Глава 4. Уравнения эллиптического типа

1. Основные свойства гармонических функций

1) Определение гармонической функции

Определение. Функция $u(M)$ называется гармонической в области D, если она непрерывна в этой области вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad M \in D; \quad u\left(M\right) \in C^{(2)}\left(D\right).$$

Частным случаем гармонических функций являются шаровые функции (гармонические полиномы) $u_{n,m} = r^n Y_n^{(m)}\left(\theta, \varphi\right)$,
где $Y_n^{(m)}\left(\theta, \varphi\right)$ - сферические функции.

2) Третья формула Грина

Пусть $u(M)$ – гладкая функция в области $\bar{D} = D + S$:
$u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$.

Рассмотрим функцию $v(M) = \dfrac{1}{r_{MM_0}}$, где r_{MM_0} – расстояние между точками M и M_0.

Нетрудно показать, что функция $v(M)$ при $M \neq M_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v = 0$. Так как функция $v(M)$ имеет в точке M_0 разрыв непрерывности, то непосредственно применить к функциям $u(M)$, $v(M)$ в области D вторую формулу Грина нельзя. Рассмотрим шар $\bar{K}^{\varepsilon}_{M_0} = K^{\varepsilon}_{M_0} + \Sigma^{\varepsilon}_{M_0}$. В области $D - \bar{K}^{\varepsilon}_{M_0}$ с границей $S + \Sigma^{\varepsilon}_{M_0}$ к функциям $u(M)$, $v(M)$ уже можно применить вторую формулу Грина. Обозначим $D^{\varepsilon} = D - \bar{K}^{\varepsilon}_{M_0}$.

$$\int\limits_{D^{\varepsilon}} \left(u(M)\,\Delta\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_0}}\,\Delta u(M) \right) dV_M =$$

$$= \int\limits_{S} \left(u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) - \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial}{\partial n_P}u(P) \right) d\sigma_P + \int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) d\sigma_P -$$

$$- \int\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial}{\partial n_P}u(P)\,d\sigma_P, \qquad (1)$$

где производная $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ берется по **внешней** нормали.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\Bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

то

$$\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)d\sigma_P = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} u(P)d\sigma_P = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (2)$$

где

$$u^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} u(P)d\sigma_P -$$

среднее значение функции $u(M)$ на поверхности $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$.

Далее

$$\int\limits_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial}{\partial n_P}u(P)d\sigma_P = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)^* = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)^* \qquad (3)$$

Так как при $M \in D^{\varepsilon}$ $\Delta\frac{1}{r_{MM_0}} = 0$, то из формул (1)-(3) получаем:

$$\int_{D^{\varepsilon}}\left(u(M)\Delta\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\right)dV_M=\int_{D^{\varepsilon}}\left(-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\right)dV_M=$$

$$=\int_S\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)-\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial}{\partial n_P}u(P)\right)d\sigma_P+4\pi u^*-4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)^*.$$

Устремим радиус шара к нулю: $\varepsilon\to 0.$ Тогда

$$1)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}4\pi u^*=4\pi u(M_0);$$

$$2)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)^*=0,$$

так как если $u\in C^{(1)}(\bar{D})$, то $\frac{\partial u}{\partial n_P}\in C(\bar{D})$, поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial n_P}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,\ \vec{n}_P=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

По определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D^{\varepsilon}}\left(-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\right)dV_M=\int\limits_{D}\left(-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\right)dV_M.$$

Мы приходим к третьей формуле Грина для случая $M_0\in D$:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D}\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_9}}dV_M,\quad M_0\in D. \qquad (4)$$

Если $M_0\notin\bar{D}$, то функция $v(M)=\frac{1}{r_{MM_0}}\in C(\bar{D})$, слева в формуле (4) стоит нуль.

