

Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. Схема переменных направлений для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

Как уже было показано на примере одномерных по пространственной переменной задач, явные схемы, в которых оператор, содержащий производные по x , аппроксимируется на слое, где решение уже известно, просты в применении, но являются условно устойчивыми. Для их устойчивости требуется достаточно маленький шаг по времени. Неявные схемы, в которых оператор дифференцирования по пространственной переменной аппроксимируется на новом слое по времени, как правило безусловно устойчивы, но приводят к необходимости решать систему уравнений относительно значений искомой сеточной функции на новом временном слое.

Применение неявных схем для многомерных задач затруднено тем, что получающаяся при этом система для значений искомой функции на новом временном слое может быть достаточно сложной и требовать для своего решения большого числа действий. Поэтому при численном решении многомерных задач часто используют так называемые *экономичные* разностные схемы.

Экономичными разностными схемами называют схемы, сочетающие в себе лучшие качества явной и неявной схем. Они являются безусловно устойчивыми, как неявная схема, и требуют при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций Q , пропорционального числу узлов сетки, так что $Q = O(1/h^p)$, где $h = \min_{1 \leq i \leq p} h_i$, p — размерность области, h_i — шаг сетки по направлению i . Основная идея большинства экономичных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом для каждой из промежуточных задач строится безусловно устойчивая схема, требующая для своего решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки на каждом временном слое.

1 Метод переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

Идею сведения перехода со слоя на слой к двум вспомогательным задачам выражает, например, предложенная в 1955 году Писменом и Рекфордом, а также Дугласом, схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) для двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольной области. Рассмотрим идею этой схемы на примере задачи с граничными условиями Дирихле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y, t), \quad x \in (0, l_x), \quad y \in (0, l_y), \quad t \in (0, T], \\ u|_{x=0} = \mu_1(y, t), \quad u|_{x=l_x} = \mu_2(y, t), \\ u|_{y=0} = \mu_3(x, t), \quad u|_{y=l_y} = \mu_4(x, t). \\ u|_{t=0} = u_0(x, y). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_n = nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad Nh_x = l_x, \quad y_m = mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = l_y,$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = T.$$

Заменяем операторы $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ их разностными аналогами:

$$\Lambda_1 u = u_{\bar{x}x} = \frac{u_{n-1,m} - 2u_{n,m} + u_{n+1,m}}{h_x^2},$$

$$\Lambda_2 u = u_{\bar{y}y} = \frac{u_{n,m-1} - 2u_{n,m} + u_{n,m+1}}{h_y^2},$$

где использованы обозначения $u_{n,m} = u(x_n, y_m, t)$. Будем осуществлять переход со слоя j на слой $j+1$ в два этапа. Введем вспомогательный промежуточный слой, который условно обозначим $j + \frac{1}{2}$. Пусть значения на слое j уже известны (на самом первом шаге значения $u_{n,m}^0 = u(x_n, y_m, t_0)$ известны из начального условия). Перейдем на вспомогательный слой $j + \frac{1}{2}$, используя неявную схему по переменной x и явную по переменной y , то есть заменяя

выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ его разностным аналогом, взятым на новом слое $j + \frac{1}{2}$, а выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — разностным аналогом, взятым на слое j . При этом функцию $f(x, y, t)$ в правой

части уравнения аппроксимируем на полуцелом слое. В результате придем к разностному уравнению

$$\frac{w^{j+\frac{1}{2}} - w^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 w^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x_n < l_x, \quad 0 < y_m < l_y. \quad (1.2)$$

Переход со слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой $j + 1$ осуществим по явной схеме по направлению x и неявной по направлению y , по-прежнему аппроксимируя функцию $f(x, y, t)$ на промежуточном полуцелом слое:

$$\frac{w^{j+1} - w^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 w^{j+1} + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < x_n < l_x, \quad 0 < y_m < l_y. \quad (1.3)$$

Вычитая из уравнения (1.2) уравнение (1.3), получим равенство, связывающее значения вспомогательной функции $w^{j+\frac{1}{2}}$ со значениями искомой сеточной функции w на слоях j и $j + 1$:

$$w^{j+\frac{1}{2}} = \frac{w^j + w^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (w^{j+1} - w^j), \quad (1.4)$$

