покоя:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x^2 - a^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = \pm a.$$

На рис. 2, *а* показан график функции $f(x) = x\left(x^2 - a^2\right)$. Найдем по этому графику знак производной f'_x в точках покоя $x = 0$ и $x = \pm a$: $f'_x(0) < 0$, $f'_x(\pm a) > 0$. Поэтому, согласно §5, точка $(0,0)$ – центр, а точки $(a,0)$ и $(-a,0)$ – сёдла.

Запишем уравнения первообразных функции $f(x)$ (рис. 2, *б*):

$$\frac{p^2}{2} = \int_a^x f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - a^2\frac{x^2}{2} + C.$$

Заметим, что функция $f(x)$– нечетная, значит её первообразная – функция четная, и фазовый портрет будет симметричным относительно оси ординат. В силу симметрии имеем $\int_a^x f(s)\,ds = \int_{-a}^x f(s)\,ds$, и уравнения сепаратрис седловых точек $(a,0)$ и $(-a,0)$ можно записать в одной формулой:

$$p = \pm\sqrt{2\int_a^x f(x)\,ds}.$$

На рис. 2, *в* сепаратрисы, проходящие через седла $(a,0)$ и $(-a,0)$ обозначены номером *2*, причем эти сепаратрисы оказываются общими для обоих сёдел. В этом случае говорят, что сепаратрисы образуют *ячейку на фазовой плоскости*.

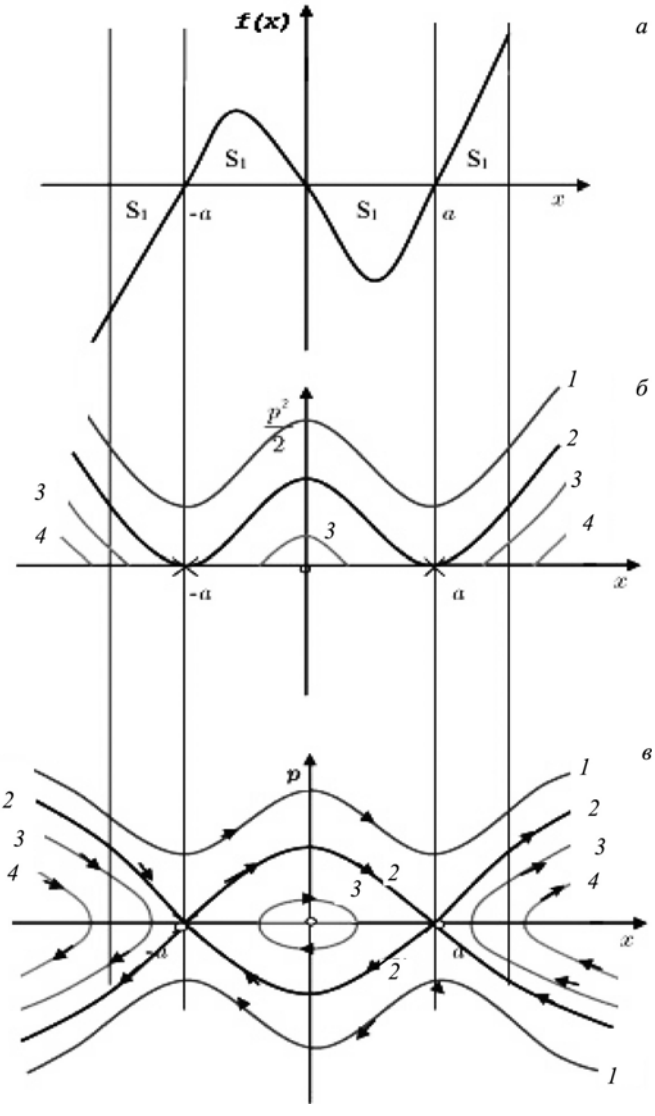


Рис. 2

Будем изменять значение C. При увеличении C график первообразной приподнимается над осью OY. Соответствующая фазовая траектория будет определена на всей вещественной оси (рис. 2, *в*, кривая *1*).

Если уменьшать значение C, то график первообразной опускается относительно оси OY, и область неотрицательных значений $U(x) = -x^2/2$ будет состоять из трех промежутков (рис. 2, *б*, кривые *3*). Внутри промежутка $-a < x < a$ этим значениям C соответствуют замкнутые фазовые траектории, а при $|x| > a$ – незамкнутые фазовые траектории (рис. 2, *в*, кривые *3*).

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях C функция $U(x) = -p^2/2$ принимает неотрицательные значения только если $|x|$ достаточно велико. Этим значениям C соответствуют незамкнутые фазовые траектории, обозначенные на рис. 2, *в* номером *4*.

б) *Несимметричный случай.*

Построим фазовый портрет уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \equiv x(x+a_1)(x-a_2), \qquad 0 < a_2 < a_1 .$$

Точки покоя этого уравнения: $x = 0,\ x = -a_1,\ x = a_2$.

На рис. 3, *а* показан график функции $f(x) = x(x+a_1)(x-a_2)$. Знаки производной f'_x для каждого значения в точках покоя $x = 0$, $x = -a_1$, $x = a_2$ следующие: $f'_x(0) < 0$, $f'_x(-a_1) > 0$, $f'_x(a_2) > 0$. Следовательно, точка $(0,0)$ – точка покоя типа *центра*, а $(-a_1,0)$ и $(a_2,0)$ – точки покоя типа *седла*.

На рис. 3, *б* изображены графики первообразных $\dfrac{p^2}{2} = \int f(x)\,dx + C$.

Номером *1* отмечена первообразная $\dfrac{p^2}{2} = \int\limits_{a_2}^{x} f(s)\,ds$. Она касается оси OY в точке $(a_2,0)$. На фазовой плоскости (рис. 3, *в*) ей соответствуют сепаратрисы, проходящие через седло $(a_2,0)$ (обозначены номером *1*).

Сепаратрисы седла $(-a_1,0)$ описываются уравнением $p = \pm\sqrt{2\int\limits_{-a_1}^{x} f(s)\,ds}$ и отмечены на фазовой плоскости (рис. 3, *в*) номером *3*.

