0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 10

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА–КАПЕЛЛИ

ЗАДАЧА 1. В терминах рангов матриц изучить взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Решение. Пусть нам задана общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, в которой две прямые заданы две прямые своими общими уравнениями

$$l_1: \quad A_1x + B_1y = C_1, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y = C_2,$$

где $A_1^2 + B_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Итак, нам задана система уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2. \tag{0.1}$$

Рассмотрим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Случай 1. Прямые пересекаются. Это означает, что система двух уравнений (0.1) относительно двух неизвестных — координат общей точки $M(x, y)$ — имеет единственное решение. С точки зрения теоремы Кронекера–Капелли это означает, что

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\widetilde{A}) = 2. \tag{0.2}$$

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что система уравнений (0.1) не имеет решений вовсе. Следовательно,

$$\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(\widetilde{A}).$$

Поскольку по условию $A_1^2 + B_1^2 > 0$ и $A_2^2 + B_2^2 > 0$, то $\operatorname{rang}(A) = 1$. Поэтому $\operatorname{rang}(\widetilde{A}) = 2$.

Случай 3. Прямые совпадают. Это означает, что в уравнениях прямых

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

при некотором $\lambda \neq 0$. Это означает, что

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\widetilde{A}) = 1.$$

ЗАДАЧА 2. В терминах рангов матриц изучить взаимное расположение трёх прямых на плоскости.

Решение. Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$l_1: \quad A_1x + B_1y = C_1, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y = C_2,$$
$$l_3: \quad A_3x + B_3y = C_3.$$

Случай 1. Прямые пересекаются в единственной точке.

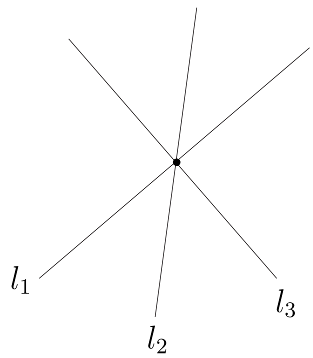

Рис. 1. Случай 1 решения задачи 2.

С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трёх пересекаются в единственной точке, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

И при этом, с другой стороны, система всех трех уравнений совместна, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

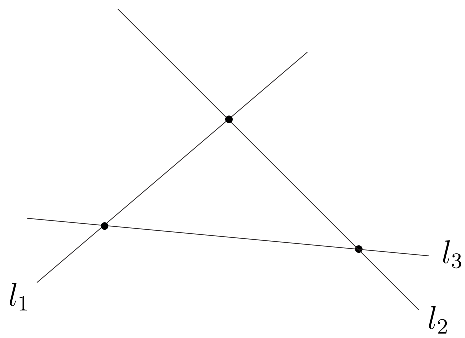

Рис. 2. Случай 2 решения задачи 2.

Случай 2. Прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, любые два уравнения из трёх имеют единственное решение, что означает равенство

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, все три уравнения не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \qquad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Две прямые из трёх параллельны, а оставшаяся прямая их пересекает.

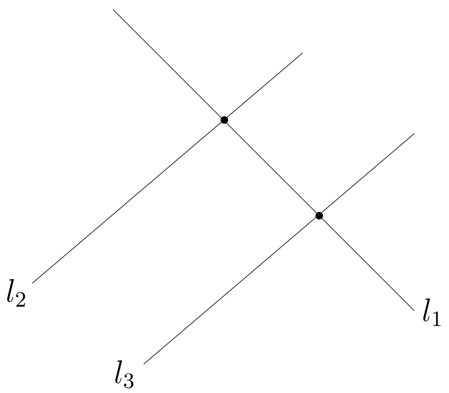

Рис. 3. Случай 3 решения задачи 2.

Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

решений не имеет. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает.

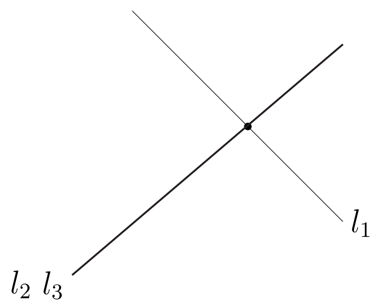

Рис. 4. Случай 4 решения задачи 2.

Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеет бесконечное число решений. Итак,

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5. Три прямые параллельны.

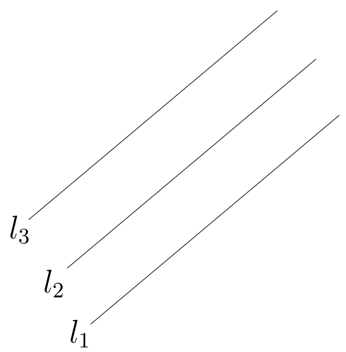

Рис. 5. Случай 5 решения задачи 2.

Это означает, что каждые два уравнения из трёх не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6. Две прямые из трёх совпадают, а третья им параллельна.