которое должно выполняться на всех узлах сетки вплоть до граничных. Это равенство позволяет получить граничные условия для $w^{j+\frac{1}{2}}$ при $x_0 = 0$ и $x_N = l_x$:

$$\begin{aligned} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{w_{0,m}^j + w_{0,m}^{j+1}}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (w_{0,m}^{j+1} - w_{0,m}^j) = \\ &= \frac{\mu_1(y_m, t_j) + \mu_1(y_m, t_{j+1})}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu_1(y_m, t_{j+1}) - \mu_1(y_m, t_j)) = \bar{\mu}_{1,m}^{j+\frac{1}{2}}, \\ w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\mu_2(y_m, t_j) + \mu_2(y_m, t_{j+1})}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu_2(y_m, t_{j+1}) - \mu_2(y_m, t_j)) = \bar{\mu}_{2,m}^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что если функция μ_1 не зависит от t , то $\bar{\mu}_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_1(y_m)$. Аналогичное утверждение справедливо для функции μ_2 .

На каждом целом слое j по времени граничные условия задачи (1.1) аппроксимируются точно:

$$w_{0,m}^j = \mu_1(y_m, t_j), \quad w_{N,m}^j = \mu_2(y_m, t_j), \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$w_{n,0}^j = \mu_3(x_n, t_j), \quad w_{n,M}^j = \mu_4(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Добавляя к системе (1.2) граничные условия для функции $w^{j+\frac{1}{2}}$ при $n = 0$ и $n = N$, при каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M - 1$ получаем систему для $N + 1$ неизвестного:

$$w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}}, \quad w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}}, \quad \dots, \quad w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}},$$

которая решается методом прогонки. Для этого при каждом t требуется совершить $O(N+1)$ действий. Когда значения на промежуточном слое найдены, добавляя к системе (1.3) граничные условия для функции w^{j+1} при $t = 0$ и $t = M$, при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N-1$ получаем систему для $M+1$ неизвестного:

$$w_{n,0}^{j+1}, w_{n,1}^{j+1}, \dots, w_{n,M}^{j+1},$$

которая также решается прогонкой. Для этого при каждом фиксированном n требуется совершить $O(M+1)$ действий. Завершается переход на новый слой нахождением $w_{0,m}^{j+1}$ и $w_{N,m}^{j+1}$ для всех t из граничных условий. Таким образом, для перехода со слоя j на слой $j+1$ всего необходимо затратить $O((N+1)(M+1))$ действий.

Подставляя выражение (1.4) в уравнение (1.2), получим равенство

$$\frac{w^{j+1} - w^j}{\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_2(w^{j+1} - w^j) = \frac{1}{2}\Lambda_1(w^{j+1} + w^j) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(w^{j+1} - w^j) + \Lambda_2w^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

которое можно переписать в виде:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)w_t = \Lambda w^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

где E — единичный оператор, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ — разностная аппроксимация оператора Лапласа, $w_t = \frac{w^{j+1} - w^j}{\tau}$. Итак, сеточная функция w является решением разностного уравнения

$$Bw_t = \Lambda w^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad (1.5)$$

где $B = B_1B_2$, $B_i = E - 0.5\tau\Lambda_i$, $i = 1, 2$. Разностные схемы вида (1.5), в которых оператор B представляет собой произведение нескольких операторов, называются факторизованными схемами.

Исследуем схему переменных направлений на устойчивость по начальным данным методом гармоник. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.5) на сетке

$$x_n = nh_x, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad y_m = mh_y, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть $\delta w_{n,m}^j$ — ошибка, возникающая на слое j за счет погрешности начальных условий. Она удовлетворяет однородному уравнению

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)\delta w_t = \Lambda\delta w^j. \quad (1.6)$$

Раскладывая погрешность $\delta w_{n,m}^j$ в ряд по гармоникам $e^{i(qx_n + py_m)}$, получаем:

$$\delta w_{n,m}^j = \sum_q \sum_p C_{q,p}^j e^{i(qx_n + py_m)} = \sum_q \sum_p C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)},$$

где $\alpha_q = h_x q$, $\beta_p = h_y p$. В силу линейности уравнения (1.6) его можно рассматривать для каждой гармоники $\delta w_{n,m;p,q}^j = C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$ отдельно. При этом

$$\delta w_{n,m;p,q}^{j+1} = \lambda_{q,p} \cdot \delta w_{n,m;p,q}^j = \lambda_{q,p} C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)},$$