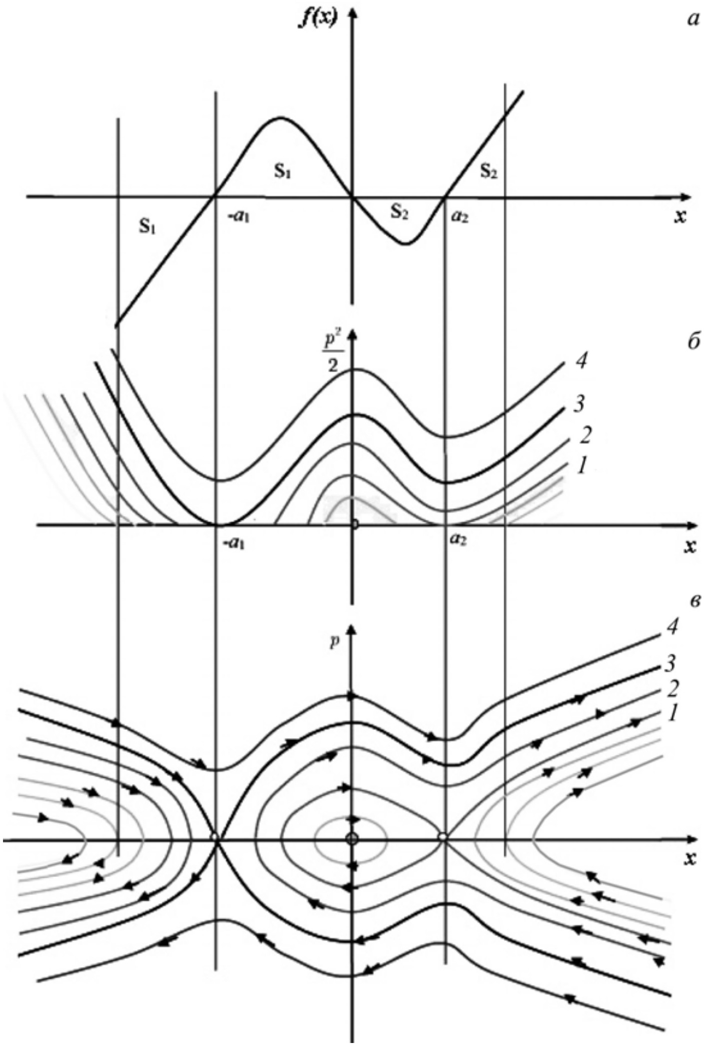


Рис. 3

В остальном рассмотрение фазового портрета аналогично случаю с квадратичной нелинейностью. На рис. 3, *б* номерами *2* и *4* обозначены два различные положения первообразной $\frac{p^2}{2}=\int f(x)\,dx+C$, а на рис 3, *в* теми же цифрами отмечены соответствующие фазовые траектории.

Пример 3. *Математический маятник.*

Рассмотрим поведение фазовых кривых следующего автономного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \equiv -\sin x\,.$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений 1-го порядка

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\sin x\,.$$

Корни $x = \pi m$ уравнения $f(x) = 0$ определяют точки покоя этой системы $(x_m, p) = (\pi m, 0)$. Заметим, что

$$f'_x(\pi m) = \begin{cases} -1, & m = 2k \\ 1, & m = 2k+1 \end{cases}, \qquad k \in Z\,,$$

следовательно, $(x_{2k+1}, p) = ((2k+1)\pi, 0)$ – точки покоя типа *седло*, $(x_{2k}, p) = (2k\pi, 0)$ – точки покоя типа *центр*.

Получим явное выражение для фазовых траекторий:

$$\frac{p^2}{2} = -\int \sin x dx + C = -\cos x + C\,.$$

В рассматриваемом случае $U(x) = -\cos x$, поэтому, уравнения фазовых траекторий $p = \pm\sqrt{2\cos x + C}, \qquad C \geq -2$.

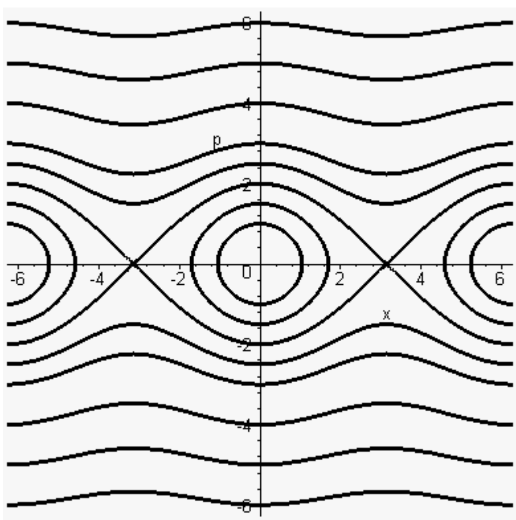


Рис. 4

Фазовый портрет представлен на рис. 4. При $C = 2$ получаем сепаратрису, соединяющую точки покоя. Если $-2 < C < 2$, то фазовые траектории замкнуты и заполняют область между сепаратрисами («захваченные» частицы, совершающие финитные колебания в потенциальных ямах). В случае $C > 2$ фазовые траектории незамкнуты и соответствуют «пролетным» частицам, движение которых инфинитно (периодические колебания около некоторого значения скорости), причем верхней и нижней ветвям фазовых кривых соответствуют различные направления скорости.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Изобразить фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x \cdot \left(x^2 + y^2 - R^2\right), \\ \dot{y} = x - y \cdot \left(x^2 + y^2 - R^2\right). \end{cases}$$

Указание: перейти в полярные координаты.

2. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0,\ \ y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

3. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \ \ y, \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0,\ \ y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

4. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \ \ x, \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0,\ \ y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

5. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0, \quad y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

6. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0, \quad y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории. Указание: перейти в полярные координаты.

7. Для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

а) определить тип точки покоя $x = 0, \quad y = 0$;

б) исследовать устойчивость указанной точки покоя;

в) изобразить фазовые траектории. Указание: перейти в полярные координаты.

8. Для уравнения $\ddot{y} = y(1 - y)$

а) найти точки покоя;

б) исследовать устойчивость точек покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

9. Для уравнения $\ddot{y} = y(y - 1)$

а) найти точки покоя;

б) исследовать устойчивость точек покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

10. Для уравнения $\ddot{y} = y(1 - y^2)$

а) найти точки покоя;

б) исследовать устойчивость точек покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

11. Для уравнения $\ddot{y} = y(y^2 - 1)$

а) найти точки покоя;

б) исследовать устойчивость точек покоя;

в) изобразить фазовые траектории.

Глава 7. **ПОНЯТИЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ**

Лекция 15

§ 1. Понятие о регулярных и сингулярных возмущениях

При построении математических моделей физических объектов, характеризующихся различными масштабами по пространству, либо различными скоростями протекающих в системе процессов, часто возникают задачи, содержащие малые параметры. В этих случаях естественно поставить вопрос: если упростить математическую модель, положив малый параметр равным нулю (т.е. пренебречь влиянием некоторых процессов или составных частей физической системы), получим ли мы решение, приближенно описывающее исходный объект моделирования?

Пусть математическая модель в некоторой области D изменения переменных описывается уравнением

$$L_\mu u = 0 \ , \tag{1}$$

где оператор L_μ зависит от малого параметра μ. Обозначим решение этой задачи u_μ. Положив параметр μ равным нулю, получим ***вырожденное*** (т.е. при $\mu = 0$) ***уравнение*** $L_0 u = 0$, решение которого обозначим u_0.

<u>Определение</u>. Задача (1) называется ***регулярно возмущенной***, если решение u_0 вырожденного уравнения $L_0 u = 0$ дает равномерное в области D приближение для решения u_μ задачи (1). В противном случае задача (1) называется ***сингулярно возмущенной***.

Примером регулярно возмущенной задачи является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке $0 \le x \le H$, малый параметр μ в котором находится в правой части, т.е.

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f(y, x, \mu), \\ &y(0, \mu) = y^0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 < \mu \le \mu_0$ – малый параметр. В этом случае работает доказанная ранее теорема о непрерывной зависимости решения от параметра и, следовательно, полагая формально $\mu = 0$, получаем (обычно более простую) задачу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y, x, 0\right),$$
$$y(0) = y^0,$$

решение которой $\bar{y}(x)$ дает равномерное на отрезке $0 \le x \le H$ приближение для решения задачи (2).

