ГЛАВА 1

Билинейные и квадратичные формы

1. Матрица билинейной формы

1.1. Определение. Функция $B : x, y \to B(x, y) \in \mathbb{K}$ двух векторных аргументов $x, y \in \mathcal{L}$ называется билинейной формой на $\mathcal{L}$, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой от другого, т.е. если

$$B(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \alpha^1 B(x_1, y) + \alpha^2 B(x_2, y), \tag{1.1}$$

$$B(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \beta^1 B(x, y_1) + \beta^2 B(x, y_2) \tag{1.2}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$.

1.2. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$B(x, y) = B(x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x^i y^j = b_{ij} x^i y^j, \quad b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

1.3. Определение. Матрица $(b_{ij})_{n,n}$ называется матрицей билинейной формы.

1.4. Матричная запись билинейной формы. Рассмотрим отдельно выражение

$$b_{ij} x^i y^j. \tag{1.3}$$

Наша задача переписать это выражение в матричной форме. С этой целью введем следующие обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Vmatrix}, \quad B_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Матрица $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Поэтому $BY \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это столбец, причем

$$BY = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1Y \\ \vdots \\ B_nY \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Теперь заметим, что

$$b_{ij}y^j = B_iY \tag{1.5}$$

и из (1.3), (1.4) получаем равенство

$$b_{ij}x^iy^j = x^ib_{ij}y^j = x^iB_iY = x^1B_1Y + \dots + x^nB_nY =$$
$$= (x^1, \dots, x^n) \begin{pmatrix} B_1Y \\ \vdots \\ B_nY \end{pmatrix} = X^TBY, \quad X^T = (x^1, \dots, x^n), \tag{1.6}$$

где мы воспользовались нашим правилом умножения матриц «строчка на столбец». Таким образом, в координатах билинейная форма записывается следующим образом:

$$\boxed{B(x, y) = X^TBY.} \tag{1.7}$$

1.5. Закон преобразования матрицы билинейной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис и

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{1.8}$$

Тогда справедливы следующая цепочка равенств:

$$b_{i'j'} = B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = B(c^i_{i'}\mathbf{e}_i, c^j_{j'}\mathbf{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}b_{ij}. \tag{1.9}$$

Наша задача переписать полученный закон преобразования матрицы билинейной формы

$$\boxed{b_{i'j'} = c^i_{i'}c^j_{j'}b_{ij}} \tag{1.10}$$

в матричной форме. С одной стороны, заметим, что в силу нашего правила умножения «строчка на столбец»

$$c^j_{j'}b_{ij} = b_{ij}c^j_{j'} = \{BC\}_{ij'}, \quad B = (b_{ij})_{n,n}, \quad C = (c^j_{j'})^n_{n'}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, в элементе матрицы $(c^i_{i'})^n_{n'}$ нижний индекс i' нумерует столбец матрицы C и нумерует строчку матрицы C^T, а матрицу $\{BC\}_{ij'}$, в которой j' нумерует столбец, можно умножить слева только на строчку согласно нашему правилу «строчка на столбец» и поэтому справедливо равенство

$$c^i_{i'}\{BC\}_{ij'} = \{C^TBC\}_{i'j'}. \tag{1.12}$$

Из равенств (1.10)–(1.12) получаем равенство

$$\{B'\}_{i'j'} = \{C^TBC\}_{i'j'} \Leftrightarrow \boxed{B' = C^TBC,} \quad B' = (b_{i'j'})_{n',n'}. \tag{1.13}$$

Предложим другой способ вывода матричного равенства (1.13). С этой целью воспользуемся матричным равенством (1.7). Кроме того, пусть

$$x = x^j\mathbf{e}_j = \mathbf{E}X_e = x^{j'}\mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}'X_{e'}, \tag{1.14}$$

$$y = y^j\mathbf{e}_j = \mathbf{E}Y_e = y^{j'}\mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}'Y_{e'}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$. Тогда, как мы установили ранее, имеют место следующие равенства:

$$X_e = CX_{e'}, \quad Y_e = CY_{e'}. \tag{1.16}$$

Справедливы следующие равенства:

$$X_e^TB_eY_e = B(x,y) = X_{e'}^TB_{e'}Y_{e'}, \tag{1.17}$$

где B_e и $B_{e'}$ — матрицы билинейной формы в старом и новом базисах, из которых с учетом (1.16) получаем следующие равенства:

$$X_{e'}^TB_{e'}Y_{e'} = X_e^TB_eY_e = X_{e'}^TC^TB_eCY_{e'} \Leftrightarrow X_{e'}^T(B_{e'} - C^TB_eC)Y_{e'} = 0. \tag{1.18}$$

