Лекция 9

# СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

## § 1. Слабый принцип максимума в случае ограниченного решения

Рассмотрим эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами следующего вида:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u(x) = F(x), \qquad (1.1)$$

при $x \in D \subset \mathbb{R}^N$, где $D$ — это область с ляпуновской границей $\partial D \in \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$.

Определение 1. *Регулярным или классическим решением уравнения* (1.1) *в области $D$ назовем функцию $u(x)$ класса $\mathbb{C}^{(2)}(D)$, удовлетворяющую уравнению* (1.1) *поточечно.*

Предположим, что коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ уравнения принадлежат классу $\mathbb{C}_b(\overline{D})$, т. е. непрерывны на $\overline{D}$ и ограничены. Кроме того, предположим, что коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ всюду в области $D$ удовлетворяют условию эллиптичности — квадратичная форма является положительно определенной:

$$Q(x; \lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D. \qquad (1.2)$$

Дадим определение равномерно эллиптического оператора.

Определение 2. *Оператор $L$ вида* (1.1) *называется равномерно эллиптическим, если найдутся такие постоянные $\vartheta > 0$ и $M > 0$, что*

$$\vartheta|\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \leqslant M|\lambda|^2 \qquad (1.3)$$

*для всех $x \in D$ и $\lambda \in \mathbb{R}^N$.*

Замечание 1. Заметим, что в случае эллиптического оператора $L$ второго порядка с переменными коэффициентами <u>естественным граничным условием</u> помимо условия Дирихле является задание не нормальной производной $n_x$ на границе рассматриваемой области, а задание конормальной производной или производной по конормали, определяемый следующим образом:

$$\cos(\nu_x, e_i) = \frac{1}{a(x)} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(n_x, e_j), \quad \frac{\partial}{\partial \nu_x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \cos(\nu_x, e_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где

$$a^2(x) = \sum_{i=1}^{N} \left( \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(n_x, e_j) \right)^2.$$

Сначала мы рассмотрим вариант слабого принципа максимума в том случае когда $c(x) = 0$, но при этом либо $Lu \leqslant 0$ либо $Lu \geqslant 0$ в ограниченном открытом множестве $D$. При этом решение $u(x)$ является регулярным и ограниченным.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ — открытое и ограниченное множество. Предположим, что $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и $c(x) \equiv 0$ в $D$ и оператор $L$ является равномерно эллиптическим. Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.4}$$

*то*

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x). \tag{1.5}$$

*Если*

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.6}$$

*то*

$$\min_{x \in \overline{D}} u(x) = \min_{x \in \partial D} u(x). \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем, например, что из (1.4) вытекает (1.5). Поскольку аналогичным образом доказывается, что из (1.6) вытекает (1.7).

*Шаг 1.* Сначала предположим, что выполняется строгое неравенство

$$Lu(x) > 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.8}$$

и существует точка $x_0 \in D$ такая, что

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{D}} u(x). \tag{1.9}$$

Тогда в точке максимума $x_0$ имеем

$$u_{x_i}(x_0) = 0, \tag{1.10}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(x_0) \lambda_i \lambda_j \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N. \tag{1.11}$$

*Шаг 2.* Поскольку матрица $A = (a_{ij}(x_0))$ симметричная и положительно определенная, то существует такая ортогональная матрица $O = (o_{ij})$, что

$$OAO^T = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_N), \quad O \cdot O^T = I, \tag{1.12}$$

где $d_k > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Запишем преобразование (поворот вокруг точки $x_0$), осуществляемое ортогональной матрицей $O$,

$$y - x_0 = O(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = O^T(y - x_0) \text{ [1]}$$

и, следовательно,

$$u_{x_i}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{y_k}(y) o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} u_{y_k y_l}(y) o_{ki} o_{lj}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке $x_0$ в виду равенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) o_{ki} o_{lj} = d_k \delta_{kl}$$

имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} d_k u_{y_k y_k}(x_0) \leqslant 0, \tag{1.13}$$

так как $d_k > 0$ и $u_{y_k y_k}(x_0) \leqslant 0$ при $k = \overline{1, N}$.

*Шаг 3.* Таким образом, в точке $x_0$ имеем

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x_0) u_{x_i}(x_0) \leqslant 0$$

ввиду (1.10) и (1.13), что противоречит неравенству (1.8). Следовательно, (1.8) и (1.9) несовместны и мы приходим к равенству (1.5).