Если же малый параметр входит в уравнение как множитель при производной (старшей производной), например

$$\mu\frac{dy}{dx} = f(y, x, \mu), \qquad y(0, \mu) = y^0, \tag{3}$$

то вырожденной уравнение $f(y, x, 0) = 0$ уже не будет дифференциальным, и его решение $\bar{y}(x)$, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию, т.е. не дает равномерного на всем отрезке $0 \le x \le H$ приближения для решения задачи (3).

Пример. Рассмотрим задачу

$$\mu\frac{dy}{dx} = -y,$$
$$y(0) = 1,$$

решением которой является функция $y(x, \mu) = e^{-x/\mu}$. Если же положить $\mu = 0$, то получим вырожденное уравнение $f(x, y, 0) \equiv -y = 0$, решение которого $\bar{y}(x) \equiv 0$ не близко к точному решению $y(x, \mu) = e^{-x/\mu}$ в окрестности точки $x = 0$. Характерной особенностью подобных задач является наличие ***пограничного слоя***, т.е. области вблизи начальной (или внутренней) точки, где происходит очень резкое изменение решения (см. рис. 1).

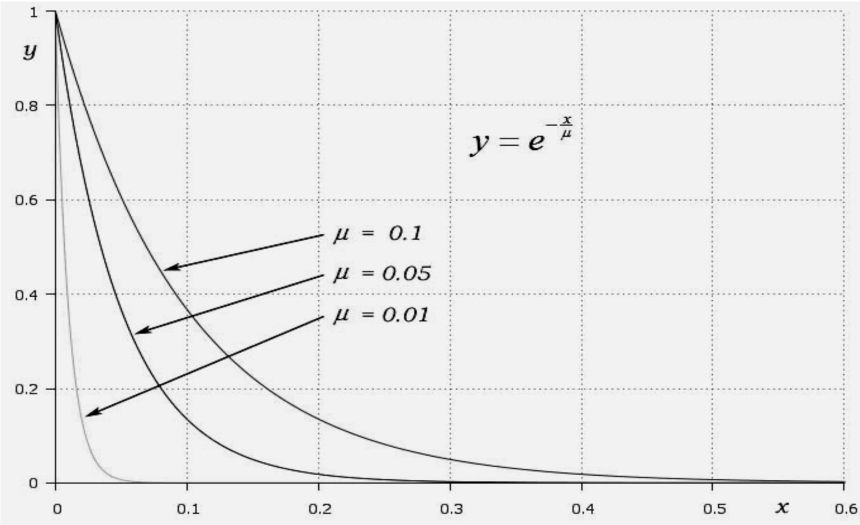


Рис. 1

§ 2. Регулярно возмущенная задача

1⁰. Асимптотическое приближение решения по малому параметру

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x, \mu), \quad 0 < x \le H, \quad 0 < \mu \le \mu_0, \qquad (4)$$
$$y(0, \mu) = y^0(\mu).$$

Полагая $\mu = 0$, получим задачу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y, x, 0\right), \quad , \qquad (5)$$
$$y(0) = y^0,$$

решение которой $\overline{y}(x)$, как было отмечено выше, дает равномерное на отрезке $0 \le x \le H$ приближение решения задачи (4), т.е. $\left|y(x, \mu) - \overline{y}(x)\right| = \alpha(\mu)$, где $\alpha(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$.

Чтобы уточнить полученное приближение, будем искать решение задачи (4) в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots \quad . \qquad (6)$$

Подставим это разложение в (4) и представим правую часть уравнения (4) и начальное условие также в виде рядов по степеням μ:

$$\frac{dy_0}{dx} + \mu \frac{dy_1}{dx} + \ldots = f(y_0(x) + \mu y_1(x) + \ldots, x, \mu) \equiv$$
$$\equiv f(y_0, x, 0) + \mu \Big[f_y(y_0, x, 0) \cdot y_1(x) + f_\mu(y_0, x, 0) \Big] + \ldots .$$
$$y^0(\mu) = y^0 + \mu y^1 + \ldots$$

Приравнивая теперь члены при одинаковых степенях параметра μ в правых и левых частях уравнения и начального условия в (4), получим последовательность задач для определения функций $y_i(x)$ в разложении (6).

1. $\mu^0: \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = f(y_0, x, 0), \\ y_0(0) = y^0. \end{cases}$

Эта задача совпадает с (5). Потребуем, чтобы ее решение $y_0(x) = \bar{y}(x)$ существовало на отрезке $0 \le x \le H$ и было единственным. Далее,

2. $\mu^1: \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_y(y_0(x), x, 0) \cdot y_1 + f_\mu(y_0(x), x, 0), \\ y_1(0) = 0. \end{cases}$

Задача для $y_1(x)$ является линейной и ее решение может быть получено в квадратурах, например, методом вариации постоянной. Аналогично находятся следующие члены ряда (6), причем задачи для $y_i(x)$, $i = 2, 3, \ldots$ также будут линейными. Справедлива следующая теороема.

<u>**Теорема 1**</u>. *Пусть*:

1) в некоторой области $D = \{ |y| < b,\ 0 \le x \le H,\ 0 \le \mu \le \mu_0 \}$ пространства переменных (y, x, μ) функция $f(y, x, \mu)$ является непрерывной вместе со всеми частными производными до $n+1$-го порядка;
2) вырожденная задача (5) имеет на отрезке $0 \le x \le H$ единственное решение $y_0(x)$.

Тогда при достаточно малых μ ($0 < \mu \le \mu_1 \le \mu_0$) на сегменте $0 \le x \le H$ существует единственное решение $y = y(x,\mu)$ задачи (4), причем имеет место оценка

$$\left|y(x,\mu) - Y_n(x,\mu)\right| \le C\mu^{n+1},$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от параметра μ, а $Y_n(x,\mu)$ – частичная сумма ряда (6).

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Его можно найти, например, в книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений». Далее проиллюстрируем результат на конкретных примерах.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \mu y \equiv f(x,y,\mu), \quad x > 0,$$
$$y(0,\mu) = 1 + 2\mu \equiv y^0(\mu).$$

Точным решением ее является $y(x,\mu) = (1+2\mu)\cdot e^{\mu x} + \frac{1}{\mu}(e^{\mu x} - 1)$.

Будем строить решение в виде ряда по параметру μ: $y = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots$. Подставив этот ряд в правую часть уравнения и в начальное условие, разложим функции $f(x,y,\mu)$ и $y^0(\mu)$ в ряды Маклорена по степеням параметра μ:

$$f\Big(x, y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots, \mu\Big) \equiv$$
$$\equiv 1 + \mu\cdot\Big(y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots\Big) =$$
$$= 1 + \mu y_0(x) + \mu^2 y_1(x) + \ldots$$
$$y^0(\mu) = 1 + 2\mu .$$

Приравнивая теперь коэффициенты при степенях параметра в правой левой частях уравнения и начального условия, получим последовательность задач:

$$\mu^0: \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = 1, \\ y_0(0) = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = 1 + x, ,$$

$$\mu^1: \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_0(x) = 1 + x \\ y_1(0) = 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\mu^2: \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dy_2}{dx} = y_1(x) \equiv 2 + x + \dfrac{x^2}{2}0 \\ y_2(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \; y_2(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

и т. д.