где $\lambda_{q,p}$ — множители роста. Так как

$$\frac{\delta w_{n,m;p,q}^{j+1} - \delta w_{n,m;p,q}^j}{\tau} = \frac{\lambda_{q,p} - 1}{\tau} C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)},$$

$$\Lambda_1 \delta w_{n,m;p,q}^j = C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h_x^2} = -C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2},$$

$$\Lambda_2 \delta w_{n,m;p,q}^j = -C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)} \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2},$$

то, подставляя гармонику $\delta w_{n,m;p,q}^j$ в уравнение (1.6) и сокращая на $C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$, получаем следующее уравнение для множителей роста:

$$\frac{\lambda_{q,p} - 1}{\tau} \left(1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right) \left(1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2} \right) = -4 \left(\frac{1}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \frac{1}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2} \right),$$

из которого находим

$$\lambda_{q,p} = \frac{\left(1 - \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right) \left(1 - \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2} \right)}{\left(1 + \frac{2\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right) \left(1 + \frac{2\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta_p}{2} \right)}.$$

Так как для любого вещественного γ и любого положительного η справедливы неравенства

$$-1 \leq \frac{1 - \eta \sin^2 \gamma}{1 + \eta \sin^2 \gamma} \leq 1,$$

для множителей роста имеет место оценка $|\lambda_{q,p}| \leq 1$ при всех p, q . Следовательно, для схемы переменных направлений выполнено спектральное условие устойчивости при любом соотношении шагов τ, h_x и h_y .

Найдем порядок погрешности аппроксимации схемы переменных направлений. Пусть u — точное решение задачи (1.1), w — решение задачи (1.2)-(1.3). Рассмотрим сеточную функцию $z = w - u$. В начальный момент времени и на границе области погрешность z равна нулю, так как начальные и граничные условия аппроксимируются точно. Во внутренних узлах она удовлетворяет разностному уравнению:

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)z_t = \Lambda z^j + \psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}},$$

где ψ — погрешность аппроксимации, которая имеет вид:

$$\psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = \Lambda u^j - (E - 0.5\tau\Lambda_1)(E - 0.5\tau\Lambda_2)u_t + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = 0.5\Lambda(u^j + u^{j+1}) - u_t - \underbrace{\frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 u_t}_{O(\tau^2)} + f_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Если функция $u(x, u, t)$ является достаточно гладкой и существует число $M > 0$, такое что:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \leq M$$

в расчетной области, то

$$0.5(u^j + u^{j+1}) = u^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad 0.5\Lambda(u^j + u^{j+1}) = \Lambda u^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) = \Delta u^{j+\frac{1}{2}} + O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2),$$

$$u_t = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_{j+\frac{1}{2}}} + O(\tau^2),$$

а выражение $\Lambda_1\Lambda_2 u_t$ ограничено. Следовательно,

$$\psi_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} = \underbrace{\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + f \right)}_{=0} \Big|_{(x_n, y_m, t_{j+\frac{1}{2}})} + O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2) = O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2).$$

Таким образом, схема переменных направлений имеет погрешность аппроксимации $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$, а значит, в силу линейности и безусловной устойчивости, она сходится и имеет второй порядок точности по координатам и времени. Так как для ее реализации требуется число действий, пропорциональное числу узлов сетки, схема является экономичной.

2 Пример реализации схемы переменных направлений

Используем схему переменных направлений для численного решения следующей начально-краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\Delta u + e^t \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = y, \quad u|_{x=1} = y + 1, \\ u|_{y=0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=2} = x, \\ u|_{t=0} = xy + 1. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Аналитическое решение этой задачи имеет вид:

$$u = xy + 1 + \frac{e^t - e^{-\frac{5\pi^2}{4}t}}{1 + 5\pi^2/4} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right).$$

Введем в расчетной области равномерную сетку, используя фиктивные узлы в окрестности границ, на которых заданы условия Неймана:

$$x_n = -\frac{h_x}{2} + nh_x, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad -\frac{h_x}{2} + Nh_x = 1 \rightarrow h_x = \frac{1}{N - 1/2},$$

$$y_m = mh_y, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad Mh_y = 2 + \frac{h_y}{2} \rightarrow h_y = \frac{2}{M - 1/2},$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau = \frac{T}{J}.$$

Начальное условие задачи (2.1) аппроксимируется точно:

$$w_{n,m}^0 = x_n y_m + 1, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Граничные условия задачи (2.1) на каждом временном слое j аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{w_{1,m}^j - w_{0,m}^j}{h_x} = y_m, \quad w_{N,m}^j = y_m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$w_{n,0}^j = 1, \quad \frac{w_{n,M}^j - w_{n,M-1}^j}{h_y} = x_n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

При этом условия Дирихле аппроксимируются точно, а условия Неймана за счет выбора сетки аппроксимируются со вторым порядком погрешности аппроксимации, так как соответствующие разностные первые производные оказываются центральными относительно точек $x = 0$ и $y = 2$.