Последнее равенство выполнено для любых столбцов $X_{e'}$ и $Y_{e'}$, поскольку равенства (1.17) справедливо для любых $x, y \in \mathcal{L}$, а значит в силу формул (1.14) и (1.15) для любых столбцов $X_e, Y_e, X_{e'}, Y_{e'}$. Поэтому из (1.18) с учетом ниже доказанной леммы 1.6 вытекает искомое равенство:

$$\boxed{B_{e'} = C^TB_eC.}$$

1.6. Лемма. Если $X^TAY = 0$ для любых $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и некотором $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, то $A = O$.

Доказательство. Пусть $Y_k \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец, у которого все ячейки заполнены нулями за исключением k–ой строчки, где расположена 1. Кроме того, пусть $X^j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец заполненный нулями за исключением j–ой строчки, где расположена 1. Справедливы следующие равенства:

$$AY_k = \|A_1, \ldots, A_n\|Y_k = A_k, \quad 0 = (X^j)^TAY_k = (X^j)^TA_k = a^j_k$$

для всех $j, k \in \overline{1,n}$. □

2. Линейное пространство билинейных форм

1.7. Определение. Суммой билинейных форм $B_1(x,y)$ и $B_2(x,y)$ называется форма

$$(B_1 + B_2)(x,y) \overset{def:}{=} B_1(x,y) + B_2(x,y),$$

а произведением билинейной формы $B(x,y)$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется следующая форма:

$$(\alpha B)(x,y) \overset{def:}{=} \alpha B(x,y).$$

1.8. Определение. Две билинейные формы $B_1(x,y)$ и $B_2(x,y)$ равны, если $B_1(x,y) = B_2(x,y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

1.9. Лемма. Сумма билинейных форм и умножение билинейной формы на число — билинейные формы.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}(B_1+B_2)(\alpha^1 x_1+\alpha^2 x_2, y) &= B_1(\alpha^1 x_1+\alpha^2 x_2, y)+B_2(\alpha^1 x_1+\alpha^2 x_2, y) = \\ &= \alpha^1 B_1(x_1,y) + \alpha^2 B_1(x_2,y) + \alpha^1 B_2(x_1,y) + \alpha^2 B_2(x_2,y) = \\ &= \alpha^1 (B_1(x_1,y) + B_2(x_1,y)) + \alpha^2 (B_1(x_2,y) + B_2(x_2,y)) = \\ &= \alpha^1 (B_1 + B_2)(x_1,y) + \alpha^2 (B_1 + B_2)(x_2,y).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$\begin{aligned}(B_1 + B_2)(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) &= \\ &= \beta^1 (B_1 + B_2)(x, y_1) + \beta^2 (B_1 + B_2)(x, y_2).\end{aligned}$$

Итак, сумма билинейных форм — билинейная форма.

Шаг 2. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}(\alpha B)(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) &= \alpha B(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \\ &= \alpha\alpha^1 B(x_1,y) + \alpha\alpha^2 B(x_2,y) = \alpha^1 (\alpha B)(x_1,y) + \alpha^2 (\alpha B)(x_2,y).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(\alpha B)(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \beta^1 (\alpha B)(x, y_1) + \beta^2 (\alpha B)(x, y_2).$$

Следовательно, произведение билинейной формы на число — билинейная форма. □

1.10. Теорема. *Множество* $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ *всех билинейных форм на линейном пространстве* $\mathcal{L}$ *образует линейное пространство относительно операций сложения билинейных форм и умножения билинейной формы на число.*

Доказательство. Доказательство всех 8 аксиом линейного пространства проводится на основе того, что числовое поле $\mathbb{K}$ является линейным пространством относительно операций сложения чисел и умножения чисел. $\square$

