Лекция 4

ФУНКЦИЯ ГРИНА

§ 0. План лекции

1. Третья формула Грина.
2. Функция Грина.
2.1. Корректирующая функция $\varphi^x(y)$ для задачи Дирихле;
2.2. Следствие третьей формулы Грина;
2.3. Симметричность функции Грина.
3. Функция Грина для полупространства.
3.1. Отражение относительно полупространства;
3.2. Функция Грина;
3.3. Вычисление нормальной производной;
3.4. Ядро Пуассона и её гармоничность;
3.5. Доказательство равенства

$$\int\limits_{y_N=0} K(x,y)\,dS_y = 1;$$

3.6. Теорема о решении задачи Дирихле.
4. Функция Грина для шара.
4.1. Отражение относительно единичной сферы;
4.2. Построение функции Грина;
4.3. Вычисление нормальной производной;
4.4. Теорема о решении задачи Дирихле.

§ 1. Третья формула Грина

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это область с достаточно «гладкой» границей ∂U. Наша задача вывести формулу представления решения уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U \tag{1.1}$$

при заданном граничном условии

$$u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{1.2}$$

Рассмотрим решение класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$. Зафиксируем точку $x \in U$

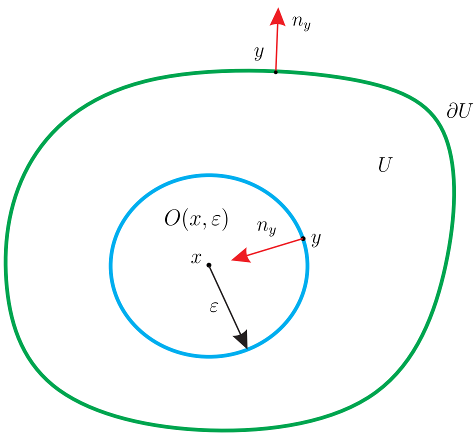

Рис. 1. Область $V_\varepsilon = U \backslash O(x,\varepsilon)$ с полем внешних нормалей n_y к границе ∂V_ε.

и выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $O(x,\varepsilon) \subset U$. Применим вторую формулу Грина, имеющую следующий вид:

$$\int\limits_V [u(y)\Delta v(y) - v(y)\Delta u(y)]\, dy =$$

$$= \int\limits_{\partial V} \left[u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial n_y} - v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right] dS_y, \tag{1.3}$$

к функциям $u = u(y)$ и $v(y) = \mathcal{E}_N(y-x)$ для области

$$V = V_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} U \backslash \overline{O(x,\varepsilon)}.$$

Находим

$$\int\limits_{V_\varepsilon} [u(y)\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) - \mathcal{E}_N(y-x)\Delta u(y)]\, dy =$$

$$= \int\limits_{\partial V_\varepsilon} \left[u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} - \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS_y, \quad (1.4)$$

где n_y — единичный вектор внешней нормали к ∂V_ε. Напомним, что по построению фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(y-x)$ при $y \neq x$ удовлетворяет равенству

$$\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) = 0.$$

Кроме того, имеет место следующее неравенство (см. лекцию 1)

$$\left| \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \, dS_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\partial O(x,\varepsilon)} |D_x u(x)| \omega_N \varepsilon^{N-1} \begin{cases} c_2 |\ln \varepsilon|, & \text{если} \quad N = 2; \\ c_N \varepsilon^{2-N}, & \text{если} \quad N \geqslant 3. \end{cases} \to +0 \quad (1.5)$$

при $\varepsilon \to +0$. Справедлива следующие равенства:

$$D_y \mathcal{E}_N(y-x) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y-x}{|y-x|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{y-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} = (n_y, D_y \mathcal{E}_N(y-x)) =$$

$$= \frac{1}{\omega_N} \frac{|y-x|^2}{|y-x|^N} \frac{1}{\varepsilon} \bigg|_{|x-y|=\varepsilon} = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} \, dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(y) \, dS_y \to u(x) \quad (1.6)$$

при $\varepsilon \to +0$ (см. лекцию 1). Полагая $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.4) получим следующее равенство:

$$u(x) =$$
$$= \int\limits_{\partial U} \left[\mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} \right] dS_y - \int\limits_U \mathcal{E}_N(y-x) \Delta_y u(y) \, dy, \quad (1.7)$$

которое справедливо для любых $x \in U$ и $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$. Формула (1.7) носит название *третьей формулы Грина*.