После того как начальные условия заданы, будем осуществлять переход со слоя j на слой $j + 1$ через вспомогательный слой $j + \frac{1}{2}$ в соответствии со схемой переменных направлений. Заметим, что в рассматриваемой задаче функции в правых частях граничных условий не зависят от времени, поэтому на промежуточных слоях их не требуется преобразовывать.

Рассмотрим переход со слоя j на слой $j + \frac{1}{2}$. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - w_{n,m}^j}{0.5\tau} = \frac{4}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{4}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j \right) + \\ \quad + e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ \frac{w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} - w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}}}{h_x} = y_m, \quad w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = y_m + 1, \quad m = 1, \dots, M-1. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

При каждом фиксированном $m = 1, 2, \dots, M-1$ систему (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} = w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} - h_x y_m, \\ \frac{2\tau}{h_x^2} w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{4\tau}{h_x^2} + 1 \right) w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = - \left(w_{n,m}^j + \frac{2\tau}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j \right) + \right. \\ \quad \left. + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right) \right), \quad n = 1, \dots, N-1, \\ w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = y_m + 1, \end{array} \right.$$

или, что то же самое:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{0,m}^{j+\frac{1}{2}} = w_{1,m}^{j+\frac{1}{2}} + \nu_1^x, \\ A^x w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} - C^x w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + B^x w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} = -F_n^x, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ w_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} = \nu_2^x, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где

$$A^x = B^x = \frac{2\tau}{h_x^2}, \quad C^x = \frac{4\tau}{h_x^2} + 1, \quad \nu_1^x = -h_x y_m, \quad \nu_2^x = y_m + 1, \\ F_n^x = w_{n,m}^j + \frac{2\tau}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^j - 2w_{n,m}^j + w_{n,m-1}^j \right) + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right).$$

Система (2.3) имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки.

Таким образом, для того чтобы найти функцию $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ на вспомогательном полуцелом слое, необходимо при каждом фиксированном $m = 1, \dots, M-1$ решить свою систему (2.3). При этом мы получим значения $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$ и $m = 1, 2, \dots, M-1$. Вычислять значения функции $w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}$ при $m = 0$ и $m = M$ нет необходимости, так как они при переходе с вспомогательного слоя $j + \frac{1}{2}$ на слой $j + 1$ не используются.

Рассмотрим теперь переход со слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой $j + 1$. Будем осуществлять этот переход по явной схеме по направлению x и по неявной по направлению y . В результате придем к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{n,m}^{j+1} - w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \frac{4}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{4}{h_y^2} \left(w_{n,m+1}^{j+1} - 2w_{n,m}^{j+1} + w_{n,m-1}^{j+1} \right) + \\ \quad + e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ w_{n,0}^{j+1} = 1, \quad \frac{w_{n,M}^{j+1} - w_{n,M-1}^{j+1}}{h_y} = x_n. \quad n = 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

При каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots, N-1$ систему (2.4) можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = 1, \\ \frac{2\tau}{h_y^2} w_{n,m-1}^{j+1} - \left(\frac{4\tau}{h_y^2} + 1 \right) w_{n,m}^{j+1} + \frac{2\tau}{h_y^2} w_{n,m+1}^{j+1} = - \left(w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \right. \\ \quad \left. + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right) \right), \quad m = 1, \dots, M-1, \\ w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + x_n h_y, \end{array} \right.$$

или, что то же самое, в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{n,0}^{j+1} = \nu_1^y, \\ A^y w_{n,m-1}^{j+1} - C^y w_{n,m}^{j+1} + B^y w_{n,m+1}^{j+1} = -F_m^y, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ w_{n,M}^{j+1} = w_{n,M-1}^{j+1} + \nu_2^y, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