1.11. Тензорное произведение линейных форм. Рассмотрим отображение $\xi \otimes \eta$ при $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$, которое действует следующим образом на упорядоченных парах (x, y), $x, y \in \mathcal{L}$ следующим образом:

$$(\xi \otimes \eta)(x, y) \overset{def:}{=} \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle, \tag{1.19}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Заметим, что выражение $\langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle$ является билинейной формой на $\mathcal{L}$ при фиксированных $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \rangle \langle \eta, y \rangle = (\alpha^1 \langle \xi, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle \xi, x_2 \rangle) \langle \eta, y \rangle = \\ = \alpha^1 \langle \xi, x_1 \rangle \langle \eta, y \rangle + \alpha^2 \langle \xi, x_2 \rangle \langle \eta, y \rangle\end{aligned}$$

и аналогичным образом получаем равенство

$$\langle \xi, x \rangle \langle \eta, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2 \rangle = \beta^1 \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y_1 \rangle + \beta^2 \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y_2 \rangle.$$

1.12. Определение. Выражение $\xi \otimes \eta$ называется тензорным произведением линейных форм ξ и η из $\mathcal{L}^*$.

1.13. Определение. Говорят, что $\xi^1 \otimes \eta^1 = \xi^2 \otimes \eta^2$, если для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) = (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y). \tag{1.20}$$

1.14. Определение. Суммой двух тензорных произведений $\xi^1 \otimes \eta^1$ и $\xi^2 \otimes \eta^2$ соответствующих линейных форм определяется следующим образом:

$$(\xi^1 \otimes \eta^1 + \xi^2 \otimes \eta^2)(x, y) \overset{def:}{=} (\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) + (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. Произведением тензорного произведения $\xi \otimes \eta$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ определяется следующим образом:

$$(\alpha \xi \otimes \eta)(x, y) \overset{def:}{=} \alpha (\xi \otimes \eta)(x, y).$$

1.15. Лемма. Тензорное произведение линейных форм из $\mathcal{L}^*$ обладает следующими свойствами линейности по каждому множителю:

$$(\alpha_1\xi^1 + \alpha_2\xi^2) \otimes \eta = \alpha_1\xi^1 \otimes \eta + \alpha_2\xi^2 \otimes \eta, \tag{1.21}$$

$$\xi \otimes (\beta_1\eta^1 + \beta_2\eta^2) = \beta^1\xi \otimes \eta^1 + \beta_2\xi \otimes \eta^2. \tag{1.22}$$

Доказательство. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$((\alpha_1\xi^1 + \alpha_2\xi^2) \otimes \eta)(x, y) = \alpha_1\langle\xi^1, x\rangle\langle\eta, y\rangle + \alpha_2\langle\xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle =$$
$$= (\alpha^1\xi^1 \otimes \eta)(x, y) + (\alpha^2\xi^2 \otimes \eta)(x, y) = (\alpha^1\xi^1 \otimes \eta + \alpha^2\xi^2 \otimes \eta)(x, y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. Отсюда вытекает равенство (1.21). Аналогичным образом доказывается равенство (1.22). □

1.16. Базис в линейном пространстве билинейных форм. Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим n^2 различных тензорных произведений из набора линейных форм $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$:

$$\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.23}$$

По определению 1.12 тензорного произведения линейных форм получаем, что $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ является билинейной формой. Действительно,

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y) = \langle\mathbf{e}^i, x\rangle\langle\mathbf{e}^j, y\rangle = x^i y^j,$$

где $x = x^i\mathbf{e}_i$, $y = y^j\mathbf{e}_j$. Несложно доказать равенства

$$(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)^i = \alpha^1 x_1^i + \alpha^2 x_2^i,$$

$$(\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2)^j = \beta^1 y_1^j + \beta^2 y_2^j,$$

из которых и вытекает линейность выражения $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y)$ по каждому аргументу при фиксированном другом.