Полученная формула позволяет найти $u(x)$ зная значения Δu внутри области U и значения u, $\partial u/\partial n_x$ на границе области ∂U.

§ 2. Функция Грина

Однако формулу нужно модифицировать для задачи Дирихле [1], поскольку мы не знаем значения нормальной производной на границе в этом случае. С этой целью нужно ввести корректирующую функцию $\varphi^x = \varphi^x(y) \in \mathbb{C}^{(2)}_y(U)$ при фиксированном $x \in U$ как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in U, \quad \varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y-x) \quad \text{при} \quad y \in \partial U. \tag{2.1}$$

Применив снова вторую формулу Грина (1.3), в которой нужно взять

$$u = u(y) \quad \text{и} \quad v(y) = \varphi^x(y).$$

В результате получим следующие равенства:

$$-\int\limits_U \varphi^x(y)\Delta_y u(y)\,dy = \int\limits_{\partial U} \left[u(y)\frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial n_y} - \varphi^x(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right] dS_y =$$
$$= \int\limits_{\partial U} \left[u(y)\frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial n_y} - \mathcal{E}_N(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right] dS_y. \tag{2.2}$$

Дадим определение.

Определение 1. *Функцией Грина задачи Дирихле для области U называется функция*

$$G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_N(y-x) - \varphi^x(y), \quad x, y \in U, \quad x \neq y. \tag{2.3}$$

Из равенств (1.7) и (2.2) получим следующую формулу:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial U} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y - \int\limits_U G(x,y)\Delta_y u(y)\,dy, \quad x \in U. \tag{2.4}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$ — это решение задачи Дирихле* (1.1), (1.2), *то справедливо следующее равенство*:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial U} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y - \int\limits_U G(x,y)f(y)\,dy, \quad x \in U, \tag{2.5}$$

где $G(x,y)$ — это обобщенная функция, удовлетворяющая условиям

$$\Delta_y G(x,y) = \delta(y-x)\ ^{2)}, \quad G(x,y) = 0\ ^{3)} \quad \text{при} \quad y \in \partial U.$$

[1] Как, впрочем, и для задачи Неймана.

[2] Равенство понимается в смысле равенства функционалов над пространством основных функций $\mathcal{D}(U)$.

[3] Равенство понимается поточечно.

З а м е ч а н и е 1. Уравнения для функции $G(x,y)$ означают, что с одной стороны $G(x,y)$ — это обобщенная функция, которая имеет регулярный представитель, который поточечно удовлетворяет равенству на границе ∂U как обычная функция.

Справедлива следующая важная теорема:

Т е о р е м а 2. *Для любых $x,y \in U$ при $x \neq y$ имеет место равенство*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Фиксируем $x,y \in U$, $x \neq y$. Положим

$$v(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(x,z), \quad w(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(y,z) \quad z \in U. \tag{2.6}$$

Тогда

$$\Delta_z v(z) = 0, \quad \Delta_z w(z) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq z, \quad y \neq z,$$
$$w(z) = v(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \partial U.$$

Шаг 2. Применяя вторую формулу Грина в области

$$V = U \setminus \left(\overline{O(x,\varepsilon)} \cup \overline{O(y,\varepsilon)} \right),$$
$$O(x,\varepsilon) \cap O(y,\varepsilon) = \varnothing, \quad O(x,\varepsilon) \cup O(y,\varepsilon) \subset U$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для функций $v(z)$ и $w(z)$. Получим