Таким образом, асимптотическое приближение решения исследуемой задачи (первые 3 члена ряда по степеням параметра μ) имеет вид

$$y(x,\mu) = 1 + x + \mu \cdot \left(2 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \mu^2 \cdot \left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \ldots,$$

что, как легко видеть, совпадает разложением в ряд Маклорена точного решения ($x > 0$ – фиксировано):

$$y(x,\mu) = (1 + 2\mu) \cdot e^{\mu x} + \frac{1}{\mu}(e^{\mu x} - 1) =$$

$$= 1 + \mu \cdot (2 + x) + \mu^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) + o(\mu^2) + x + \frac{\mu x^2}{2} + \frac{\mu^2 x^3}{6} + o(\mu^2) =$$

$$= 1 + x + \mu \cdot \left(2 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \mu^2 \cdot \left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o(\mu^2).$$

Замечание.Если рассматривать задачу не на конечном отрезке $0 \le x \le H$, а на асимптотически большом (порядка $1/\mu$), или бесконечном промежутке, то предельный переход $\lim\limits_{\mu \to +0} y(x,\mu) = y_0(x)$ уже может не быть равномерным по x. В этом можно убедиться в разобранных ниже примерах.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \mu y, \qquad 0 < x \le H,$$
$$y(0,\mu) = -1 + 2\mu,$$

где $\mu > 0$ – малый параметр. Ее точным решением является

$$y(x,\mu) = \left(-1+2\mu\right)\cdot e^{\mu x} + \frac{1}{\mu}\left(e^{\mu x}-1\right).$$

Соответствующая невозмущенная (т.е. при $\mu = 0$) задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = 1 \qquad && 0 < x \le H \\ &y(0) = -1 && \end{aligned},$$

а ее решение есть $\quad \bar{y}(x) = x - 1$.

Легко видеть, что имеет место равномерный на отрезке $0 \le x \le H$ предельный переход

$$\lim_{\mu\to+0} y(x,\mu) \equiv \lim_{\mu\to+0}\left[\left(-1+2\mu\right)\cdot e^{\mu x} + \frac{1}{\mu}\left(e^{\mu x}-1\right)\right] = -1 + x \equiv \bar{y}(x),$$

что соответствует результату, сформулированному в теореме 1. Однако, если $H \sim \dfrac{1}{\mu}$, т.е. на асимптотически большом (или бесконечном промежутке) это неверно.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0 \qquad && 0 < x \le H \\ &y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 && \end{aligned}.$$

Ее точное решение $-\quad y(x) = \sin x$.

Внесем в уравнение малое регулярное возмущение ($\mu > 0$ – малый параметр):

$$\begin{aligned} &y'' + y + (2\mu + \mu^2)y = 0, \qquad && 0 < x \le H, \\ &y(0,\mu) = 0, \quad y'(0,\mu) = 1, && \end{aligned} \tag{7}$$

и будем строить приближенное решение задачи Коши (7) на отрезке $0 \le x \le H$ в виде ряда

$$y(x,\mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \ldots\ .$$

Подставляя записанный ряд в уравнение и начальное условие, и приравнивая коэффициенты при степенях μ, получим последовательность задач для определения членов ряда:

$$\mu^0: \quad \to \quad \begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \\ y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad y_0(x) = \sin x\ ,$$

$$\mu^1: \quad \to \quad \begin{cases} y_1'' + y_1 + 2y_0 \equiv y_1'' + y_1 + 2\sin x = 0, \\ y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = -\sin x + x\cos x\,,$$

$$\mu^2: \quad \to \quad \begin{cases} y_2'' + y_2 + 2y_1 + y_0 = 0, \\ y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_2(x) = \sin x - x\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

Нетрудно проверить, что функция

$$y(x,\mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) =$$

$$= \sin x + \mu(-\sin x + x\cos x) + \mu^2(\sin x - x\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x).$$

удовлетворяет уравнению и начальным условиям с точностью $o(\mu^2)$.

Точное решение задачи (7) есть

$$y(x,\mu) = \frac{\sin(1+\mu)x}{1+\mu}.$$

Убедитесь сами, что первые три члена асимптотического разложения указанной функции по малому параметру μ совпадают с полученным выше приближенным решением, т.е. частичная сумма построенного ряда дает равномерное на конечном отрезке $0 \le x \le H$ приближение для точного решения.

Замечание. В рассмотренном примере 3, как точное решение возмущенного уравнения, так и решение вырожденного уравнения являются периодическими функциями (периоды – соответственно $\dfrac{2\pi}{\mu+1}$ и 2π – асимптотически близки). Однако полученное нами асимптотическое приближение содержит малые непериодические слагаемые вида $\mu x\cos x$ и $\mu^2 x^2 \sin x$, т.е. уже не является периодической функцией! Это означает, что рассмотренный способ построения асимптотического ряда дает равномерное приближение для решения начальной задачи лишь на конечном отрезке $0 \le x \le H$, но не может быть использован для получения равномерного приближения периодического решения.

В случае периодической задачи нужно использовать другие подходы, например, *метод усреднения* Крылова–Боголюбова, с которым можно ознакомиться в книге Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний».

§ 3. Сингулярные возмущения

1⁰. Теорема Тихонова

Предельный переход $\lim\limits_{\mu\to+0} y(x,\mu) = y_0(x)$, о котором говорится в теореме 1, имеет место на конечном отрезке $0 \le x \le H$, где H – некоторая постоянная, причем на указанном множестве это предельный переход является равномерным относительно $x \in [0, H]$. Таким образом, в случае регулярного возмущения решение вырожденного уравнения дает равномерное на отрезке приближение для точного решения. Однако, в случае сингулярного возмущении это не так и, более того, решение вырожденного уравнения может быть вообще не близко к точному решению.

Рассмотрим систему уравнений, содержащую малый параметр при старшей производной. Требуется найти функции $z(x,\mu)$ и $y(x,\mu)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{dz}{dx} = F(z,y,x), \\ \dfrac{dy}{dx} = f(z,y,x), \end{cases} \tag{8}$$

$$z(0,\mu) = z^0, \qquad y(0,\mu) = y^0 \quad ,$$

где $\mu > 0$ – малый параметр.

В данном случае правая часть первого уравнения $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{\mu} F(z,y,x)$ не является регулярно возмущенной (см. определение 1). Полагая формально $\mu = 0$ в задаче (8), получим невозмущенную (вырожденную) систему

$$\begin{cases} 0 = F(z,y,x), \\ \dfrac{dy}{dx} = f(z,y,x), \end{cases} , \tag{9}$$

где первое уравнение системы – алгебраическое (а не дифференциальное) относительно переменной z. Предположим, что оно имеет действительные решения – функции $z_i = \varphi_i(y,x),\ i = 1,2,...,p$, – причем все корни изолированы, т.е. для каждого из них существует окрестность $|z - \varphi_i(y,x)| \le d$, в которой нет других решений этого уравнения.

