Лекция 10

СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 0. План лекции

1. Условия на коэффициенты и решение.
2. Слабый принцип максимума.
3. Формулировка сильного принципа максимума.
4. Условие касания некоторого шара $O(x^{'}, r^{'})$ границы ∂D_1.
5. Точка x^* — середина отрезка $[x^{''}, x^{'}]$, $\rho_0 = |x^* - x^{''}|$.
6. Шар $O(x^*, \rho_0)$ и шар $O(x^{''}, \rho_0/2)$.
7. Функция

$$v(x) = e^{-\gamma\rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)}, \quad r(x) = |x - x^*|.$$

8. Вычисление $Lv(x)$.
9. Случаи $x \in O(x^{''}, \rho_0/2)$ при условии $r(x) \geqslant \rho_0$ и при условии $r(x) < \rho_0$.
10. $Lv(x) < 0$ в шаре $O(x^{''}, \rho_0)$ при фиксированном $\rho_0 > 0$ и достаточно большом $\gamma > 0$.
11. Новая функция $\varphi(x) = u(x) + \lambda v(x)$.
12. Доказать, что $\varphi(x) > u(x_0)$ при $x \in \partial O(x^{''}, \rho_0/2)$.
13. Противоречие с тем, что

$$L\varphi(x) < 0 \quad \text{в} \quad O(x^{''}, \rho_0/2), \quad c(x) \leqslant 0,$$

при этом

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(x^{''}, \rho_0/2),$$

а $\varphi(x^{''}) = u(x_0) < 0$.

§ 1. Сильный принцип максимума

Утверждение теоремы о слабом принципе максимума (теорема 3 лекции 9) допускает важное усиление, называемое *принципом Хопфа* или *сильным принципом максимума*.

Теорема 1. *Пусть $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, и $c(x)$ ограничены в области D, оператор L является равномерно эллиптическим, $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнен один из наборов условий*

1. *всюду в области D выполнены неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) \leqslant 0$;*
2. *всюду в области D выполнены неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) \geqslant 0$.*

Тогда в случае условий 1 либо ни в какой точке $x_0 \in D$ не может достигаться отрицательный глобальный минимум либо функция $u(x)$ постоянная в D

$$u(x) = u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

В случае выполнения условий 2 либо ни в какой точке $x_0 \in D$ не может достигаться положительный глобальный максимум либо функция $u(x)$ постоянна в D

$$u(x) = u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Доказательство. Доказательство проведем только для случая отрицательного глобального минимума.

Пусть $x_0 \in D$ — это точка глобального отрицательного минимума регулярного решения $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ уравнения

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = F(x) \quad (1.1)$$

Введем множество

$$\overline{D}_1 = \left\{x \in \overline{D}: \ u(x) = u(x_0)\right\}, \quad \overline{D}_1 = D_1 \cup \partial D_1 \ ^{1)},$$

Символом $\overline{D}$ мы обозначили замыкание области D. Докажем, что $\overline{D}_1 = = \overline{D}$. Пусть нет и $\overline{D}_1 \neq \overline{D}$. Тогда

$$\overline{D}_1 \subset \overline{D} \Rightarrow D_1 \subset D.$$

Шаг 1. Множество $\overline{D}$ является по определению замкнутым. Докажем, что множество $\overline{D}_1$ замкнуто.

$\square$ Действительно, пусть $\{x_n\} \subset \overline{D}$ и

$$|x_n - x| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow x \in \overline{D}, \quad |u(x_n) - u(x)| \to +0$$

и, следовательно,

$$u(x_n) = u(x_0) \Rightarrow u(x) = u(x_0), \quad x \in \overline{D} \Rightarrow x \in \overline{D}_1.$$

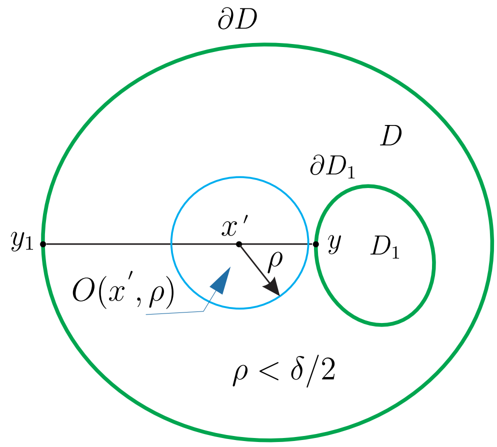
[1]) Символом D_1 мы обозначили внутренность множества $\overline{D}_1$.