где

$$A^y = B^y = \frac{2\tau}{h_y^2}, \quad C^y = \frac{4\tau}{h_y^2} + 1, \quad \nu_1^y = 1, \quad \nu_2^y = x_n h_y, \\ F_m^y = w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau}{h_x^2} \left(w_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + w_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\tau}{2} e^{t_j+0.5\tau} \cos\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y_m}{4}\right).$$

Система (2.5) имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки. Итак, для того чтобы перейти с вспомогательного слоя $j + \frac{1}{2}$ на новый целый слой

$j + 1$ необходимо для каждого фиксированного $n = 1, 2, \dots, N - 1$ решить свою систему (2.5). В результате мы получим значения $w_{n,m}^{j+1}$ при всех $n = 1, 2, \dots, N - 1$ и $m = 0, 1, \dots, M$. Для того чтобы завершить переход на слой $j + 1$, необходимо найти значения функции $w_{n,m}^{j+1}$ при $n = 0$ и $n = N$. Для этого воспользуемся граничными условиями:

$$w_{0,m}^{j+1} = w_{1,m}^{j+1} - h_x y_m, \quad w_{N,m}^{j+1} = y_m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Аналитическое решение задачи (2.1) и ее численное решение при $N = 100$, $M = 200$, $\tau = 0.01$ с помощью схемы переменных направлений для нескольких моментов времени представлены на рис. 1 - 3.