Пусть теперь $M_0 \in S$. Общая схема останется той же, но интеграл в формуле (2) будет стремится при $\varepsilon \to 0$ не к $4\pi u(M_0)$, а к $2\pi u(M_0)$. Суммируя все вышесказанное, третья формула Грина в трехмерном случае имеет вид:

$$\Omega_3 u(M_0) = \int_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) d\sigma_P -$$

$$-\int_D \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_9}} dV_M, \qquad (5)$$

$$\Omega_3 = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in D, \\ 2\pi, & M_0 \in S, \\ 0, & M_0 \notin \bar{D}. \end{cases} \qquad (6)$$

В двумерном случае формула Грина имеет вид:

$$\Omega_2 u(M_0) = \int_C \left(\ln\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln\frac{1}{r_{PM_0}} \right) dl_P -$$

$$-\int_G \Delta u(M) \ln\frac{1}{r_{MM_0}} ds_M, \qquad (7)$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in G, \\ \pi, & M_0 \in C, \\ 0, & M_0 \notin \bar{G}, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\bar{G} = G + C$ – двумерная область, $\dfrac{\partial}{\partial n_P}$ – производная по внешней нормали к контуру C.

Если $u(M)$ – гармоническая функция и $M_0 \in D$ $\left(M_0 \in G\right)$, то формулы (5) и (7) принимают вид:

$$\Omega_3 u\left(M_0\right) = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P} - u\left(P\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) d\sigma_P,$$

$$M_0 \in D, \qquad (9)$$

$$\Omega_2 u\left(M_0\right) = \int\limits_C \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P} - u\left(P\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) dl_P,$$

$$M_0 \in G \qquad (10)$$

3) Основные свойства гармонических функций

а) Теорема Гаусса. Если $v(M)$ – функция, гармоническая в области D, то

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial n_P} d\sigma_P = 0, \qquad (11)$$

где Σ – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области D: $\Sigma \subset D$.

Доказательство. Применим первую формулу Грина к функциям $v(M),\ u(M) \equiv 1.$ **ч.т.д.**

Замечание 1. Если гармоническая функция $v(M) \in C^{(1)}(\bar{D})$, то формула (10) справедлива при $\Sigma \equiv S$, где $\bar{D} = D + S.$

Следствие. Вторая краевая задача

$$\begin{cases} \Delta u(M)=0,\ M\in D, \\ \dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}=f(P),\ P\in S \end{cases} \qquad (12)$$

может иметь классическое решение $u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D})$ только при выполнении условия

$$\int_S f(P)d\sigma_P=0. \qquad (13)$$

Доказательство. Применим вторую формулу Грина функциям $u(M)$ и $v(M)\equiv 1.$ **Ч.т.д.**

Замечание 2. С физической точки зрения формула (13) означает отсутствие источников (стоков) внутри D : поток через S равен нулю.

б) Существование производных всех порядков. Из формулы (9) (или (10)) следует существование у гармонической функции производных всех порядков внутри области гармоничности. Например, из формулы (9) следует, что

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r_{PM}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\right)d\sigma_P, \qquad (14)$$

для любой точки $M\in D$ и замкнутой поверхности $\Sigma\subset D$. Интеграл (14) - это собственный интеграл, зависящий от параметра M, по которому интеграл можно дифференцировать любое число раз.

в) Формула среднего значения. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области D и $M_0 \in D$ – какая-нибудь точка, лежащая внутри области D, то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^R} u(P)\, d\sigma_P, \qquad (15)$$

где $\Sigma_{M_0}^R$ – сфера, целиком лежащая в области D: $\Sigma_{M_0}^R \subset D$.

Доказательство. Применим формулу (9) к шару $\bar{K}_{M_0}^R = K_{M_0}^R + \Sigma_{M_0}^R$:

$$4\pi u(M_0) = \int\limits_{\Sigma_{M_0}^R} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right) d\sigma_P \qquad (16)$$

и учтем, что

$$\frac{1}{r_{PM_0}}=\frac{1}{R},\quad P\in\Sigma_{M_0}^{R};\qquad \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{R}}\frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P}d\sigma_P=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R}=-\frac{1}{R^2}. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) получаем (15). **Ч.т.д.**

Замечание 1. Если функция $u(M)$ гармоническая в области D и непрерывная в области $\bar{D}:\ u\left(M\right)\in C\left(\bar{D}\right)$, то для сферы $\Sigma_{M_0}^{R_0}$, касающейся изнутри поверхности S, доказательство было бы неверным, так как оно предполагает существование производных на границе S. Однако теорема верна для любого $R < R_0$, и, переходя к пределу при $R \to R_0$, получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{R_0}} u(P) d\sigma_P, \qquad (18)$$

Замечание 2. Для случая двух переменных формула среднего значения имеет вид

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_{M_0}^{R}} u(P)\, dl_P,$$

где $C_{M_0}^{R}$ – окружность, лежащая внутри области гармоничности функции $u(M)$.