Таким образом, множество $\overline{D}_1$ замкнуто. ⊠

Шаг 2. Поскольку множества $\overline{D}$ и $\overline{D}_1$ замкнуты и не совпадают, то

$$\exists\, y \in \partial D_1 \cap D, \quad \inf_{x \in \partial D} |x - y| = \delta > 0.$$

Пусть точка $x^{'} \in D \backslash \overline{D}_1$ такова, что $|x^{'} - y| < \delta/2$. Тогда $\overline{O}(x^{'}, \rho) \subset D$



y_1 — точка из ∂D такая, что $|y_1 - y| = \inf\limits_{x \in \partial D} |x - y| = \delta$,

Рис. 1. Точки y и $x^{'}$.

при $\rho < \delta/2$. Определим число $r^{'} > 0$ таким образом, чтобы

$$r^{'} = \sup_{\overline{O}(x^{'}, \rho) \subset D \backslash \overline{D}_1} \{\rho\}.$$

Тогда

$$\exists\, x^{''} \in \overline{O}(x^{'}, r^{'}) \cap \partial D_1.$$

Шаг 3. Пусть x^* — середина прямолинейного отрезка соединяющего точки $x^{'}$ и $x^{''}$ и

$$\rho_0 = |x^* - x^{''}|, \quad r(x) = |x - x^*|, \quad x \in D. \tag{1.2}$$

Прежде всего заметим, что поскольку $x^{''} \in \partial D_1 \subset \overline{D}_1$ и $\overline{D}_1$ замкнуто, то

$$u(x^{''}) = u(x_0) \quad \text{и} \quad u(x) > u(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in O(x^*, \rho_0),$$

поскольку шар $O(x^*, \rho_0)$ лежит в области $D \backslash \overline{D}_1$.

Шаг 4. Выберем число $\rho_1 = \rho_0/2$ при этом, очевидно,

$$\overline{O}(x^{''}, \rho_1) \subset D.$$

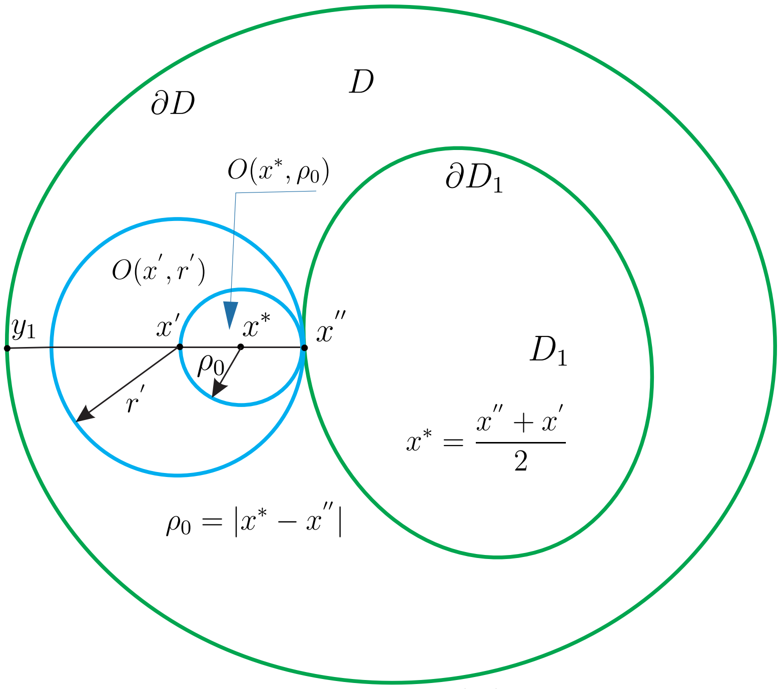


Рис. 2. Построение шаров $O(x', r')$ и $O(x^*, \rho_0)$.