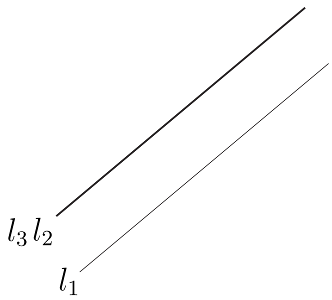

Рис. 6. Случай 6 решения задачи 2.

Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а первая прямая им параллельна. С одной стороны, система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая система уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

не имеют решений. Поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7. Все три прямые совпадают.

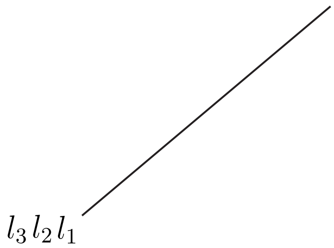

Рис. 7. Случай 7 решения задачи 2.

Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2 и совпадают прямые l_2 и l_3, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

ЗАДАЧА 3. В терминах рангов матриц рассмотреть все случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

Решение. Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, причём

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

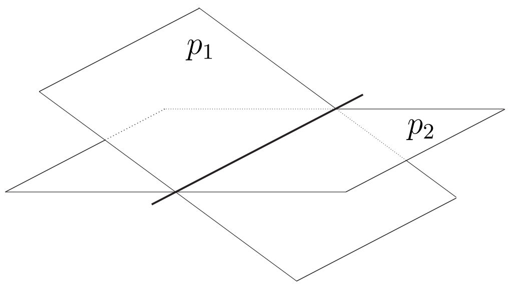

Рис. 8. Случай 1 решения задачи 3.

Случай 1. Плоскости пересекаются. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \tag{0.3}$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

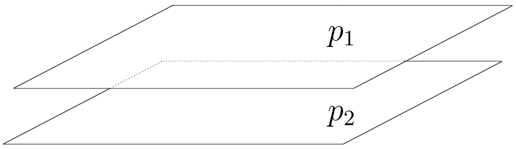

Рис. 9. Случай 2 решения задачи 3.

Случай 2. Плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (0.3) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

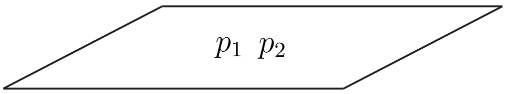

Рис. 10. Случай 3 решения задачи 3.

Случай 3. Плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (0.3) имеет решения, но это не случай 1, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

ЗАДАЧА 4. В терминах рангов матриц описать все случаи взаимного расположения трёх плоскостей в пространстве.

Решение. Пусть три плоскости заданы своими общими уравнениями

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2,$$
$$p_3: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

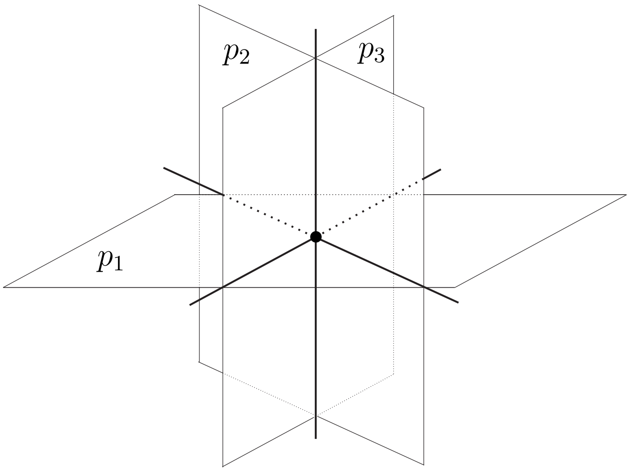

Рис. 11. Случай 1 решения задачи 4.

Случай 1. Три плоскости пересекаются в единственной точке. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{0.4}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{0.5}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{0.6}$$

имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 2. Плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек. Это означает, что любые два уравнения из трёх (0.4)–(0.6) имеют решения, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$

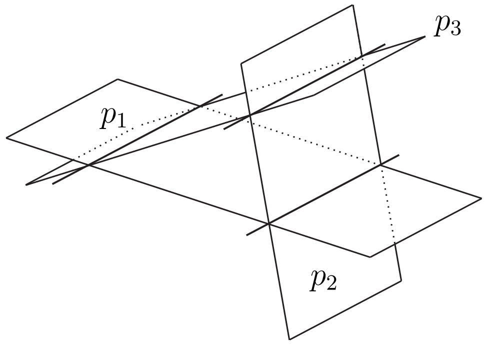

Рис. 12. Случай 2 решения задачи 4.

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система уравнений (0.4)–(0.6) трёх уравнений не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

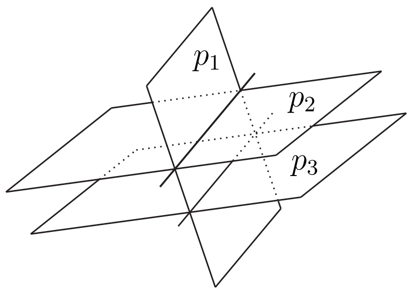

Рис. 13. Случай 3 решения задачи 4.