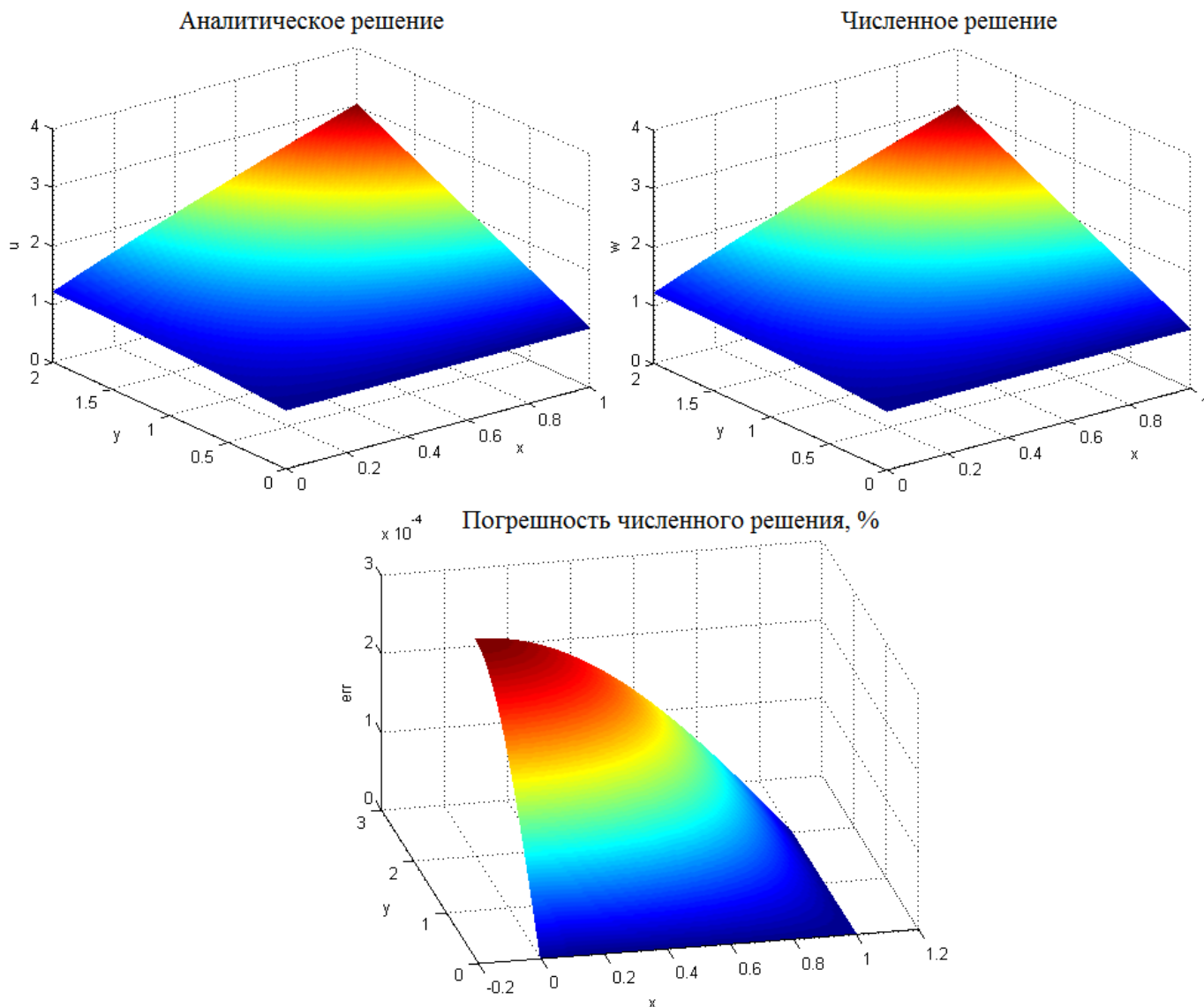


Рис. 1: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{100} = 1$

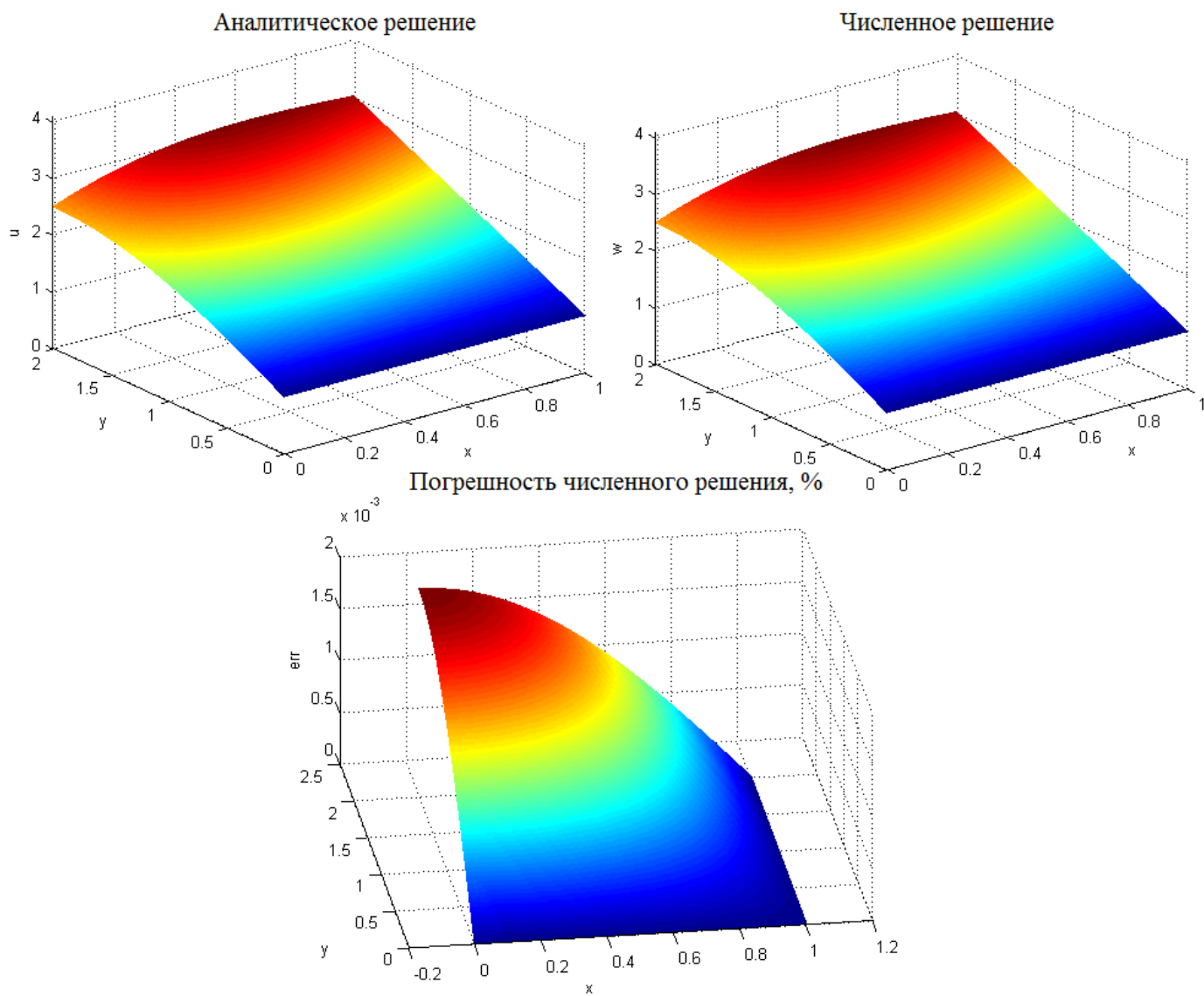