Рассмотрим следующую функцию

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\gamma\rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)}, \quad \rho_0 = |x^* - x''|, \quad r(x) = |x - x^*|. \tag{1.3}$$

Для функции $v(x)$ справедливы равенства

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = e^{-\gamma r^2(x)} 2\gamma (x_i - x_i^*),$$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j} = -4\gamma^2 e^{-\gamma r^2(x)} (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + 2\gamma e^{-\gamma r^2(x)} \delta_{ij}.$$

Поэтому

$$L(v)(x) = e^{-\gamma r^2(x)} \Biggl[-4\gamma^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) +$$
$$+ 2\gamma \sum_{j=1}^{N} a_{jj}(x) + 2\gamma \sum_{i=1}^{N} b_i(x)(x_i - x_i^*) + c(x) \left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} - 1 \right) \Biggr].$$

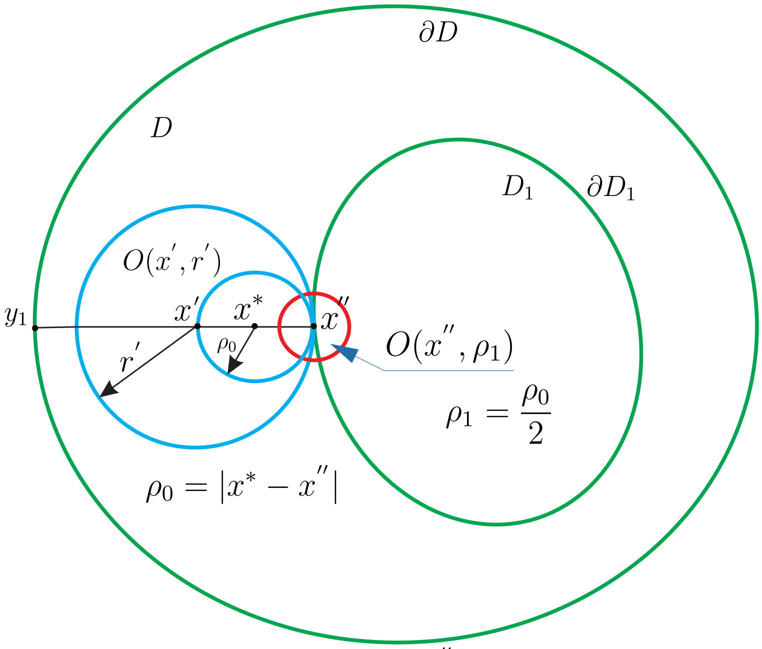


Рис. 3. Шар $O(x^{''}, \rho_1)$.

Шаг 5. Прежде всего, заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\gamma r^2(x) - \gamma \rho_0^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{O}(x^{''}, \rho_1) \cap \{r(x) = |x - x^*| \geqslant \rho_0\}. \quad (1.4)$$

Следовательно, поскольку по условию, что существенно, $c(x) \leqslant 0$, то

$$\boxed{c(x)\left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} - 1\right) \leqslant 0} \quad (1.5)$$

при $x \in \overline{O}(x^{''}, \rho_1) \cap \{|x - x^*| \geqslant \rho_0\}$. С другой стороны,

$$1 > e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} = e^{-\gamma(\rho_0^2 - r^2(x))} \to +0 \quad \text{при} \quad \gamma \to +\infty,$$

если $r(x) := |x - x^*| < \rho_0$. Поэтому в силу ограниченности $c(x)$ получим, что

$$\boxed{\left|c(x)\left(e^{\gamma r^2(x) - \gamma\rho_0^2} - 1\right)\right| \leqslant |c(x)| \leqslant c_1 := \sup_{x \in D} |c(x)| < +\infty} \quad (1.6)$$

при $x \in \overline{O}(x^{''}, \rho_1) \cap \{|x - x^*| < \rho_0\}$.