1.17. Теорема. *Набор из n^2 билинейных форм $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ при $i, j = \overline{1, n}$ образуют базис в линейном пространстве $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ всех билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Полнота. Пусть $B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$. Тогда для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$B(x, y) = b_{ij}x^i y^j = b_{ij}\langle\mathbf{e}^i, x\rangle\langle\mathbf{e}^j, y\rangle = (b_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y). \tag{1.24}$$

Согласно определению 1.8 равенства билинейных форм получаем, что

$$B = b_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Линейная независимость. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = O, \tag{1.25}$$

где $O \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ — нулевая билинейная форма. Применим обе части равенства (1.25) к упорядоченной паре $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1})$ при $i_1, j_1 = \overline{1,n}$. В результате получим цепочку равенств

$$0 = (\alpha_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1}) = \alpha_{ij}\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_{i_1}\rangle\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_{j_1}\rangle = \\ = \alpha_{ij}\delta^i_{i_1}\delta^j_{j_1} = \alpha_{i_1 j_1} \quad \text{для всех} \quad i_1, j_1 = \overline{1,n}. \tag{1.26}$$

Значит, равенство (1.25) возможно тогда и только тогда, когда все $\alpha_{ij} = 0$. Линейная независимость набора $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ доказана.

Следовательно, набор $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ — базис в $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ □

1.18. Инварианты билинейных форм. Пусть B_e — матрица билинейной формы в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $B_{e'}$ — матрица билинейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, причем

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)C.$$

Тогда справедливы равенства

$$B_{e'} = C^T B_e C \Leftrightarrow B_e = (C^T)^{-1} B_{e'} C^{-1} = (C^{-1})^T B_{e'} C^{-1}. \tag{1.27}$$

1.19. Лемма. Ранг матрицы B_e и знак определителя матрицы B_e являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Поскольку $\det C \neq 0$, то из равенств (1.27) получаем

$$\operatorname{rk} B_{e'} \leqslant \operatorname{rk} B_e, \quad \operatorname{rk} B_e \leqslant \operatorname{rk} B_{e'} \Rightarrow \operatorname{rk} B_{e'} = \operatorname{rk} B_e.$$

Кроме того, имеем

$$\det B_{e'} = \det C^T \det B_e \det C = (\det C)^2 \det B_e.$$

□

1.20. Симметричные и кососимметричные билинейные формы.

1.21. Определение. Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$, и называется кососимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$, для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

1.22. Теорема. *Любую билинейную форму можно единственным образом представить в виде суммы симметричной билинейной формы и кососимметричной билинейной формы.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(B(x,y) + B(y,x)) + \frac{1}{2}(B(x,y) - B(y,x)) := \\ := B_S(x,y) + B_A(x,y).$$

Докажем теперь единственность разложения. Действительно, пусть имеют место два разложения

$$B_{S1}(x,y) + B_{A1}(x,y) = B(x,y) = B_{S2}(x,y) + B_{A2}(x,y) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_{S1}(x,y) - B_{S2}(x,y) = B_{A2}(x,y) - B_{A1}(x,y). \quad (1.28)$$

В левой части равенства (1.28) расположена симметричная билинейная форма,а в левой части кососимметричная билинейная форма. Докажем, что равенство

$$B_S(x,y) = B_A(x,y) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \mathcal{L} \quad (1.29)$$

возможно тогда и только тогда, когда $B_S(x,y) = B_A(x,y) = 0$. Действительно, с одной стороны, поскольку равенство (1.29) выполнено для всех $x,y \in \mathcal{L}$, то имеем

$$B_S(x,y) = B_A(x,y) \quad \text{и} \quad B_S(y,x) = B_A(y,x) \quad (1.30)$$

С другой стороны, переставляя местами аргументы в равенстве (1.29), получим равенство

$$B_S(y,x) = -B_A(y,x) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \mathcal{L}. \quad (1.31)$$

Следовательно, из (1.30) и (1.31) вытекает, что

$$B_S(x,y) = B_A(x,y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x,y \in \mathcal{L}.$$

Отсюда и из (1.28) получаем равенства

$$B_{S1}(x,y) = B_{S2}(x,y) \quad \text{и} \quad B_{A2}(x,y) = B_{A1}(x,y)$$

для всех $x,y \in \mathcal{L}$. □

3. Квадратичные формы

1.23. Определение. Форма $Q : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ называется квадратичной, если существует такая билинейная форма $B(x,y)$ на $\mathcal{L}$, что $Q(x) = B(x,x)$.