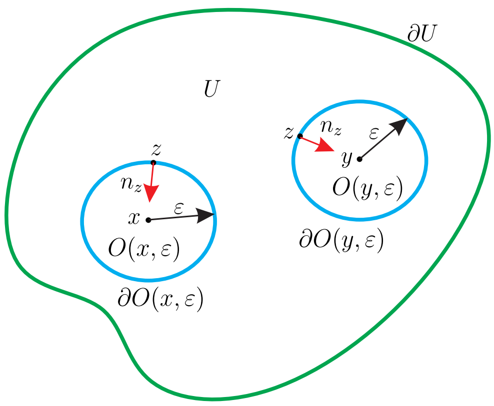

Рис. 2. Область V.

следующее равенство (см. рисунок 17):

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \left[\frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z) - \frac{\partial w(z)}{\partial n_z} v(z) \right] dS_z =$$
$$= \int\limits_{\partial O(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial w(z)}{\partial n_z} v(z) - \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z) \right] dS_z, \tag{2.7}$$

где n_z — это векторное поле единичных нормалей к $\partial O(x,\varepsilon)\cup\partial O(y,\varepsilon)$. Поскольку интеграл

$$\int\limits_{\partial U}\left[\frac{\partial v(z)}{\partial n_z}w(z)-\frac{\partial w(z)}{\partial n_z}v(z)\right]dS_z=0,$$

так как по определению

$$v(z):=G(x,z)=\mathcal{E}_N(z-x)-\varphi^x(z),\quad \varphi^x(z)=\mathcal{E}_N(z-x)\quad\text{при}\quad z\in\partial U,$$
$$w(z):=G(y,z)=\mathcal{E}_N(z-y)-\varphi^y(z),\quad \varphi^y(z)=\mathcal{E}_N(z-y)\quad\text{при}\quad z\in\partial U$$

и, следовательно,

$$v(z)=w(z)=0\quad\text{при}\quad z\in\partial U.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что функция $w(z)$ регулярна в малой окрестности точки $x\in U$, поэтому

$$\left|\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial w(z)}{\partial n_z}v(z)\,dS_z\right|\leqslant a_1\varepsilon^{N-1}\sup_{z\in\partial O(x,\varepsilon)}|v(z)|=$$
$$=a_2\varepsilon^{N-1}\begin{cases}c_N\varepsilon^{2-N}, & \text{если}\quad N\geqslant 3;\\ c_2|\ln\varepsilon|, & \text{если}\quad N=2.\end{cases}\to+0$$

при $\varepsilon\to+0$.

□ Действительно, заметим, что

$$v(z)=\mathcal{E}_N(z-x)-\varphi^x(z),\quad \varphi^x(z)\in\mathbb{C}^{(2)}(\overline{O(x,\varepsilon)}).\quad\boxtimes$$

Кроме того, отсюда получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial v(z)}{\partial n_z}w(z)\,dS_z=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial\mathcal{E}_N(z-x)}{\partial n_z}w(z)\,dS_z.\tag{2.8}$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$D_z\mathcal{E}_N(z-x)=\frac{1}{\omega_N}\frac{z-x}{|z-x|^N}\quad\text{и}\quad n_z=\frac{z-x}{|z-x|}=\frac{z-x}{\varepsilon}\quad\text{на}\quad\partial O(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\mathcal{E}_N(z-x)}{\partial n_z}=(n_z,D_z\mathcal{E}_N(z-x))=\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}}\quad\text{на}\quad\partial O(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}\frac{\partial v(z)}{\partial n_z}w(z)\,dS_z=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)}w(z)\,dS_z=w(x).\tag{2.9}$$

Значит, левая часть равенства (2.7) при $\varepsilon \to +0$ сходится к $w(x)$. Аналогичным образом доказывается, что правая часть равенства (2.7) при $\varepsilon \to +0$ сходится к $v(y)$. Итак,

$$w(x) = v(y) \quad \text{при} \quad x \neq y.$$

Значит,

$$G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y) \quad \text{при} \quad x \neq y.$$

Теорема доказана.