Шаг 6. Осталось заметить, что при достаточно большом $\gamma > 0$ при учёте условия ограниченности коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$, а также в силу равномерной эллиптичности оператора L получим, что

$$
\begin{aligned}
- 4\gamma^2 a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + 2\gamma a_{jj}(x) + \\
+ 2\gamma b_i(x)(x_i - x_i^*) + c_1 < 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1). \quad (1.7)
\end{aligned}
$$

□ Действительно, в силу равномерной эллиптичности оператора имеют место неравенства снизу

$$
\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \geqslant \vartheta |x - x^*|^2 = \vartheta r^2(x) \geqslant d > 0,
$$

$$
a_{jj}(x) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1).
$$

Кроме того, в силу ограниченности коэффициентов $b_i(x)$ справедлива оценка сверху

$$
|b_i(x)(x_i - x_i^*)| \leqslant M_1 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{O}(x'', \rho_1).
$$

Тогда справедлива оценка сверху

$$
\begin{aligned}
- 4\gamma^2 a_{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + 2\gamma a_{jj}(x) + 2\gamma b_i(x)(x_i - x_i^*) + c_1 \leqslant \\
\leqslant -4\gamma^2 d + 2\gamma\vartheta + 2\gamma M + c_1 < 0
\end{aligned}
$$

при достаточно большом $\gamma > 0$ для всех $x \in \overline{O}(x'', \rho_1)$. ⊠

Следовательно, при фиксированном $\rho_0 > 0$ и достаточно большом $\gamma > 0$ справедливо неравенство

$$
L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1). \quad (1.8)
$$

Шаг 7. Введем следующую функцию:

$$
\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + \lambda v(x), \quad \lambda > 0.
$$

Разобьем границу $\partial O(x'', \rho_1)$ шара $O(x'', \rho_1)$ на две части

$$
\partial O(x'', \rho_1) = S_1 \cup S_2,
$$

$$
S_1 = \left\{ x \in \partial O(x'', \rho_1) : |x - x^*| \geqslant \rho_0 \right\},
$$

$$
S_2 = \left\{ x \in \partial O(x'', \rho_1) : |x - x^*| < \rho_0 \right\}.
$$

Тогда на границе S_1 там где $|x - x^*| > \rho_0$ мы имеем $v(x) > 0$ и $u(x) \geqslant u(x_0)$, а там где $|x - x^*| = \rho_0$ мы имеем $v(x) = 0$ и $u(x) > u(x_0)$. Следовательно, всегда

$$
\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in S_1.
$$

Теперь за счет выбора достаточно малого $\lambda > 0$, ограниченности функции $v(x) < 0$ при $x \in S_2$ и $u(x) > u(x_0)$ при $x \in S_2$ мы приходим к выводу о том, что

$$
\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in S_2.
$$

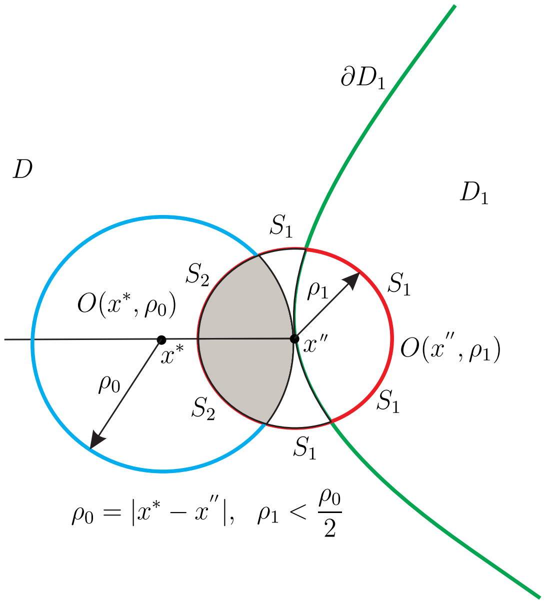


Рис. 4. Шар $O(x'', \rho_1)$ и его граница $\partial O(x'', \rho_1) = S_1 \cup S_2$.