1.24. Матрица квадратичной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть B_e — матрица билинейной формы $B(x,y)$ в этом базисе. Тогда, как мы доказали ранее, билинейная формы примет следующий вид:

$$B(x,y) = X_e^T B_e Y_e \Rightarrow Q(x) = X_e^T B_e X_e = b_{ik} x^i x^k, \quad (1.32)$$

где $x = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e$ и $y = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)Y_e$. Заметим, что в силу теоремы 1.22 билинейная форма $B(x, y)$ единственным образом представима в виде

$$B(x,y) = B_S(x,y) + B_A(x,y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

В частности, справедливо аналогичное утверждение для квадратных матриц

$$B_e = B_{eS} + B_{eA}.$$

Поэтому справедливы равенства

$$Q(x) = X_e^T B_e X_e = X_e^T (B_{eS} + B_{eA}) X_e = \\ = X_e^T B_{eS} X_e + X_e^T B_{eA} X_e, \quad (1.33)$$

$$X_e^T B_{eA} X_e = (X_e^T B_{eA} X_e)^T = X_e^T B_{eA}^T X_e = -X_e^T B_{eA} X_e \Rightarrow \\ \Rightarrow 2X_e^T B_{eA} X_e = 0 \Rightarrow X_e^T B_{eA} X_e = 0, \quad (1.34)$$

поскольку $X_e^T B_{eA} X_e$ — число. Таким образом,

$$Q(x) = X_e^T B_e X_e = X_e^T B_{eS} X_e. \quad (1.35)$$

1.25. Канонический вид квадратичной формы. Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ имеет вид $Q(x) = X^T Q_e X = q_{jk} x^j x^k$.

1.26. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ называется каноническим для квадратичной формы $Q(x)$, если в этом базисе матрица $Q_{e'}$ этой квадратичной формы имеет диагональный вид, на диагонали которой расположены числа 1, 0, -1.

1.27. Матрица $Q_{e'}$ в каноническом базисе имеет следующий вид:

$$q_{jk} = \lambda_k \delta_{jk}, \quad \lambda_k \in \{1, 0, -1\}.$$

Тогда справедливы равенства

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k = \lambda_k \delta_{jk} x^j x^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x^k)^2.$$

1.28. Лемма. Если квадратичная форма $Q(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x, y)$, то билинейная форма имеет следующий вид:

$$B(x,y) = \frac{1}{2} \left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right]. \quad (1.36)$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x+y) = B(x+y, x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) =$$
$$= Q(x) + 2B(x,y) + Q(y) \Rightarrow B(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right].$$

□

1.29. Пример. Пусть $\mathbb{C}[0,1]$ — линейное пространство вещественных непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$Q(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}[0,1].$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[(x(t)+y(t))^2 - x^2(t) - y^2(t)\right]\,dt =$$
$$= \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt := B(x,y).$$

Очевидно, что $B(x,y)$ — билинейная форма.

4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

1.30. Определение. Рангом квадратичной формы $Q = X_e^T Q_e X_e$, записанной в произвольном базисе, называется ранг ее матрицы Q_e в этом базисе.

1.31. Поскольку матрицы $Q_{e'}$ и Q_e в двух различных базисах связаны равенством $Q_{e'} = C^T Q_e C$, $\det C \neq 0$, то $\operatorname{rk} Q_{e'} = \operatorname{rk} Q_e$. Поэтому определение 1.30 корректно и матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в каноническом базисе в случае когда $\operatorname{rk} Q_e = n = \dim \mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & \text{O} \\ & q_{2'2'} & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & q_{n'n'} \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1,-1\}, \quad j' = \overline{1,n},$$

а в случае, когда $\operatorname{rk} Q_e = r' \in [1,n)$ матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в каноническом базисе имеет следующие вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & q_{r'r'} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1,-1\}, \quad j' = \overline{1,r'}.$$

1.32. Теорема. *Любую квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольную квадратичную форму можно записать в следующем виде:

$$Q(x) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \cdots + 2q_{1n}x^1x^n + G(x^2,\ldots,x^n). \quad (1.37)$$