§ 3. Функция Грина для полупространства

В этом и следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о построении функции Грина $G(x, y)$ в случае специальных областей.

Рассмотрим полупространство

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_N > 0\right\}$$

с границей

$$\partial\mathbb{R}^N_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ x_N = 0\right\}.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Отражением точки* $x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \in \mathbb{R}^N_+$ *относительно плоскости* $\partial\mathbb{R}^N_+$ *называется точка* $\widetilde{x} = = (x_1, ..., x_{N-1}, -x_N)$. Для нахождения функции Грина задачи Дири-

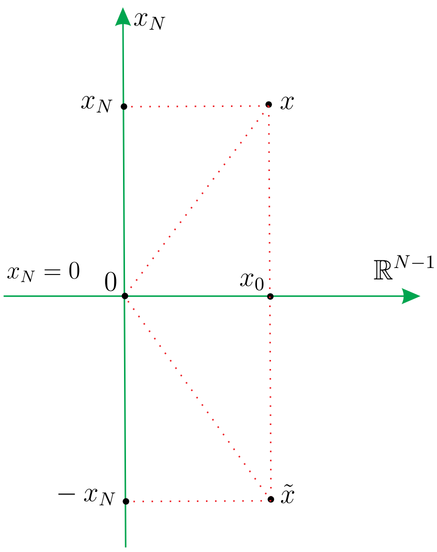

Рис. 3. Отражение точки.

хле (1.1), (1.2) для полупространства будем искать корректирующую функцию $\varphi^x(y)$ в следующем виде:

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y - \widetilde{x}) = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, y_N + x_N). \tag{3.1}$$

Действительно, функция $\varphi^x(y)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}^N_+, \tag{3.2}$$

а также граничному условию

$$\begin{aligned} \varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y - x) = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, x_N) = \\ = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, -x_N) \quad \text{при} \quad y_N = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где последнее равенство выполнено, в силу явного вида, а именно потому что фундаментальное решение зависит от $|x - y|$. Дадим следующее определение:

Определение 3. *Функцией Грина $G(x, y)$ для полупространства $\mathbb{R}^N_+$ называется следующее выражение:*

$$G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_N(y - x) - \mathcal{E}_N(y - \widetilde{x}), \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^N_+. \tag{3.4}$$

Теперь мы должны вычислить нормальную производную

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}$$

функции Грина $G(x, y)$ на границе $y_N = 0$ полупространства $\mathbb{R}^N_+$. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\Big|_{y_N=0} = -\frac{\partial G(x, y)}{\partial y_N}\Big|_{y_N=0} = \\ = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_N(y - x)}{\partial y_N} - \frac{\partial \mathcal{E}_N(y - \widetilde{x})}{\partial y_N}\right)\Big|_{y_N=0} = \\ = \frac{1}{\omega_N}\left(\frac{y_N - x_N}{|y - x|^N} - \frac{y_N + x_N}{|y - \widetilde{x}|^N}\right)\Big|_{y_N=0} = -\frac{2}{\omega_N}\frac{x_N}{|x - y|^N}\Big|_{y_N=0}, \end{aligned}$$

поскольку $|y - x| = |y - \widetilde{x}|$ при $y_N = 0$. Следует ожидать, что в силу равенства (2.4) решение краевой задачи Дирихле для полупространства

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \quad u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial\mathbb{R}^N_+ \tag{3.5}$$

имеет следующий явный вид:

$$u(x) = \frac{2x_N}{\omega_N} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x - y|^N}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{3.6}$$

Функция

$$K(x,y) \overset{\text{def}}{=} \frac{2x_N}{\omega_N}\frac{1}{|x-y|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \quad y \in \partial\mathbb{R}^N_+ \tag{3.7}$$

называется *ядром Пуассона*. Справедлива следующая теорема:
Теорема 3. *Пусть* $g(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, *и функция* $u(x)$ *определена формулой* (3.6). *Тогда*

$$u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+),$$
$$\Delta u(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \qquad \lim_{x\to x_0,\; x\in\mathbb{R}^N_+} u(x) = g(x_0) \tag{3.8}$$