Шаг 8. Следовательно, всегда

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(x'', \rho_1) \tag{1.9}$$

С другой стороны, справедливо неравенство ($F(x) \leqslant 0$ в $D \supset O(x'', \rho_1)$)

$$L(\varphi)(x) = F(x) + \lambda L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1). \tag{1.10}$$

Наконец, по определению функции $v(x'') = 0$ и поэтому $\varphi(x'') = = u(x'') = u(x_0) < 0$.

Следовательно,

$$L(\varphi)(x) < 0, \quad c(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in O(x'', \rho_1).$$

При этом в точке $x = x''$ — центре шара $O(x'', \rho_1)$ имеет место неравенство

$$\varphi(x'') = u(x_0) < 0,$$

а на границе шара

$$\varphi(x) > u(x_0) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(x'', \rho_1).$$

Функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{O}(x'', \rho_1))$. Следовательно, либо в точке x'' либо в другой точке шара $O(x'', \rho_1)$ достигается локальный отрицательный минимум.

Стало быть, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума. Значит, $D_1 = D$.

Теорема доказана.

Отметим, что может быть доказано более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ *и* $c(x)$ *ограничены в области* D, $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D)$, *оператор* L *является равномерно эллиптическим и выполнен один из наборов условий*

1. *всюду в области* D *выполнены неравенства* $c(x) \leqslant 0$ *и* $F(x) \leqslant 0$*;*
2. *всюду в области* D *выполнены неравенства* $c(x) \leqslant 0$ *и* $F(x) \geqslant 0$

Тогда в случае условий 1 либо ни в какой точке $x_0 \in D$ *не может достигаться отрицательный локальный минимум либо в любой такой области* D_0, *что*

$$x_0 \in D_0 \subset \{x \in D : \; u(x) \geqslant u(x_0)\} \quad \text{функция постоянна} \quad u(x) = u(x_0).$$

В случае выполнения условий 2 либо ни в какой точке $x_0 \in D$ *не может достигаться положительный локальный максимум либо в любой такой области* $D_0^{'}$, *что*

$$x_0 \in D_0^{'} \subset \{x \in D : \; u(x) \leqslant u(x_0)\} \quad \text{функция постоянна} \quad u(x) = u(x_0).$$

Замечание 1. В том случае, если $c(x) = 0$ в D предложения «положительный относительный максимум» и «отрицательный относительный минимум» можно заменить на соответствующие предложения «относительный максимум» и «относительный минимум».

§ 2. Следствия из принципа Хопфа

Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ — область. Из принципа Хопфа вытекают следующие важные следствия:

Следствие 1. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *и* $c(x) \leqslant 0$. *Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{2.1}$$

тогда имеет место следующее неравенство:

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{2.2}$$

Если

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{2.3}$$

тогда имеет место следующее неравенство:

$$u(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пусть выполнена группа неравенств (2.1), а неравенство (2.2) нарушено в некоторой точке $x_0 \in D$:

$$u(x_0) > 0,$$

тогда это означает наличие положительного относительного максимума в некоторой точке области D. Кроме того, поскольку область $D \subset \mathbb{R}^N$

является ограниченной, то существует такая точка $x_{00} \in D$, возможно совпадающая с точкой x_0, что в ней достигается глобальный положительный максимум в $\overline{D}$. Поэтому для всех точек $x \in \overline{D}$ выполнено неравенство

$$u(x) \leqslant u(x_{00}) \quad \text{при} \quad x \in \overline{D},$$

но тогда в силу принципа Хопфа мы получим, что $u(x) = u(x_{00})$ всюду в $\overline{D}$, но поскольку

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial D \Rightarrow 0 \geqslant u(x) = u(x_{00}) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial D$$

мы приходим к противоречию.