Пусть $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, x)$ – один из корней первого уравнения системы (9). Обозначим $\bar{y}(x) \equiv y(x,0)$, тогда получим следующую вырожденную задачу

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{y}}{dx} = f(\varphi(\bar{y},x),\bar{y},x), \\ &\bar{y}(0) = y^0. \end{aligned} \tag{10}$$

<u>**Теорема 2**</u> (*теорема А.Н.Тихонова*). *Пусть*:

1) функции $F(z,y,x),\ f(z,y,x),\ F'_z,\ F'_y,\ f'_z,\ f'_y$ – непрерывны в некоторой области трех переменных (z,y,x): $G = \bar{D} \times Z,$; $(y,x) \in \bar{D},\quad z \in Z$;
2) функции $\varphi(y,x),\ \varphi'_y\ \in C(\bar{D})$;
3) существует решение задачи (10) $y = \bar{y}(x)$ на сегменте $0 \le x \le H$;
4) корень $\varphi(y,x)$ является устойчивым в области $\bar{D}$, т.е. $\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(\bar{y},x)} < 0$;
5) начальное значение z^0 принадлежит области влияния устойчивого корня $\varphi(y^0,x)$ уравнения $F(z^0,y^0,0) = 0$, т.е. если $\varphi_1(y,x)$ и $\varphi_2(y,x)$ – два ближайших к $\varphi(y,x)$ корня соответственно снизу и сверху, то необходимо, чтобы начальное значение z^0 лежало в интервале $\left(\varphi_1(y^0,x)\,;\,\varphi_2(y^0,x)\right)$, называемой *областью влияния (или областью притяжения)* корня $\varphi(y,x)$.

Тогда:

1) существует решение $z(x,\mu)$, $y(x,\mu)$ задачи (8), определенное на сегменте $0 \le x \le H$;

2) имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu\to+0} y(x,\mu) = \overline{y}(x), \qquad 0 \le x \le H,$$

$$\lim_{\mu\to+0} z(x,\mu) = \varphi(\overline{y}(x),x), \qquad 0 < x \le H,$$

где $\overline{y}(x)$ – решение вырожденной задачи (10).

<u>*Доказательство*</u> сформулированной теоремы можно найти, например, в книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений».

Замечание. Предельный переход для функции $y(x,\mu)$ является равномерным относительно x на отрезке $0 \le x \le H$, в то время как для функции $z(x,\mu)$ – неравномерным. Можно доказать, что равномерный предельный переход в формуле для $z(x,\mu)$ имеет место на отрезке $x_0 \le x \le H$, где $x_0 > 0$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\mu\frac{dz}{dx} = 2 - z, \qquad z(0,\mu) = 1, \tag{11}$$

решение которой легко выписывается:

$$z(x,\mu) = 2 - e^{-x/\mu}. \tag{12}$$

Функция в правой части уравнения (8) есть $F(z,\mu) = 2 - z$. Полагая в (11) $\mu = 0$, получим вырожденное уравнение $F(z,0) \equiv 2 - z = 0$, которое имеет единственное (следовательно, изолированное) решение $\overline{z}(x) = \varphi(x) \equiv 2$. Так как

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(x)\equiv 2} = -1 < 0,$$

то корень вырожденного уравнения является устойчивым.

Заметим, что других корней у уравнения (11) нет, поэтому областью влияния устойчивого корня вырожденного уравнения $\overline{z}(x) = \varphi(x) \equiv 2$ является вся плоскость (x,z), и начальное значение $z(0,\mu) = 1$ принадлежит этой области влияния. Структуру области влияния можно изучить и непосредственно: так как условие $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi(x)\equiv 2} = -1 < 0$ выполняется на всей плоскости (x,z), то при

$z > 2$ имеет место $F(z,0) < 0 \Rightarrow dz/dx < 0$, а при $z < 2$ – $F(z,0) > 0 \Rightarrow dz/dx > 0$, т.е. при любом начальном значении $z(0,\mu)$ решение задачи (11) $z(x,\mu)$ будет приближаться к устойчивому корню вырожденного уравнения $\overline{z}(x) = \varphi(x) \equiv 2$.

Суммируя сказанное выше, на основании теоремы Тихонова можно утверждать, что имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu \to +0} z(x,\mu) = \varphi(x) \equiv 2, \qquad 0 < x \le H .$$

В справедливости последнего утверждения при любом $H > 0$ можно легко убедиться непосредственно, вычислив предел точного решения (12):

$$\lim_{\mu \to +0} z(x,\mu) = \lim_{\mu \to +0} (2 - e^{-x/\mu}) = 2,\ x > 0 .$$

Кроме того, на множестве $x \ge x_0 > 0$ имеет место

$$\lim_{\mu \to +0} \sup_{x \ge x_0 > 0} \left| z(x,\mu) - \varphi(x) \right| = \lim_{\mu \to +0} \sup_{x \ge x_0 > 0} \left| (2 - e^{-x/\mu}) - 2 \right| =$$

$$= \lim_{\mu \to +0} \sup_{x \ge x_0 > 0} e^{-x/\mu} = \lim_{\mu \to +0} e^{-x_0/\mu} = 0,$$

т.е. предельный переход является равномерным относительно x на указанном множестве.

Все вышесказанное можно видеть на рис. 2, где построены графики решения задачи (11) при различных значениях параметра μ.

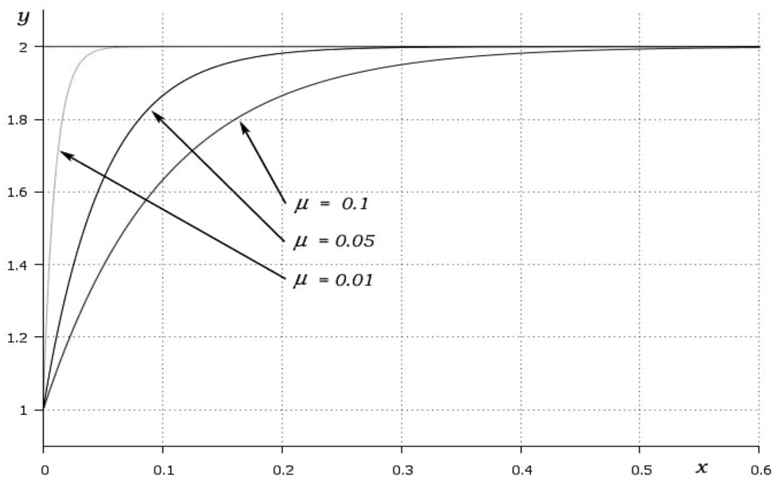


Рис. 2.

Замечание (*о геометрическом смысле термина “сингулярное возмущение”*). Так как параметр μ считается достаточно малым, то левую часть уравнения (11) можно рассматривать как некоторое “малое” возмущение к вырожденной задаче $F(z,0) \equiv 2 - z = 0$, решение которой получить существенно проще, чем решение полной задачи (11). Возникает вопрос: будет ли это решение близко к точному решению (11)? Как установлено выше, при выполнении условий теоремы А.Н. Тихонова (и, в частности, для задачи (11)), искомая близость имеет место, если исключить некоторую окрестность начальной точки. Таким образом, отличие точного решения от решения вырожденного уравнения носит *сингулярный характер* и проявляется лишь в окрестности одной точки. В случае же регулярного возмущения, решения задач при $\mu = 0$ (невозмущенной) и при малых $\mu > 0$ (возмущенной) равномерно близки на сегменте, включающем начальную точку.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\mu \frac{dz}{dx} = z^2 - z \equiv F(z,\mu),$$
$$z(0,\mu) = h \neq 0.$$

Выясним, при каких начальных значениях $z(0,\mu) = h$ точное решение $z(x,\mu)$ близко к решению вырожденного уравнения $F(z,0) = 0$ при $x > 0$.