для каждой точки $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что функция Грина $G(x,y)$ при фиксированной точке x является гармонической функцией по y всюду за исключением точки $x=y$. Поскольку $G(x,y)=G(y,x)$, то функция Грина является гармонической по x. Значит, функция

$$-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_N} = K(x,y)$$

является гармонической по $x \in \mathbb{R}^N_+$ при $y \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

Шаг 2. Докажем, что

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{3.9}$$

□ Действительно, пусть $x \in \mathbb{R}^N_+$, $O(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^N_+$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующую область:

$$U_{R,\varepsilon} := \bigl(\mathbb{R}^N_+ \cap O(x,R)\bigr) \backslash \overline{O(x,\varepsilon)},$$

где $R > 0$ выберем настолько большим, чтобы $O(x,\varepsilon) \subset O(x,R)$. В области $U_{R,\varepsilon}$ имеет место равенство

$$\Delta_y G(x,y) = 0 \Rightarrow \int\limits_{U_{R,\varepsilon}} \Delta_y G(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow \int\limits_{\partial U_{R,\varepsilon}} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y = 0.$$

Заметим, что

$$\partial U_{R,\varepsilon} = \partial O(x,\varepsilon) \cup \Gamma_{1,R} \cup \Gamma_{2,R},$$
$$\Gamma_{1,R} := \overline{\bigl(\mathbb{R}^N_+ \cap \partial O(x,R)\bigr)}, \quad \Gamma_{2,R} := \overline{\bigl(O(x,R) \cap \partial\mathbb{R}^N_+\bigr)}.$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y + \int\limits_{\Gamma_{1,R}} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y + \int\limits_{\Gamma_{2,R}} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y = 0. \tag{3.10}$$

Поскольку при $x \in \mathbb{R}^N_+$ фиксированном имеют место предельные свойства

$$|D_y \mathcal{E}_N(y-x)| \leqslant \frac{A}{|y-x|^{N-1}} \quad \text{при} \quad |y-x| \to +\infty,$$

$$|D_y \mathcal{E}_N(y-\widetilde{x})| \leqslant \frac{A}{|y-\widetilde{x}|^{N-1}} \quad \text{при} \quad |y-\widetilde{x}| \to +\infty.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\left| \int\limits_{\Gamma_{1,R}} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\, dS_y \right| \leqslant A_N \frac{R^{N-2}}{R^{N-1}} = \frac{A_N}{R} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{3.11}$$

Кроме того, имеем

$$\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\, dS_y = \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y}\, dS_y - \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-\widetilde{x})}{\partial n_y}\, dS_y := I_1(\varepsilon) - I_2(\varepsilon). \tag{3.12}$$

Поскольку $x \in \mathbb{R}^N_+$, то $\widetilde{x} \notin \mathbb{R}^N_+$. Следовательно, в подынтегральном выражении для $I_2(\varepsilon)$ нет особенности и поэтому

$$I_2(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0. \tag{3.13}$$

$$D_y \mathcal{E}_N(y-x) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y-x}{|y-x|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{y-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} = (n_y, D_y \mathcal{E}_N(y-x)) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial O(x,\varepsilon).$$

Для $I_1(\varepsilon)$ имеет место следующая цепочка равенств:

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y}\, dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} = 1. \tag{3.14}$$

Наконец,

$$\int\limits_{\Gamma_{2,R}} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\, dS_y \to -\int\limits_{\partial \mathbb{R}^N_+} K(x,y)\, dy \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{3.15}$$

Следовательно, из выражений (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) и (3.15) вытекает искомое равенство. $\boxtimes$

Поскольку функция $g(x)$ ограничена, то функция $u(x)$, определенная формулой (3.6), также ограничена. Поскольку $K(x,y)$ гладкая по x при $x \neq y$, легко проверить, что $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ и

$$\Delta_x u(x) = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} \Delta_x K(x,y) g(y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+.$$