*Шаг 4.* В общем случае, когда выполнено (1.4), введем следующую функцию:

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}, \quad x \in D, \tag{1.14}$$

где параметр $\lambda > 0$ будет выбран ниже и $\varepsilon > 0$. Отметим, что в силу условия равномерной эллиптичности выполнено следующее неравенство

$$a_{ii}(x) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{при} \quad x \in D, \quad i = \overline{1, N}. \tag{1.15}$$

□ Действительно, если в условии (1.3) взять $\lambda = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$ с единицей на $i$–ом месте, то мы получим неравенство (1.15). ⊠

---

[1] Заметим, что $O^T = O^{-1}$.

Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon L\left(e^{\lambda x_1}\right) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[\lambda^2 a_{11}(x) + \lambda b_1(x)\right] \geqslant \\ \geqslant \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[\lambda^2 \vartheta - \lambda \|b_1\|_{L^\infty(D)}\right] > 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.16}$$

при достаточно большом $\lambda > 0$. Тогда согласно шагам 1–3 имеем

$$\max_{x\in\overline{D}} u_\varepsilon(x) = \max_{x\in\partial D} u_\varepsilon(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, мы получим равенство

$$\max_{x\in\overline{D}} u(x) = \max_{x\in\partial D} u(x).$$

Т е о р е м а  д о к а з а н а.

Рассмотрим теперь случай $c(x) \leqslant 0$ и множество $D$ — открытое и ограниченное. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 2. *Предположим, что* $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *и* $c(x) \leqslant 0$ *в* $D$. *Если*

$$Lu(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.17}$$

*то*

$$\max_{x\in\overline{D}} u(x) \leqslant \max_{x\in\partial D} u^+(x), \tag{1.18}$$

*где* $u^+ = \max(u, 0)$. *Если*

$$Lu(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{1.19}$$

*то*

$$\min_{x\in\overline{D}} u(x) \geqslant -\max_{x\in\partial D} u^-(x), \tag{1.20}$$

*где* $u^- = -\min(u, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

*Шаг 1.* Пусть выполнено неравенство (1.17). Положим

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D : \ u(x) > 0\},$$

$$\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2, \quad \partial V_1 \subset \{x \in D : u(x) = 0\}, \quad \partial V_2 \subset \partial D.$$

В силу непрерывности $u(x)$ в $\overline{D}$ множество $V$ является открытым и ограниченным множеством. [1] Тогда

$$Ku(x) \stackrel{\text{def}}{=} Lu(x) - c(x)u(x) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad V$$

[1] Поскольку $V \subset D$, а $D$ ограничено.

Оператор $K$ не имеет членов нулевого порядка и, следовательно, в силу теоремы 1 имеют место равенства

$$\max_{x\in\overline{V}} u(x) = \max_{\partial V} u(x) \leqslant \max_{x\in\partial D} u^+.$$

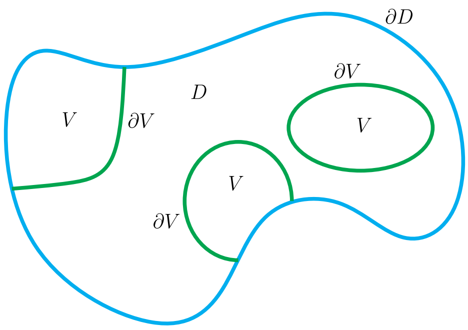


Рис. 1. Множество $V$ его граница $\partial V$ и множество $D$.

Поскольку при $x \in D\backslash V$ выполнено неравенство $u(x) \leqslant 0$, то приходим к неравенству

$$\max_{x\in\overline{D}} u(x) \leqslant \max_{x\in\partial D} u^+.$$

Отсюда получаем (1.18) в случае $V \neq \varnothing$. В ином случае

$$u(x) \leqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad D,$$

и мы тоже приходим к (1.18).

*Шаг 2.* Утверждение (1.20) следует из (1.18) для $-u(x)$, поскольку $(-u)^+ = u^-$.

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы 2 в случае, когда $Lu(x) = 0$ в $D$, имеет место равенство*

$$\max_{x\in\overline{D}} |u(x)| = \max_{x\in\partial D} |u(x)|. \tag{1.21}$$

Доказательство.

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$-\max_{x\in\partial D} |u(x)| \leqslant -\max_{x\in\partial D} u^-(x) \leqslant |u(x)| \leqslant \max_{x\in\partial D} u^+(x) \leqslant \max_{x\in\partial D} |u(x)|.$$

Следствие доказано.

## § 2. Слабый принцип максимума в общем случае

Справедлив следующий *слабый принцип максимума* в случае регулярного решения, т. е. решения класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D)$. Ясно, что решение может не быть ограниченным. При этом мы будем для удобства считать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область.