2. Принцип максимума

Теорема (принцип максимума). Не равная тождественно постоянной функция $u(M)$ непрерывная в замкнутой связной области $\bar{D} = D + S$, и гармоническая внутри D, достигает своего максимального значения только на границе S области D.

Замечание. Область D называется связной, если любые две точки этой области можно соединить ломаной, целиком принадлежащей D.

Доказательство (от противного). По условию,

$$u(M) \neq const; \quad \Delta u(M) = 0, M \in D; \; u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D}).$$

Пусть $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке $M_0 \in D$:

$$u_0 = u(M_0) \geq u(M), \; M \in \bar{D}.$$

Построим сферу $\Sigma_{M_0}^R \subset D$. Так как, по предположению, $u_0 = u(M_0)$ – наибольшее значение $u(M)$ области D, то $u(M) \le u_0$, $M \in \Sigma_{M_0}^R$.

Воспользуемся формулой среднего значения (15):

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma_{M_0}^R} u(P)\, d\sigma_P \le \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma_{M_0}^R} u(M_0)\, d\sigma_P = u(M_0) = u_0. \quad (19)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы $u(M) < u(M_0)$, то по непрерывности функции $u(M)$ это неравенство будет выполнено в некоторой окрестности этой точки, в формуле (19) будет стоять строгое неравенство, что приведет к противоречию. Следовательно, на всей поверхности $\Sigma_{M_0}^R$ имеем $u(M) = u(M_0)$.

Если R_0^m –минимальное расстояние от точки M_0 до граничной поверхности S: $R_0^m = \min \rho\left(M_0, S\right)$, то $u\left(M\right) \equiv u\left(M_0\right)$ для всех точек, лежащих внутри шара $K_{M_0}^{R_0^m}$. Отсюда следует, что по непрерывности в точках $M^* \in \left\{\Sigma_{M_0}^{R_0^m} \cap S\right\}$ $u\left(M^*\right) \equiv u\left(M_0\right) = u_0$. Таким образом, если максимальное значение функции $u\left(M\right)$ достигается во внутренней точке M_0, то оно достигается и на границе.

Покажем теперь, что максимальное значение достигается **только на границе.** А именно покажем, что, если область D связная и максимальное значение достигается во внутренней точке области D, то $u\left(M\right) \equiv u\left(M_0\right) = u_0, \; M \in \bar{D}$.

Таким образом покажем, что в этом случае функция $u\left(M\right) = const$.

Пусть точка $M^{(0)}$ – другая точка области D отличная от точки M_0. Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L длины l, лежащей в области D. Это возможно в связи с тем, что область D является связной. Пусть M_1 есть последняя точка выхода ломаной L из шара $K_{M_0}^{R_0^m}$. В этой точке $u(M_1)=u(M_0)$. Опишем шар $K_{M_1}^{R_1^m}$, касающийся границы S. При этом мы предполагаем, что граница S достаточно гладкая и ее можно коснуться изнутри шаром конечного радиуса. Пусть M_2 есть последняя точка выхода ломаной L из шара $K_{M_1}^{R_1^m}$. В этой точке $u(M_2)=u(M_1)=u(M_0)$.

Продолжая этот процесс далее, получим, что не более, чем через n

шагов, где $n=\left[\dfrac{l}{R^m}\right]+1,\ R^m-$ минимальное расстояние от ломаной L до поверхности S, один из шаров захватит точку $M^{(0)}$ и получим, что $u\left(M^{(0)}\right)=u\left(M_0\right)$. В силу произвольности точки $M^{(0)}$ и гладкости функции $u(M)\in C\left(\bar{D}\right)$, получаем, что $u(M)\equiv const, M\in\bar{D}$. Полученное противоречие доказывает теорему. **Ч.т.д.**

Замечания.

1) Из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области гармоничности.

2) Аналогичным образом можно доказать принцип минимума.

3) Сформулируем две модификации **принципа сравнения**.