Рис. 2: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{300} = 3$

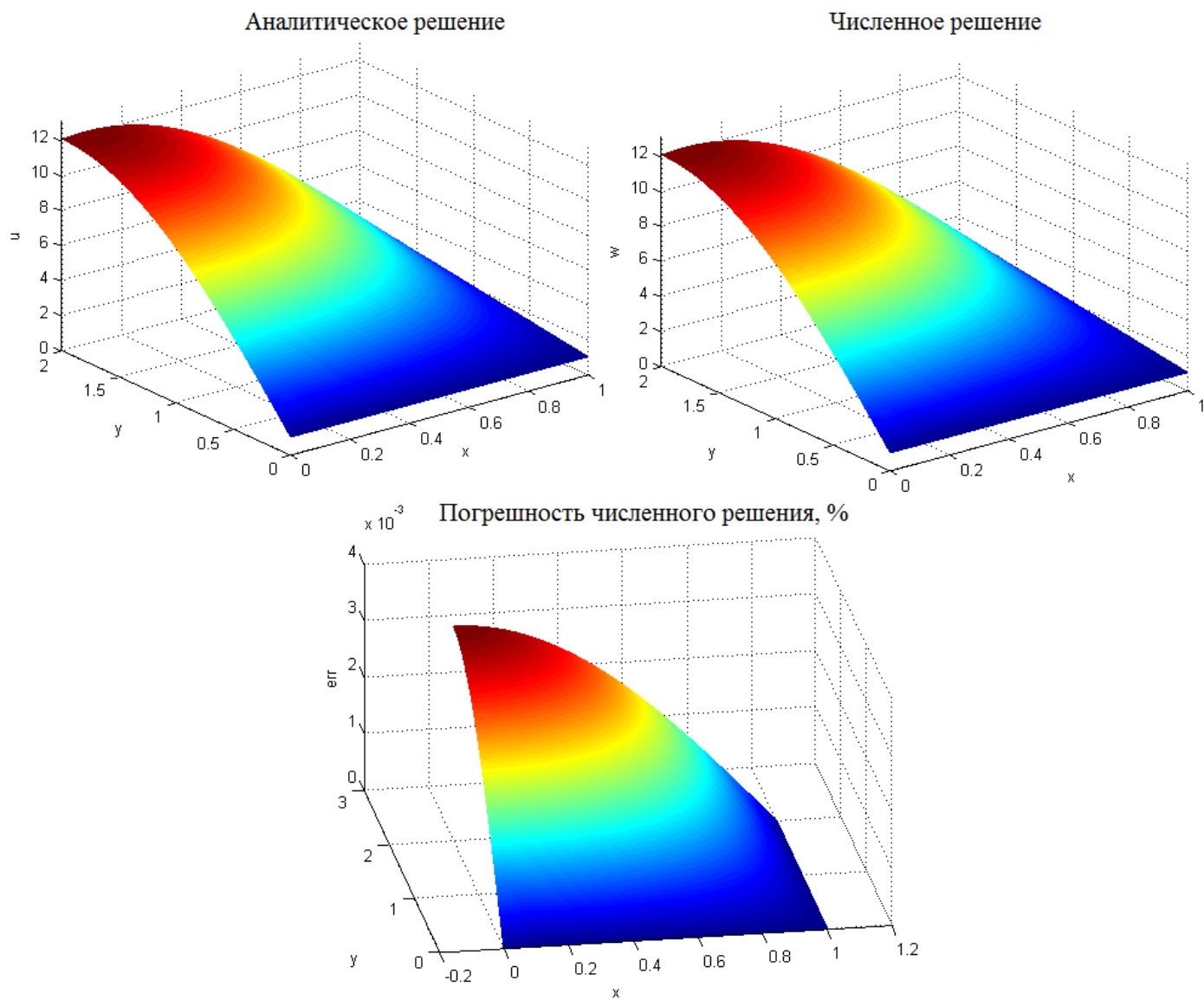


Рис. 3: Аналитическое и численное решение задачи (2.1) в момент времени $t_{500} = 5$