Следовательно,

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Шаг 2. Доказательство свойства (2.4) при выполнении группы неравенств (2.3) проводится аналогичным образом на основе принципа Хопфа.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$, $u(x) \neq const$ *и*

$$Lu(x) = 0 \quad \textit{и} \quad c(x) \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D.$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|u(x)| < \max_{x \in \partial D} |u(x)| \quad \textit{при} \quad x \in D. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \partial D} |u(x)|.$$

Шаг 1. Рассмотрим сначала функцию

$$v(x) = u(x) - M.$$

Тогда имеем

$$Lv(x) = Lu(x) - Mc(x) = -Mc(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D,$$
$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial D.$$

Следовательно, в силу следствия 1 имеем

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию

$$w(x) = u(x) + M.$$

Тогда имеем

$$Lw(x) = Lu(x) + Mc(x) = Mc(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D,$$
$$w(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial D.$$

Следовательно, в силу следствия 1 имеем

$$w(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x) \geqslant -M \quad \text{в} \quad D.$$

Шаг 3. Итак, имеем

$$-M \leqslant u(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

Заметим, что если

$$M = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{D}.$$

Но это противоречит условию $u(x) \neq const$. Следовательно, из этого предположения следует, что $M > 0$.

Предположим, что существует точка $x_0 \in D$, в которой $u(x_0) = M > 0$, но тогда в этой точке достигается положительный глобальный максимум функции $u(x)$, что противоречит сильному принципу максимума. Следовательно, поскольку $u(x) \neq const$ рассуждая точно также как на шаге 1 следствия 1, получим строгое неравенство

$$u(x) < M \quad \text{в} \quad D. \tag{2.6}$$

Аналогично,

$$u(x) > -M \quad \text{в} \quad D. \tag{2.7}$$

Следствие доказано

Следующее следствие получено из принципа Хопфа при условии, что $c(x) = 0$.

Следствие 3. *Пусть $c(x) = 0$ всюду в D, тогда для непостоянного в области D решения $u(x)$ соответствующего однородного эллиптического уравнения* (1.1) *выполнено неравенство*

$$\min_{x \in \partial D} u(x) < u(x) < \max_{x \in \partial D} u(x) \quad \text{в} \quad x \in D. \tag{2.8}$$

Доказательство.

Введем следующие обозначения:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \partial D} u(x), \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in \partial D} u(x). \tag{2.9}$$

Шаг 1. Рассмотрим функции

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - M, \quad w(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) - m.$$

Точно также как и при доказательстве следствия 2 получим, что

$$v(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \quad w(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Итак,

$$m \leqslant u(x) \leqslant M \quad \text{в} \quad D. \tag{2.10}$$

Шаг 2. Теперь предположим, что найдется такая точка $x_0 \in D$, что

$$u(x_0) = M,$$

тогда функция $u(x)$ достигает максимума в этой точке, тогда в силу принципа Хопфа с учетом замечания 1 функция $u(x) = const$ в области D, что противоречит условиям утверждения. Следовательно,

$$u(x) < M \quad \text{в} \quad D.$$

Аналогично получаем, что

$$u(x) > m \quad \text{в} \quad D.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим *первую краевую задачу* или *задачу Дирихле* при $c(x) \leqslant 0$ в ограниченной области D.

Задача Дирихле. Найти решение $u(x)$ класса $\mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ следующей краевой задачи в области $D \subset \mathbb{R}^N$ с границей $\partial D \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad D, \quad u(x) = f(x) \quad \text{на} \quad \partial D \tag{2.11}$$

при условии, что $F(x) \in \mathbb{C}(D)$ и $f(x) \in \mathbb{C}(\partial D)$.

Непосредственным приложением результата следствия 2 является следующая теорема:

Теорема единственности 1. *Существует не более одного решения первой краевой задачи.*

Замечание о геометрии области D. *Если диаметр области D достаточно мал, то задача Дирихле для равномерно эллиптического оператора L имеет не более одного решения.* [1])

Доказательство замечания.

Шаг 1. Пусть

$$0 < d \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y \in D} |x-y|, \quad |x-y| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

— диаметр области $D \subset \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим функцию

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2d^2 - |x - x_0|^2,$$

где $x_0 \in D$ — это любая точка (внутренняя области D). В частности,

$$w(x) \geqslant d^2 \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

С одной стороны, в области D имеет место оценка сверху

$$Lw(x) = -2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) - 2\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{0i}) b_i(x) + c(x) w(x) \leqslant$$

[1]) Значение этого результата в том, что отсутствует условие на знак коэффициента $c(x) \leqslant 0$.