Шаг 3. Фиксируем точку $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$ и число $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \partial\mathbb{R}^N_+. \tag{3.16}$$

Пусть $|x - x_0| < \delta/2$ и $x \in \mathbb{R}^N_+$, то

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)[g(y) - g(x_0)]\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+ \cap O(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\, dy + \\ &+ \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus O(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\, dy =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Отметим, что из (3.9) и (3.16)

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\, dy = \varepsilon.$$

Более того, если

$$|x - x_0| \leqslant \delta/2 \quad \text{и} \quad |y - x_0| \geqslant \delta,$$

то

$$|y - x_0| \leqslant |y - x| + |x - x_0| \leqslant |y - x| + \frac{\delta}{2} \leqslant |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}|y - x_0| \leqslant |y - x| \Rightarrow \frac{1}{|y - x|} \leqslant \frac{2}{|y - x_0|}.$$

Таким образом,

$$I_2 \leqslant 2\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus O(x_0,\delta)} K(x,y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{N+2}\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)}x_N}{\omega_N} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+\setminus O(x_0,\delta)} \frac{1}{|y-x_0|^N}\,dy \to +0$$

при $x_N \to +0$.

$\square$ Действительно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+\setminus O(x_0,\delta)} \frac{1}{|y-x_0|^N}\,dy = c_N \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{1}{r^N} r^{N-2}\,dr = c_N \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{c_N}{\delta},$$

где мы перешли к полярной системе координат на плоскости $\partial\mathbb{R}^N_+$ с полюсом в точке $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$. $\boxtimes$

В силу неравенства (3.17) получаем

$$|u(x) - g(x_0)| \leqslant 2\varepsilon, \quad \text{если} \quad |x - x_0| \leqslant \delta/2.$$

Теорема доказана.

§ 4. Функция Грина для шара

Чтобы построить функцию Грина для единичного шара $O(0,1)$ нужно опять воспользоваться отражением, но относительно границы единичной сферы $\partial O(0,1)$. Дадим следующее определение:

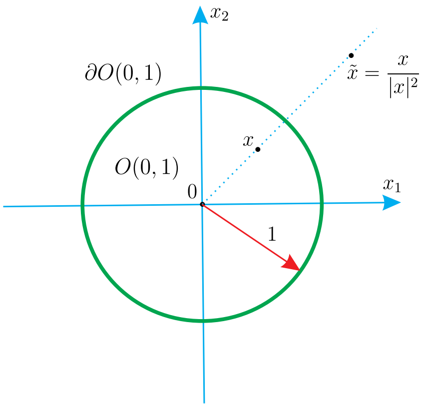

Рис. 4. Отражение точки x относительно границы $\partial O(0,1)$ шара $O(0,1)$.

Определение 4. *Для точки $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ точка*

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

называется сопряженной к x относительно сферы $\partial O(0,1)$. Отображение $x \to \widetilde{x}$ называется инверсией относительно единичной сферы $\partial O(0,1)$.

Опять нам нужно подобрать так корректирующую функцию $\varphi^x(y)$, чтобы для произвольного фиксированного $x \in O(0,1)$

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in O(0,1), \tag{4.1}$$

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y-x) \quad \text{при} \quad y \in \partial O(0,1). \tag{4.2}$$

С этой целью заметим, что функция $\mathcal{E}_N(y-\widetilde{x})$ является гармонической для всех $y \in O(0,1)$ при $x \in O(0,1)$, поскольку инверсия $x \to \widetilde{x}$ переводит особую точку $x \in O(0,1)$ за пределы шара $O(0,1)$. Кроме того, заметим, что при $N \geqslant 3$ функция

$$|x|^{2-N}\mathcal{E}_N(y-\widetilde{x}) = \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))$$

гармоническая в $U = O(0,1)$ по $y \in O(0,1)$. Отметим, что если $y \in \partial O(0,1)$ (т. е. $|y| = 1$) и $x \neq 0$, то

$$|x|^2|y-\widetilde{x}|^2 = |x|^2\left(|y|^2 - \frac{2(x,y)}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right) = \\ = |x|^2 - 2(x,y) + 1 = |x|^2 - 2(x,y) + |y|^2 = |x-y|^2,$$

следовательно,

$$(|x||y-\widetilde{x}|)^{-(N-2)} = |x-y|^{-(N-2)} \quad \text{при} \quad |y| = 1.$$

Поэтому функция

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x})) \tag{4.3}$$

удовлетворяет задаче (4.1), (4.2). Дадим определение.