Доказательство теоремы проведем по индукции. Квадратичная форма от одного аргумента всегда имеет канонический вид $q_{11}(x^1)^2$. Предположим, что любую квадратичную форму от $n-1$ аргумента всегда можно привести к каноническому виду. Рассмотрим произвольную квадратичную форму от n аргументов

$$Q(x) = q_{ij}x^ix^j, \quad i,j = \overline{1,n}. \quad (1.38)$$

Случай 1. Предположим, что в квадратичной форме $Q(x)$ хотя бы один из коэффициентов q_{jj} при квадрате $(x^j)^2$ отличен от нуля. Без ограничения общности, можно считать, что $q_{11} \neq 0$. Составим следующее преобразование переменных:

$$y^1 = q_{11}x^1 + \cdots + q_{1n}x^n, \quad (1.39)$$

$$y^2 = x^2, \ldots, y^n = x^n. \quad (1.40)$$

Преобразование (1.39), (1.40) можно записать в следующей матричной форме:

$$Y = \widetilde{C}_1 X, \quad (1.41)$$

$$\widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Заметим, что $\det \widetilde{C} = q_{11} \neq 0$, т.е. преобразование (1.41) не вырожденное. Возведем выражение (1.39) для y^1 в квадрат и разделим на $q_{11} \neq 0$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 = \frac{1}{q_{11}}(q_{11}x^1 + \cdots + q_{1n}x^n)^2 = \\ = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \cdots + 2q_{1n}x^1x^n + \Phi(x^2, \ldots, x^n), \tag{1.43}$$

где $\Phi(x^2, \ldots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма относительно $n-1$ аргумента $x^2, \ldots, x^n$. Определим новую квадратичную форму относительно аргументов $x^2, \ldots, x^n$:

$$\Psi(x^2, \ldots, x^n) \stackrel{def:}{=} G(x^2, \ldots, x^n) - \Phi(x^2, \ldots, x^n). \tag{1.44}$$

Из равенств (1.37) и (1.43) с учетом (1.44), (1.40) приходим к выражению

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(x^2, \ldots, x^n) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(y^2, \ldots, y^n). \tag{1.45}$$

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование

$$\begin{pmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_2 \begin{pmatrix} y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad \det \widetilde{C}_2 \neq 0, \quad \widetilde{C}_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{1.46}$$

которое приводит квадратичную форму $\Psi(y^2, \ldots, y^n)$ к каноническому виду

$$\Psi(y^2, \ldots, y^n) = \lambda_2(z^2)^2 + \cdots + \lambda_n(z^n)^2. \tag{1.47}$$

Дополним преобразование (1.46) так чтобы в нем участвовали все n переменных. Именно, положим

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

В частности, при этом преобразовании $z^1 = y^1$. Рассмотрим последовательно преобразования (1.41) и (1.48) и получим итоговое преобразование

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \widetilde{C}_1 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

причем $\det C_2 = \det \widetilde{C}_2 \det \widetilde{C}_1 \neq 0$ и в результате преобразования (1.49) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(z^1)^2 + \lambda_2 (z^2)^2 + \cdots + \lambda_n (z^n)^2. \tag{1.50}$$

Случай 2. Рассмотрим теперь случай, когда у квадратичной формы $Q(x)$ все диагональные коэффициенты $q_{jj} = 0$, $j = \overline{1,n}$, но какой–то вне диагональный элемент отличен от нуля. Например, $q_{12} \neq 0$. Тогда квадратичная форма $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = 2q_{12}x^1x^2 + \cdots . \tag{1.51}$$

Сделаем преобразование

$$x^1 = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2, \tag{1.52}$$

$$x^2 = \widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2, \tag{1.53}$$

$$x^3 = \widetilde{x}^3, \ldots, x^n = \widetilde{x}^n, \tag{1.54}$$

которое можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_3 \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

причем $\det \widetilde{C}_3 = -2$, т.е. преобразование $\widetilde{C}_3$ не вырожденное. Подставим равенства (1.52)–(1.54) в выражение (1.51) и получим равенство

$$Q(x) = 2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2 - 2q_{12}(\widetilde{x}^2)^2 + \cdots . \tag{1.56}$$

Слагаемое $2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2$ не может исчезнуть при приведении подобных слагаемых, так как все слагаемые квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (1.51), не содержат произведение x^1x^2 и поэтому не могут в результате преобразования (1.52)–(1.54) дать величину $(\widetilde{x}^1)^2$. Далее нужно воспользоваться рассуждениями, рассмотренные в случае 1.