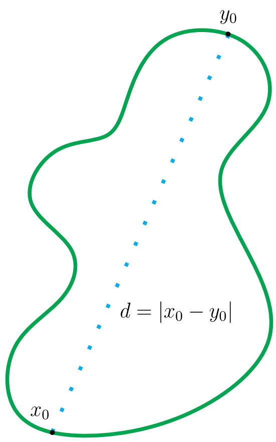


Рис. 5. Диаметр d области.

$$\leqslant -2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) + 2d\sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\overline{D}} |b_i(x)| + d^2 \max_{x\in\overline{D}} |c(x)|.$$

С другой стороны, в силу равномерной эллиптичности оператора L выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \vartheta|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in D$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^N$ при некоторой постоянной эллиптичности $\vartheta > 0$. Положим в последнем неравенстве $\xi = (0, ..., \xi_i, 0, ..., 0)$ при $\xi_i = 1$. Тогда получим следующее неравенство:

$$a_{ii}(x) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Следовательно,

$$-2\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) \leqslant -2N\vartheta.$$

Поэтому при достаточно малом $d > 0$ имеем

$$Lw(x) \leqslant -2N\vartheta + 2d\sum_{i=1}^{N} \max_{x\in\overline{D}} |b_i(x)| + d^2 \max_{x\in\overline{D}} |c(x)| < 0$$

для всех $x \in D$.

Шаг 2. Введем новую функцию $u(x)$ следующим образом:

$$v(x) = u(x)w(x), \quad v(x) = u_1(x) - u_2(x) \tag{2.12}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — это два решения задачи Дирихле класса $\mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. Тогда из равенства

$$Lv(x) = 0$$

приходим к следующей задачи для $u(x)$:

$$\widehat{L}u(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \widehat{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \widehat{b}_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \widehat{c}(x) u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$\widehat{c}(x) = Lw(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial D.$$

Решение этой задачи в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ единственно в силу теоремы единственности 1.

Замечание доказано.

§ 3. Признак сравнения для нелинейных эллиптических операторов и некоторые примеры

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для нелинейных эллиптических уравнений на плоскости. Пусть

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) \in \mathbb{C}^{(1)}(E), \quad (x, y, u, p, q, r, s, t) \in E,$$

где E — это область в $\mathbb{R}^8$. Рассмотрим следующее уравнение в области $(x, y) \in D$

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y). \tag{3.1}$$

Это нелинейное эллиптическое уравнение, если для всех (ξ, η) таких, что

$$\xi^2 + \eta^2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 + \frac{\partial F}{\partial s}\xi\eta + \frac{\partial F}{\partial t}\eta^2 > 0.$$

ПРИМЕР 1. Если мы возьмем

$$F = (1 - p^2)r + (1 + q^2)t + 1,$$

то получим следующее нелинейное уравнение в частных производных

$$\left[1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = f(x, y).$$

Заметим, что это уравнение эллиптическое, когда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 1$$

и гиперболическое, когда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| > 1.$$

Справедлива следующая теорема о признаке сравнения:
Теорема 3. *Пусть $u(x,y)$ — это решение задачи Дирихле*

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = f(x,y) \quad \text{в} \quad D, \tag{3.2}$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{3.3}$$

Пусть $z(x,y)$ и $Z(x,y)$ удовлетворяют неравенствам

$$F(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy}) \leqslant f(x,y) \leqslant \\ \leqslant F(x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}) \quad \text{в} \quad D, \tag{3.4}$$

$$z(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant Z(x,y) \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{3.5}$$

Предположим, что для любой константы $\vartheta \in [0,1]$ функция F порождает эллиптический оператор для всех

$$u + \vartheta(z-u), \quad u + \vartheta(Z-u) \quad \text{в} \quad D \tag{3.6}$$

и выполнено условие

$$\frac{\partial F}{\partial u} \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{3.7}$$

Тогда справедливы неравенства

$$z(x,y) \leqslant u(x,y) \leqslant Z(x,y) \quad \text{в} \quad D. \tag{3.8}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на принципе максимума и формулы среднего значения. Действительно, пусть

$$v(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y) - w(x,y).$$

Рассмотрим неравенство

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) - F(x,y,w,w_x,w_y,w_{xx},w_{xy},w_{yy}) \geqslant 0.$$