Случай 3. Две плоскости параллельны параллельны, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что плоскости p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеет решений, а системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают. Итак, с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

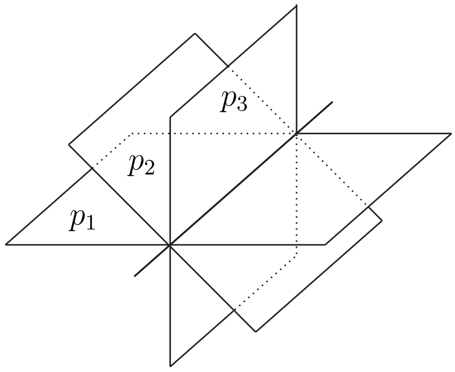

Рис. 14. Случай 4 решения задачи 4.

Случай 4. Три плоскости пересекаются по прямой. Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из трёх (0.4)–(0.6) имеют решение — прямую. Стало быть, с одной стороны, имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

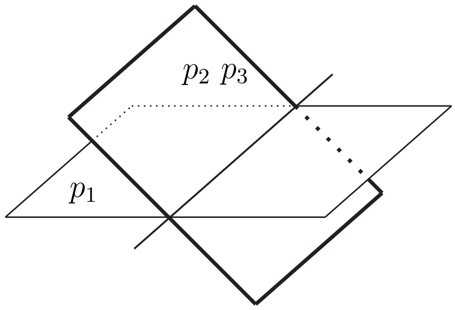

Рис. 15. Случай 5 решения задачи 4.

Случай 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что в системе уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

одно уравнение является следствием другого, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Тогда

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

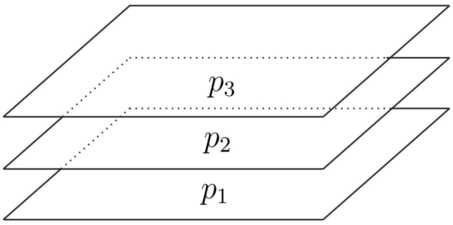

Рис. 16. Случай 6 решения задачи 4.

Случай 6. Три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из системы трёх уравнений (0.4)–(0.6) не имеют решений. Это означает, что

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

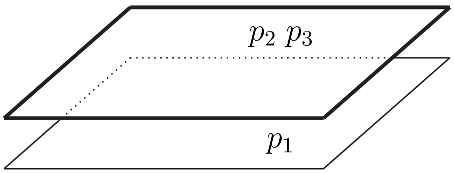

Рис. 17. Случай 7 решения задачи 4.

Случай 7. Две плоскости из трёх совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что в системе уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

одно уравнение является следствием другого, т. е., с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеют решение вовсе. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

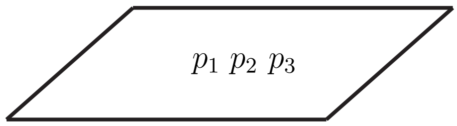

Рис. 18. Случай 8 решения задачи 4.

Случай 8. Три плоскости совпадают. Это означает, что каждое уравнение из трёх является следствием любого из оставшихся уравнений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

ЗАДАЧА 5. В терминах рангов матриц изучить вопрос о взаимном расположении двух прямых в пространстве.

Решение. Пусть прямые заданы своими векторными параметрическими уравнениями. Для удобства запишем эти уравнения в следующей форме:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}t, \quad l_2: \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau. \tag{0.7}$$

Приравняем эти уравнения и получим уравнение

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau. \tag{0.8}$$

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это общая декартова система координат. Пусть в этой системе координат

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда из (0.8) приходим к системе трёх уравнений относительно двух неизвестных t и τ :

$$a_x t + b_x \tau = c_x, \tag{0.9}$$

$$a_y t + b_y \tau = c_y, \tag{0.10}$$

$$a_z t + b_z \tau = c_z. \tag{0.11}$$

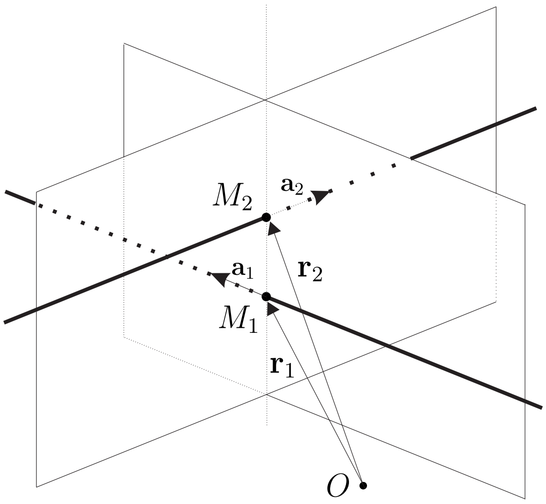

Рис. 19. Скрещивающиеся прямые.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (0.9)–(0.11) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (0.9)–(0.11) не имеет решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (0.9)–(0.11) имеет единственное решение, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Прямые совпадают. Это означает, что направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (0.9)–(0.11) имеет бесконечное множество решений, т. е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 1.$$