В заключение, в выражении (1.50) нужно сделать завершающее невырожденное преобразование

$$w^1 = \frac{z^1}{|q_{11}|^{1/2}},$$

$$w^j = \begin{cases} |\lambda_j|^{1/2} z_j, & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0; \\ z_j, & \text{если} \quad \text{если} \quad \lambda_j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}$$

и в результате получить следующее каноническое уравнение квадратичной формы

$$Q(x) = \widetilde{\lambda}_1 (w^1)^2 + \widetilde{\lambda}_2 (w^2)^2 + \cdots + \widetilde{\lambda}_n (w^n)^2, \tag{1.57}$$

где $\widetilde{\lambda}_1 = \operatorname{sign}(q_{11})$,

$$\widetilde{\lambda}_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda_j = 0; \\ \operatorname{sign}(\lambda_j), & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0, \end{cases} \quad j = \overline{2, n}.$$

Таким образом, невырожденным линейным преобразованием мы привели квадратичную форму к каноническому виду (1.57). □

1.33. Нормальный вид квадратичной формы. Пусть $r = \operatorname{rk} Q$ — ранг квадратичной формы. Тогда нормальным видом квадратичной формы $Q(x)$ называется следующая квадратичная форма:

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2.$$

Используя метод Лагранжа, а также переобозначение переменных, любую квадратичную форму невырожденным линейным преобразованием можно привести к нормальному виду.

5. Закон инерции квадратичных форм

1.34. Пусть на вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана квадратичная форма ранга r :

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k,$$

где $\{x^s\}$ — координаты вектора $x \in \mathcal{L}$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ — некоторый новый базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2. \tag{1.58}$$

1.35. Определение. Число положительных и число отрицательных членов в формуле (1.58) называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы.

1.36. Теорема. Закон инерции квадратичных форм. *Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Предположим, что помимо вида (1.58) существует такой базис $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$, в котором квадратичная форма имеет следующий вид:

$$Q(x) = (z^1)^2 + \cdots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \cdots - (z^r)^2, \tag{1.59}$$

где $\{z^s\}$ — координаты вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$. Нужно доказать, что $k = m$. Предположим, что $k \neq m$, например, $k > m$. Пусть координаты $Z^T = (z^1, \ldots, z^n)$ вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ связаны с координатами $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ вектора x в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ следующим образом:

$$Z = DY, \quad Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{1.60}$$

или

$$z^i = D^i_j y^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.61}$$

Отметим, что $\det D \neq 0$, поскольку справедливы следующие равенства:

$$\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}} D \Rightarrow \det D \neq 0.$$

Подставив выражения (1.61) в (1.59) мы должны получить выражение (1.58). Стало быть, имеет место следующее тождество:

$$(z^1)^2 + \cdots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \cdots - (z^r)^2 \equiv \\ \equiv (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2 \tag{1.62}$$

которое справедливо для любых $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ и всех $Z^T = (z^1, \ldots, z^n)$, которые связаны с $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ равенством (1.61).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

$$D^1_1 y^1 + \cdots + D^1_k y^k = 0, \tag{1.63}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^m_1 y^1 + \cdots + D^m_k y^k = 0. \tag{1.64}$$

Поскольку число переменных k больше числа уравнений в системе (1.63)—(1.64), то у этой системы уравнений существует нетривиальное решение

$$y^1 = y^1_0, \ldots, y^k = y^k_0.$$

Пусть
$$y_0^{k+1} = \dots = y_0^r = y_0^{r+1} = \dots = y_0^n = 0.$$
Таким образом, получим столбец
$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.65}$$
Но тогда из (1.63) получаем равенства
$$z_0^1 = D_1^1 y_0^1 + \dots + D_k^1 y_0^k + D_{k+1}^1 0 + \dots + D_n^1 0 = 0, \tag{1.66}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_0^m = D_1^m y_0^1 + \dots + D_k^m y_0^k + D_{k+1}^m 0 + \dots + D_n^m 0 = 0. \tag{1.67}$$
Таким образом, из (1.60) имеем
$$Z_0 = DY_0, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_0^{m+1} \\ \vdots \\ z_0^n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$
Подставляя столбцы Y_0 и Z_0 в равенство (1.62) получим равенство
$$-(z_0^{m+1})^2 - \dots - (z_0^r)^2 = (y_0^1)^2 + \dots + (y_0^k)^2 > 0, \tag{1.69}$$
поскольку по построению числа $y_0^1, \dots, y_0^k$ одновременно в нуль не обращаются. При этом левая часть равенства неположительна. Пришли к противоречию. Значит, $k > m$. В точности точно также рассматривается случай $m > k$ с заменой $Y \leftrightarrow Z$. В результате снова придем к противоречию. Следовательно, $k = m$. □

6. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

1.37. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно определенной, если $Q(x) > 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

1.38. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется отрицательно определенной, если $Q(x) < 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

1.39. Примеры. Квадратичная форма $Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$ на двумерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ положительно определена, а квадратичная форма $Q(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$ является отрицательно определенной. А форма $Q(x) = (x^1)^2$ на двумерном линейном пространстве не является положительно определенной, поскольку $Q(x) = 0$ для всех $x = 0\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — базис в $\mathcal{L}$.

1.40. Теорема. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства n: $r = p = n$.*

Доказательство. Достаточность. Если $p = r = n$, то в каноническом базисе квадратичная форма имеет следующий нормальный вид:

$$Q(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, эта квадратичная форма обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$x^1 = \cdots = x^n = 0 \Leftrightarrow x = x^i\mathbf{e}_i = \theta.$$

Необходимость. Пусть или $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма принимает следующий вид:

$$Q(x) = Q'(x^1, \ldots, x^{n-1}) + \lambda_n(x^n)^2, \quad \lambda_n \leqslant 0.$$

При этом

$$Q(\mathbf{e}_n) = Q'(0, ..., 0) + \lambda_n = \lambda_n \leqslant 0.$$

Следовательно, $Q(x)$ не является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому если $Q(x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то $p = r = n$. $\square$

1.41. Определение. Главным минором порядка $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и $n - k$ столбцов.

1.42. Определение. Матрица $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется положительно определенной, если соответствующая квадратичная форма

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{n} q_{ij}x^ix^j$$

является положительно определенной.

1.43. Теорема. Критерий Сильвестра. *Матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Доказательство проведем по индукции.

Предположение индукции. Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k\times k}$ положительно определенная, тогда все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции. Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ положительно определенная. Докажем, что все ее главные миноры положительны. Рассмотрим соответствующую положительно определенную квадратичную форму

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{k+1} q_{ij}x^i x^j = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij}x^i x^j + \\ + \sum_{i=1}^{k+1} q_{i,k+1}x^i x^{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} q_{k+1,j}x^{k+1}x^j.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij}x^i x^j$$

и $Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = 0$ тогда и только тогда когда, $x^1 = \cdots = x^k = 0$. Следовательно, по предположению индукции все главные миноры матрицы Q до порядка k включительно положительны. Сделаем переход к каноническому базису, в котором квадратичная форма примет нормальный вид с матрицей $Q' = C^T QC$. Поскольку матрица Q положительно определенная, то матрица Q' имеет следующий вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q' = 1.$$

Тогда имеем

$$1 = \det Q' = (\det C)^2 \det Q \Rightarrow \det Q > 0.$$

Необходимость условий доказана.

Достаточность. Проведем доказательство по индукции.

Предположение индукции. Все главные миноры матрицы $Q \in \mathbb{R}^{k\times k}$ положительны. Тогда матрица Q положительно определенная.

Шаг индукции. Рассмотрим следующую квадратичную форму, у которой все главные миноры положительны:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j. \tag{1.70}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$. По предположению индукции квадратичная форма (1.70) положительно определенная для всех $x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ поэтому в силу результата теоремы 1.40 ее положительный индекс инерции не меньше k. Если индекс инерции равен k, то матрица Q' в каноническом базисе имеет следующий вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q' = -1 < 0.$$

Но тогда, поскольку $Q' = C^T Q C$, то

$$0 > \det Q' = (\det C)^2 \det Q \Rightarrow \det Q < 0.$$

Пришли к противоречию. Значит, положительный индекс инерции равен $k+1$ и в силу теоремы 1.40 матрица Q является положительно определенной.

□