Соответствующее вырожденное уравнение $F(z,0) \equiv z^2 - z = 0$ имеет два изолированных корня:

устойчивый $\varphi_1(x) \equiv 0$, так как $\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi_1(x)\equiv 0} = \left.(2z-1)\right|_{z=0} = -1 < 0$,

и

неустойчивый $\varphi_2(x) \equiv 1$, так как $\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi_2(x)\equiv 1} = \left.(2z-1)\right|_{z=1} = 1 > 0$.

Заметим, что областью влияния устойчивого корня $\varphi_1(x) \equiv 0$ являются полуплоскость $z < 0$ и полоса $0 < z < 1$. Поэтому для начальных значений $h < 0$ и $0 < h < 1$ в соответствии с теоремой А.Н. Тихонова при каждом $0 < x \le H$ имеет место предельный переход $\lim\limits_{\mu \to +0} z(x,\mu) = \varphi_1(x) \equiv 0$. Если же $h > 1$ (начальное значение вне области влияния корня $\varphi_1(x) \equiv 0$), то условия теоремы нарушены, и предельный переход, вообще говоря, невозможен. Проиллюстрируем этот результат, выписав точное решение задачи Коши

$$z(x,\mu) = \frac{he^{-x/\mu}}{he^{-x/\mu} + 1 - h} .$$

Если $h < 0$ или $0 < h < 1$, то знаменатель дроби не обращается в нуль на полупрямой $x > 0$. Поэтому решение определено при всех $x > 0$, и $\lim\limits_{\mu \to +0} z(x,\mu) = 0$. В случае $z(0,\mu) = h > 1$ знаменатель дроби обращается в нуль при $x = x_0$, где x_0 – решение уравнения $e^{-x/\mu} = 1 - 1/h$ (оно разрешимо для всех $h > 1$, так как $0 < 1 - 1/h < 1$). Это означает, что решение исследуемой задачи Коши $z(x,\mu)$ существует лишь на интервале $0 < x < x_0$, а в точке $x = x_0$ разрушается, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} z(x,\mu) = +\infty$.

2⁰. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач. Метод пограничных функций

Детальное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки нашего курса. Его можно найти, например, в книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [4]. Здесь мы ограничимся лишь описанием основных идей на конкретном примере.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\mu \frac{dz}{dx} = 1 - z + \mu(z-1)^2 \equiv F(x,z,\mu) \qquad x > 0 \\ &z(0,\mu) = 2 + \mu \equiv h(x,\mu) \end{aligned} .$$

Точным решением ее является $z(x,\mu) = 1 + \dfrac{(\mu+1)e^{-x/\mu}}{1 + \mu(\mu+1)\left(e^{-x/\mu} - 1\right)}$.

Заметим, что имеет место предельный переход $\lim\limits_{\mu \to +0} z(x,\mu) = \varphi_0(x) \equiv 1$ при каждом фиксированном $x > 0$, где $\varphi_0(x) \equiv 1$ – устойчивый корень вырожденного уравнения $F(x,z,0) = 0$, что соответствует результату, сформулированному в теореме А.Н. Тихонова. Однако если $x > 0$ является асимптотически малым (т.е. $0 < x < x_0$, где $x_0 \sim \mu$), то величина $e^{-x/\mu}$ конечна, и отличие решения $z(x,\mu)$ от корня $\varphi_0(x) \equiv 1$ вырожденного уравнения не мало. Поэтому в областях $0 < x < x_0 \sim \mu$ и $x \gg x_0$ разложения в точного решения $z(x,\mu)$ в ряд по степеням малого параметра $\mu > 0$ будут различны.

Пусть $x > 0$ фиксировано и не является асимптотически малым (т.е. $x \gg x_0$). Тогда при $\mu \to +0$ имеет место $e^{-x/\mu} = o(\mu^n)$, где n – любое натуральное число, и для точного решения получаем "регулярное разложение" (регулярный ряд) $\overline{z}(x,\mu) = 1 + o(\mu^n)$, или с точностью до членов первого порядка $\overline{z}(x,\mu) = 1 + o(\mu)$.

Вблизи начальной точки, т.е. при $0 < x < x_0 \sim \mu$ величина $e^{-x/\mu} \sim 1$, поэтому разложение в ряд точного решения будет содержать кроме регулярной части еще "пограничные функции", зависящие от "быстрой" переменной $\rho = x/\mu$, которые убывают при $x \to +\infty$. Действительно, соответствующий ряд с точность до членов первого порядка по μ имеет вид:

$$z(x,\mu) = 1 + \frac{(\mu+1)e^{-x/\mu}}{1 + \mu(\mu+1)\left(e^{-x/\mu} - 1\right)} =$$

$$= 1 + o(\mu) + e^{-\rho} + \mu \cdot (2e^{-\rho} - e^{-2\rho}) + o(\mu) \equiv \overline{z}(x,\mu) + \Pi z(\rho,\mu).$$

Возникает вопрос: можно ли получить асимптотическое приближение решения (т.е. члены записанного выше ряда), не находя точного решения в явном виде, а решая, как и в случае регулярного возмущения, некоторую последовательность более простых задач? Оказывается, что при определенных условиях это возможно. Если представить решение в виде суммы двух рядов по степеням малого параметра – регулярного $\overline{z}(x,\mu)$ и пограничного $\Pi z(\rho,\mu)$ – то, подставив эти ряды в уравнение и начальное условие и приравняв коэффициенты при степенях параметра μ отдельно в регулярной части (зависящей от переменной x) и погранслойной части (зависящей от "быстрой" переменной $\rho = x/\mu$), получим последовательность задач для определения членов разложения. Указанный метод носит название метода пограничных функций А.Б. Васильевой и подробно описан в упомянутой выше книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [4].

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Получите три первых члена асимптотического приближения по параметру μ решения задачи Коши
$$\frac{dy}{dx} = 1 + \mu y; \qquad y(0,\mu) = -1 + 2\mu .$$
2. Проверьте выполнение условий теоремы А.Н. Тихонова о предельном переходе для задачи Коши $\mu z' = x - z; \quad z(0,\mu) = 1$.
3. Определите, какие из корней вырожденного уравнения сингулярно возмущенной задачи

   $\mu z' = z^3 - z; \quad z(0,\mu) = h$ являются устойчивыми в соответствии с теоремой А.Н. Тихонова о предельном переходе, и найдите их область влияния.
4. Используя теорему А.Н. Тихонова определите, будет ли выполняться предельный переход $\lim\limits_{\mu\to+0} z(x,\mu) = 1, \quad 0 < x \le H$ в задаче $\mu z' = z - z^3; \quad z(0,\mu) = h$, если:

   а) $h = 2$; б) $h = 0.3$; в) $h = -0.5$.
5. Используя теорему А.Н. Тихонова определите, будет ли выполняться предельный переход $\lim\limits_{\mu\to+0} z(x,\mu) = 0, \quad 0 < x \le H$ в задаче $\mu z' = z - z^3; \quad z(0,\mu) = h$, если:

   а) $h = 2$; б) $h = 0.3$; в) $h = -0.5$.