Левая часть последнего неравенства равна

$$L_\vartheta v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_\vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_\vartheta \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_\vartheta \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_\vartheta v \geqslant 0.$$

Индекс $(\cdot)_\vartheta$ означает, что аргумент соответствующей функции — это точка

$$(x,y,u_\vartheta,p_\vartheta,q_\vartheta,r_\vartheta,s_\vartheta,t_\vartheta),$$

$$u_\vartheta = w + \vartheta(u-w), \quad p_\vartheta = w_x + \vartheta(u_x - w_x), \quad q_\vartheta = w_y + \vartheta(u_y - w_y),$$

$$r_\vartheta = w_{xx} + \vartheta(u_{xx} - w_{xx}), \quad s_\vartheta = w_{xy} + \vartheta(u_{xy} - w_{xy}),$$

$$t_\vartheta = w_{yy} + \vartheta(u_{yy} - w_{yy}).$$

Осталось воспользоваться принципом максимума.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Широко известными являются два уравнения на плоскости. Первое уравнение — это уравнение минимальной поверхности

$$\left(1+u_y^2\right)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0. \tag{3.9}$$

Второе уравнение — это уравнение Монжа–Ампера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=f(x,y). \tag{3.10}$$

Прежде всего отметим, что уравнение (3.9) всегда эллиптическое.

□ Действительно,

$$F=\left(1+q^2\right)r-2pqs+\left(1+p^2\right)t,$$

$$\begin{aligned}F_r\xi^2+F_s\xi\eta+F_t\eta^2=&\\ &=\left(1+q^2\right)\xi^2-2pq\xi\eta+\left(1+p^2\right)\eta^2=\\ &=\xi^2+\eta^2+(q\xi-p\eta)^2>0 \quad \text{при} \quad \xi^2+\eta^2>0. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Заметим, что решением уравнения (3.9) является константа и всегда

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

Поэтому если ввести константы

$$M=\max_{(x,y)\in\partial D}u(x,y), \quad m=\min_{(x,y)\in\partial D}u(x,y).$$

То в силу теоремы 3 получим, что

$$m\leqslant u(x,y)\leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,y)\in D.$$

Рассмотрим теперь уравнение Монжа–Ампера. Это уравнение эллиптическое, тогда и только тогда, когда

$$rt-s^2>0.$$

Если мы потребуем, чтобы $f(x,y)>0$ всюду в области D, тогда уравнение (3.10) эллиптическое для всех решений. Рассмотрим частное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=1 \quad \text{в} \quad x^2+y^2<1,$$

$$u(x,y)=1 \quad \text{на} \quad x^2+y^2=1.$$

Этой задаче удовлетворяют две функции

$$Z(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad z(x,y)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Таким образом, единственности нет. Более того, здесь нельзя применить теорему 3, поскольку тяжело проверить, что уравнение остается эллиптическим для всего семейства функций

$$u + \vartheta(z - u), \quad \vartheta \in [0, 1].$$

К примеру на функции

$$\frac{1}{2}(Z(x, y) + z(x, y))$$

оператор Монжа–Ампера не является эллиптическим.

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть $u = u(x, y) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u^2 = 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Доказать, что это решение не достигает своего максимума в D за исключением решения $u(x, y) \equiv 0$.

Решение. Заметим, что каждое решение нелинейного уравнения удовлетворяет неравенству

$$\Delta u(x, y) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Поэтому, по–доказанному, если

$$u(x, y) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial D,$$

то

$$u(x, y) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

После чего доказываем, что

$$u(x, y) \leqslant \max_{(x,y)\in\partial D} u(x, y).$$

Теперь осталось воспользоваться сильным принципом максимума и получить, что либо

$$u(x, y) = const \quad \text{в} \quad D \Rightarrow const = 0$$

либо

$$u(x, y) < \max_{(x,y)\in\partial D} u(x, y) \quad \text{в} \quad D.$$