Теорема 3. *Пусть выполнен один из следующих наборов условий:*

1. *всюду в области $D$ имеют место неравенства $c(x) < 0$ и $F(x) = 0$;*
2. *всюду в области $D$ имеют место неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) < 0$;*
3. *всюду в области $D$ имеют место неравенства $c(x) \leqslant 0$ и $F(x) > 0$,*

*тогда в случае условий 1 или 2 регулярное в области $D$ решение $u(x)$ не может достигать отрицательного относительного минимума, а в случае условий 1 или 3 регулярное в области решение $u(x)$ не может достигать положительного относительного максимума.*

Доказательство. Докажем, например, что при выполнении одного из набора условий 1 или 2 регулярное решение $u(x)$ не может достигать в области $D$ отрицательного относительного минимума.

Пусть в точке $x_0 \in D$ достигается отрицательный относительный минимум. Тогда поскольку $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D)$, то в точек $x_0$ выполнены достаточные условия локального минимума функции $u = u(x)$ :

$$u_{x_i}(x_0) = 0, \quad u_{x_i x_j}(x_0)\lambda_i\lambda_j \geqslant 0, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

Кроме того, в силу положительной определенности квадратичной формы (1.2) в точке $x_0 \in D$ имеет место следующее неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j}(x_0) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Из неравенства (2.2), равенства (2.1) и уравнения (1.1) получим следующее неравенства:

$$c(x_0)u(x_0) \leqslant F(x_0), \quad u(x_0) < 0, \tag{2.3}$$

тогда в силу выполнения одного из набора условий 1 или 2 получим отсюда противоречивые неравенства — в случае 1 такие неравенства

$$0 < c(x_0)u(x_0) \leqslant Lu(x_0) = F(x_0) = 0,$$

а в случае 2 такие неравенства

$$0 \leqslant c(x_0)u(x_0) \leqslant Lu(x_0) = F(x_0) < 0.$$

Теорема доказана.

## § 3. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим следующий оператор в частных производных второго порядка

$$Lu(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в области $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2<1\}$. Доказать, что этот оператор является эллиптическим в области $\Omega$, но не является равномерно эллиптическим.

Решение. Действительно, рассмотрим матрицу характеристической формы

$$(a_{ij}(x,y))_{i,j=1,1}^{2,2} = \begin{pmatrix} 1-x^2 & xy \\ xy & 1-y^2 \end{pmatrix}.$$

Нужно вычислить корни характеристического уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\lambda^2 - (2-x^2-y^2)\lambda + 1 - x^2 - y^2 = 0.$$

Можно проверить, что оба корня $\lambda_1(x,y) > 0$ и $\lambda_2(x,y) > 0$ в $\Omega$. И это означает эллиптичность соответствующего оператора $L$. Однако, при $x^2+y^2 \to 1$ один из корней стремится к 1, а другой к 0. Следовательно, оператор <u>не является равномерно эллиптическим</u>.

Задача 2. Рассмотрим следующий оператор в частных производных

$$Lu(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Выписать конормальную производную решения этого оператора на границе области $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2<1\}$.

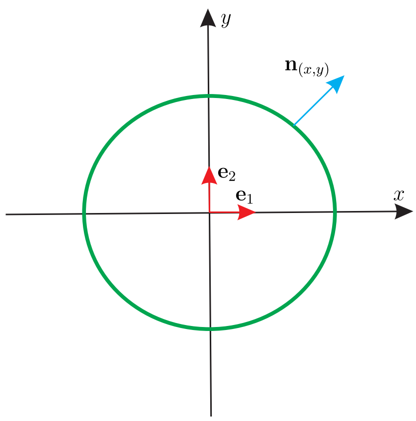


Рис. 2. Область $D$.

Решение. Прежде всего заметим, что

$$n_{(x,y)} = (x,y) \in \partial D, \quad \partial D \equiv \{x^2+y^2=1\}, \quad e_1=(1,0), \quad e_2=(0,1).$$

Поэтому

$$\cos(\nu_{x,y}, e_1) = \frac{1}{a(x,y)} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}(x,y)\cos(n_{(x,y)}, e_j) = \frac{1}{a(x,y)} \left[(1+x^2)x - \frac{y}{2}\right],$$

$$\cos(\nu_{x,y}, e_2) = \frac{1}{a(x,y)} \sum_{j=1}^{2} a_{2j}(x,y)\cos(n_{(x,y)}, e_j) = \frac{1}{a(x,y)} \left[(1+y^2)y - \frac{x}{2}\right],$$

где

$$a(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left[(1+x^2)x - \frac{y}{2}\right]^2 + \left[(1+y^2)y - \frac{x}{2}\right]^2\right)^{1/2}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{(x,y)}} = \frac{1}{a(x,y)} \left[\left(x + x^3 - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y + y^3 - \frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right], \quad x^2+y^2=1.$$