Глава 8. **УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Лекция 16

Общее ***уравнение в частных производных первого порядка*** имеет вид

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad F\left(\vec{x},z,\operatorname{grad} z\right)=0\,.$$

Проблема существования и единственности решения в общем случае окончательно не решена. Далее мы рассмотрим только линейные и квазилинейные уравнения 1-го порядка.

§ 1. Линейное однородное уравнение

Определение 1. ***Линейным однородным уравнением в частных производных*** первого порядка будем называть уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}=X_1\left(\vec{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\left(\vec{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+X_n\left(\vec{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \qquad (1)$$

или

$$\left(\vec{X}\left(\vec{x}\right),\operatorname{grad} z\left(\vec{x}\right)\right)=0\,,$$

где $\vec{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$, $\quad \vec{X}\left(\vec{x}\right)=\left(X_1\left(\vec{x}\right),X_2\left(\vec{x}\right),\cdots,X_n\left(\vec{x}\right)\right)$.

Определение 2. ***Решением*** (1) называется функция $z\left(\vec{x}\right)= z\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$, обладающая необходимыми частными производными и обращающая (1) в тождество, $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in D$.

Далее будем считать, что коэффициенты $X_i\left(x_1,\cdots,x_n\right)$, $\quad i=1,2,...,n$ в уравнении (1) удовлетворяют следующим *условиям*:

1) $X_i \in C^1(D)$;

2) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2\left(\vec{x}\right)\neq 0, \quad \forall \vec{x}\in D.$ (У1)

Определение 3. ***Характеристической системой***, соответствующей (1), называется система из n–1 уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})}=\frac{dx_2}{X_2(\vec{x})}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(\vec{x})} \qquad (2)$$

Определение 4. ***Характеристиками*** уравнения (1) называются решения системы (2).

Будем считать, что через каждую точку области D может проходить единственная характеристика – интегральная кривая системы (2), и характеристики можно задать в параметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})}=\frac{dx_2}{X_2(\vec{x})}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}=dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n=x_n(t) \end{cases} \qquad \text{(У2)}$$

Определение 5. ***Первым интегралом*** (2) называется функция $\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, принимающая постоянное значение, когда точка $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ пробегает интегральную кривую (2). Первым интегралом также называется само выражение $\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C$.

§ 2. Общее решение линейного уравнения в частных производных

Теорема 1. *Пусть* выполнены условия (У1) и (У2). *Тогда*

1) любое решение однородного уравнения (1) является первым интегралом системы (2);
2) любой первый интеграл (2) является решением (1).

Доказательство.

1) Пусть функция $z=\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ – решение уравнения (1), т.е.

$$X_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\equiv 0 \quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

В силу условия (У2)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\equiv 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Psi\left(x_1(t),x_2(t),\cdots x_n(t)\right)\equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Psi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=C$$

и $\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ есть первый интеграл системы (2).

2) Пусть $\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ – первый интеграл (2), т.е. при всех t выполнено тождество $\Psi\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)=C$. Дифференцируя его по t, получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad X_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\equiv 0 .$$

Указанное тождество выполняется вдоль характеристики. Так как в силу (У2) через каждую точку *D* проходит характеристика, то последнее равенство выполняется тождественно в *D*, т.е. функция $z=\Psi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ – решение уравнения (1). ■

Замечание. На каждой характеристике решение линейного уравнения (1) принимает постоянное значение.

Теорема 2. *Пусть* известны $n-1$ ***независимых*** первых интегралов системы (2)

$$\Psi_1(x_1,\cdots,x_n)=C_1 \ ,\ldots, \quad \Psi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)=C_{n-1} ,$$

причем $\dfrac{D\left(\Psi_1,\cdots,\Psi_{n-1}\right)}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}\neq 0, \qquad (x_1,\cdots,x_n)\in D .$

Тогда общим решением уравнения (1) является $z=\Phi\left(\Psi_1,\cdots,\Psi_{n-1}\right)$, где Φ – произвольная дифференцируемая функция $n-1$ аргументов. Другими словами, общее решение уравнения (1) есть дифференцируемая функция $n-1$ независимых первых интегралов системы (2).

Доказательство.

1) Докажем, что функция $z=\Psi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ удовлетворяет уравнению (1). Подставив ее в (1), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}}_{\equiv 0 \quad \forall \Psi_j \, (T.1)} .$$

Следовательно, $z = \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – решение (1).

2) Покажем, что любое решение уравнения (1) можно представить в виде $z = \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Подставим Ψ, Ψ_j, $j = 1, 2, ..., n-1$ в (1). Получим

$$\left.\begin{aligned} & X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0, \\ & X_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_n} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & X_1 \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\}$$

– однородная системы линейных алгебраических уравнений относительно функций $X_1, ..., X_n$.

Так как в силу условия (У1) в области D выполнено $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \neq 0$, то указанная однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, следовательно определитель $\Delta = \dfrac{D(\Psi, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \equiv 0$ в области D. Это означает, что функции $\Psi, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}$ зависимы, т.е. существует функция F такая, что $F(\Psi, \Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}) = 0$. Но по условию теоремы якобиан $\dfrac{D(\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1})}{D(x_1, \cdots, x_{n-1})} \neq 0$, поэтому в силу известных результатов математического анализа последнее уравнение можно разрешить относительно Ψ: $z = \Psi = \Phi(\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1})$, где Φ – некоторая дифференцируемая функция. Таким образом, функция $z = \Phi(\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1})$ является общим решением (1). ■

§ 3. Задача Коши

1⁰. Двумерный случай

Зададим некоторую кривую $x = x(s), \quad y = y(s)$ и поставим задачу построения решения уравнения (1) с дополнительным условием (задача Коши):

$$X_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + X_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$z\Big|_{\substack{x=x(s)\\ y=y(s)}} = \varphi(s).$$

Геометрически это означает, что нужно получить уравнение поверхности $z = z(x, y)$, удовлетворяющей (1) и проходящей через кривую $x = x(s), \quad y = y(s)$.

Найдем первый интеграл

$$\Psi_1(x,y) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \Psi_1\big(x(s), y(s)\big) = C_1.$$

Из полученного соотношения выразим параметр $s = w_1(c_1)$ и подставим в начальное условие:

$$z = \varphi\big[w_1(c_1)\big]\Big|_{c_1 = \Psi_1(x,y)}.$$

Если кривая, на которой задается начальная функция, гладкая и не совпадает с характеристикой, то каждая характеристика уравнения пересекают эту кривую лишь в одной точке. Так как характеристики заполняют всю рассматриваемую область, то задача Коши имеет единственное решение в этой области: вдоль каждой из характеристик переносится то значение $\varphi(s)$, которое задано на начальной кривой $x = x(s), \quad y = y(s)$ (вдоль характеристики решение принимает постоянное значение).

Если начальная кривая совпадает с характеристикой, то искомого решения может не существовать вовсе (если $\varphi(s) \neq \text{const}$), либо оно может быть не единственным (в случае $\varphi(s) = \text{const}$).