Определение 5. *Функцией Грина задачи Дирихле для единичного шара называется следующая функция*:

$$G(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_N(y-x) - \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x})) \tag{4.4}$$

при $x, y \in O(0,1)$ *и* $x \neq y$.

Замечание 2. Такая же формула справедлива и в случае $N = 2$.

Предположим, что $u(x)$ — это решение краевой задачи

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in O(0,1), \tag{4.5}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,1). \tag{4.6}$$

В силу формулы (2.5) решение имеет следующий вид:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial O(0,1)} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\,dS_y. \tag{4.7}$$

Заметим, что единичная внешняя нормаль n_y в точке $y \in \partial O(0,1)$ имеет следующий явный вид:

$$n_y = \frac{y}{|y|} = y = \{y_1, ..., y_N\} \quad \text{при} \quad |y| = 1.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = (n_y, D_y)\, G(x,y) = \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i}.$$

Итак, вычисляем

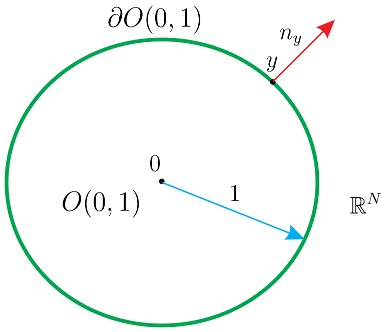

Рис. 5. Поле единичных нормалей n_y к поверхности единичного шара $\partial O(0,1)$.

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial y_i} - \frac{\partial \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))}{\partial y_i}.$$

Однако,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial y_i} = \frac{1}{\omega_N}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^N},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))}{\partial y_i} = -\frac{1}{\omega_N}\frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y-\widetilde{x}|)^N} = -\frac{1}{\omega_N}\frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x-y|^N}$$

при $|y| = 1$, поскольку как ранее было установлено

$$|x||y-\widetilde{x}| = |x-y| \quad \text{при} \quad |y| = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} =$$

$$= -\frac{1}{\omega_N}\frac{1}{|x-y|^N}\sum_{i=1}^{N} y_i \Big((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i\Big) = -\frac{1}{\omega_N}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^N},$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \Big((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i\Big) =$$

$$= |y|^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - |y|^2|x|^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 1 - |x|^2 \quad \text{при} \quad |y| = 1.$$

Таким образом, формула (4.7) примет следующий вид:

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{\omega_N} \int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, dS_y. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in O(0,r), \tag{4.9}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial O(0,r). \tag{4.10}$$

Тогда $\widetilde{u}(z) = u(rz)$ является решением задачи (4.5), (4.6) с граничной функцией $\widetilde{g}(z) = g(rz)$ относительно переменной z. Сделав замену переменных, получим *формулу Пуассона*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_N r} \int\limits_{\partial O(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in O(0,r). \tag{4.11}$$

Ядром Пуассона для шара $O(0,r)$ называется функция

$$K(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_N r} \frac{1}{|x-y|^N}, \quad x, y \in O(0,r), \quad x \neq y.$$

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства:

Т е о р е м а 4. *Пусть* $g(x) \in \mathbb{C}(\partial O(0,r))$ *и функция* $u(x)$ *определена формулой* (4.11). *Тогда*

$$u(x) \in \mathbb{C}^\infty(O(0,r)),$$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in O(0,r), \tag{4.12}$$

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in O(0,r)} u(x) = g(x_0) \quad \textit{для каждой} \quad x_0 \in \partial O(0,r). \tag{4.13}$$