2⁰. Постановка задачи и схема решения в общем случае

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right)\frac{\partial z}{\partial x_i}=0 \quad \left(X_n\neq 0,\ \vec{x}\in \mathrm{D}\right),$$
$$z\Big|_{x_i=x_i\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ i=\overline{1,n}}=\varphi\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right).$$

Искомая функция задается на многообразии ко-размерности 1 (размерности $n-1$), т.е. на гиперповерхности.

Опишем алгоритм построения решения указанной задачи Коши.

1) Находим $n-1$ независимых первых интегралов (2):
$$\begin{cases}\Psi_1\left(x_1,\cdots,x_n\right)=C_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Psi_{n-1}\left(x_1,\cdots,x_n\right)=C_{n-1}\ .\end{cases}$$

2) Подставляем в полученные выражения уравнение многообразия $x_i=x_i\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\quad i=1,2,...,n$:
$$\begin{cases}\Psi_1\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\cdots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right)=C_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Psi_{n-1}\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\cdots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right)=C_{n-1}\ .\end{cases}$$

3) Исключаем $s_1,\cdots,s_{n-1}$, что возможно, т.к. якобиан отличен от нуля:
$$s_1=w_1\left(C_1,\cdots,C_{n-1}\right),\cdots,s_{n-1}=w_{n-1}\left(C_1,\cdots,C_{n-1}\right).$$

4) Ищем решение в виде функции, задающей начальное условие:
$$z=\varphi\left(w_1\left(C_1,\cdots,C_{n-1}\right),\cdots,w_{n-1}\left(C_1,\cdots,C_{n-1}\right)\right),$$
$$C_i=\Psi_i\left(x_1,\cdots,x_n\right),\qquad i=\overline{1,n-1}\ .$$

Полученная функция и есть решение рассматриваемой задачи Коши. Убедимся в этом.

Действительно,

1) это (в силу теоремы.2) – решение уравнения (1), т.к. частный случай $\quad z=\Phi\left(\Psi_1,\cdots,\Psi_{n-1}\right)$;

2) оно удовлетворяет начальному условию
$$z\Big|_{x_i=x_i\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ i=\overline{1,n}}=\varphi\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right).$$

Замечание. Если начальная кривая $z\big|_{x_i=x_i(s_1,\ldots,s_{n-1}),\ i=\overline{1,n}} = \varphi(s_1,\ldots,s_{n-1})$ является характеристикой, то решение задачи Коши либо не однозначно, либо не существует.

3⁰. Примеры

Пример 1. Рассмотрим линейное уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Найдем первый интеграл системы для характеристик

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \Rightarrow \quad ydy + xdx = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(x^2 + y^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_1(x,y) = x^2 + y^2 = C.$$

Таким образом, характеристиками являются окружности, и общее решение уравнения имеет вид

$$z = \Phi(C)\big|_{C=x^2+y^2} = \Phi\left(x^2 + y^2\right).$$

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad\qquad z\big|_{x=1,y=s} = \sqrt{1+s^2} = \varphi(s),$$

т.е. требуется найти интегральную поверхность, проходящую через кривую $z\big|_{x=1,y=s} = \sqrt{1+s^2} = \varphi(s)$ (ветвь гиперболы).

Подставим $x = 1$, $y = s$ в полученный в примере 1 интеграл $x^2 + y^2 = C$ и найдем

$$\Psi = x^2 + y^2\Big|_{x=1,y=s} = C \quad \Rightarrow \quad 1 + s^2 = C \quad \Rightarrow \quad s^2 = C - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{1 + C - 1} = \sqrt{C}\Big|_{C=x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, решение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ задачи Коши существует и единственно. С точки зрения геометрии полученное решение описывает часть конической поверхности.

§ 4. Квазилинейное уравнение

1⁰. Постановка задачи

Определение. Уравнение в частных производных первого порядка

$$X_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial z}{\partial x_n}=$$
$$=X\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right). \qquad (1)$$

называется ***квазилинейным***.

Будем искать решение $z=\Psi\left(x_1,...,x_n\right)$ уравнения (1) в неявном виде $V\left(x_1,...,x_n,z\right)=0$. Предположим, что последнее уравнение можно разрешить относительно z, т.е. существует функция $z=\Psi\left(x_1,...,x_n\right)$. Пусть, кроме того $\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=\Psi(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0$ в области D,

тогда существуют производные $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}=-\dfrac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial z}}$.

Подставляя в (1) и умножая на $\dfrac{\partial V}{\partial z}$, получим линейное однородное уравнение для функции $V\left(x_1,...,x_n,z\right)$:

$$X_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\cdots+X_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial V}{\partial x_n}+$$
$$+X\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,z\right)\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=\Psi(x_1,\cdots,x_n)}=0. \qquad (2)$$

2⁰. Алгоритм построения решения квазилинейного уравнения

1) Квазилинейному неоднородному уравнению (1) сопоставляем линейное однородное уравнение (2) относительно функции $V\left(x_1,x_2,...,x_n,z\right)$:

$$X_1\left(x_1,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\cdots+X_n\left(x_1,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\left(x_1,\cdots,x_n,z\right)\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Для полученного уравнения (2) записываем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X} \ . \qquad (3)$$

Ее решения – интегральные кривые в пространстве $\left(x_1, \cdots, x_n, z\right)$.

2) В соответствии с изложенным выше, ищем общее решение линейного однородного уравнения (2) как функцию от n первых интегралов системы (3)

$$\Psi_1(x_1, \cdots, x_n, z) = C_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi_n(x_1, \cdots, x_n, z) = C_n$$

в виде $V = \Phi\left(\Psi_1, \cdots, \Psi_n\right)$.

3) Формула $V = \Phi\left(\Psi_1(x_1, \cdots, x_n, z), \cdots, \Psi_n(x_1, \cdots, x_n, z)\right) = 0$ дает решение $z = \Psi\left(x_1, ..., x_n\right)$ поставленной задачи в неявной форме.

Замечание 1. Решения, удовлетворяющие лишь системе (2) называются ***специальными*** и могут не содержаться в полученной формуле.

Замечание 2. Схема решения задачи Коши аналогична схеме для линейной задачи.

Типовые вопросы и задачи к экзамену

1. Найдите общее решение уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
2. Найдите решение задачи Коши
$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ z\big|_{x=1, y=s} = \sqrt{1+s^2} = \varphi(s)$.
3. Найдите общее решение и решение задачи Коши $z_x + cz_y = 0$,
$z\,|_{y=0} = \varphi(x)$.
4. Найдите общее решение и решение задачи Коши
$yz_x - xz_y = 0$, $z\,|_{x=1} = y^2$.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. Учебник для вузов. – 5-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. –7-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. –5-е изд. – М.: Наука, 1984.

4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990.

5. *Волков В.Т., Ягола А.Г.* «Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (курс лекций).» – М.: КДУ, 2009.

Учебное издание

НЕФЕДОВ Николай Николаевич
ПОПОВ Виктор Юрьевич
ВОЛКОВ Владимир Тарасович

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Курс лнкций

Подписано в печать 16.03.2016 г.
Формат 60x90/16. Объем 12,5 п.л. Тираж 500 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в ППП Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6