а) Если функции $u(M)$ и $v(M)$ гармонические в области D и непрерывны области $\bar{D}$ и если $u(P) \le v(P), P \in S,$ то $u(M) \le v(M), M \in D.$

Доказательство. Применим принцип максимума к функции $w = v - u.$ **ч.т.д.**

б) Если функции $u(M)$ и $v(M)$ гармонические в области D и непрерывны области $\bar{D}$ и если $|u(P)| \le v(P), P \in S,$ то $|u(M)| \le v(M), M \in D.$

Доказательство. По условию: $-v(P) \le u(P) \le v(P),\ P \in S.$

Из а) получаем: $-v(M) \le u(M) \le v(M),\ M \in D.$

4) **Для уравнения общего вида можно доказать аналог принципа максимума.**

Теорема. Пусть $k(M)>0$ и $q(M)>0$. Тогда любое решение уравнения

$$div\left(k\left(M\right)grad u\left(M\right)\right)-q\left(M\right)u\left(M\right)=0, \qquad (20)$$

принадлежащее классу: $u\left(M\right)\in C^{(2)}\left(D\right)\cap C^{(1)}\left(\bar{D}\right)$ во внутренних точках области D не может достигать локального положительного максимума или локального отрицательного минимума.

Доказательство. Пусть в точке $M_0\in D$ достигается локальный положительный максимум. Тогда в этой точке

$$u\left(M_0\right)>0;\ \ grad\ u\left(M_0\right)=0;\ \ \Delta u\left(M_0\right)\le 0. \qquad (21)$$

Рассмотрим уравнение (20) в точке M_0. Из формул (21) следует:

$$div\left(k\left(M_0\right)grad\ u\left(M_0\right)\right)-q\left(M_0\right)u\left(M_0\right)=$$
$$=k\left(M_0\right)\Delta u\left(M_0\right)+grad\ k\left(M_0\right)grad\ u\left(M_0\right)-q\left(M_0\right)u\left(M_0\right)<0.$$

Таким образом, уравнение (20) в точке M_0 не выполняется, что приводит к противоречию. Случай минимума доказывается аналогично.

Ч.т.д.

3. Постановка внутренних краевых задач

Пусть задана область $\bar{D} = D + S$, ограниченная гладкой поверхностью S, на которой задана функция $\mu(P)$. Общая краевая задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} div\big(k(M)\,grad\;u(M)\big) - q(M)u(M) = -f(M), \;\; M \in D, & (22) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P) = \mu(P), \;\; P \in S. & (23) \end{cases}$$

В частности задача Дирихле для уравнения Пуассона имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), \;\; M \in D, & (24) \\ u(P) = \mu(P), \;\; P \in S. & (25) \end{cases}$$

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (24), (25), если она:

1) $u(M)\in C^{(2)}(D)\cap C(\bar{D})$;

2) удовлетворяет уравнению (24) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (25).

Теорема 1. Классическое решение задачи (24), (25) единственно.

Доказательство (от противного). Пусть наряду с решением $u_1(M)$ задачи (24), (25) существует еще решение $u_2(M)$ и $u_1(M)\neq u_2(M)$. Рассмотрим их разность: $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Очевидно, что $\Delta v(M)=0,\ M\in D; v(P)=0,\ P\in S;\ v(M)\in C^{(2)}(D)\cap C(\bar{D})$. Применяя принцип максимума, получим, что $v(M)\leq 0$, а применяя принцип минимума, получим $v(M)\geq 0$, откуда следует, что $v(M)=0$.

Таким образом, получаем, что $u_1(M) \equiv u_2(M) -$ противоречие, которое доказывает теорему. **Ч.т.д.**

Теорема 2. Если граничные условия двух задач Дирихле (24), (25) различаются на ε , то и классические решения соответствующих задач во внутренних точках области D отличаются не больше, чем на ε.

Доказательство. Нужно доказать, что, если

$$\left|\mu_1(P) - \mu_2(P)\right| < \varepsilon, \quad P \in S,$$

то

$$\left|u_1(M) - u_2(M)\right| < \varepsilon, \quad M \in D.$$

Положим $v(M) = u_1(M) - u_2(M), \;\; w(M) = \varepsilon$ и применим принцип сравнения 2. **Ч.т.д.**

Замечание. Мы доказали единственность и устойчивость решения задачи Дирихле (24), (25). Доказательство существования классического решения этой задачи основывается на теории интегральных уравнений и будет дано позже.

Рассмотрим теперь общую задачу (22), (23).

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (22), (23), если она:

1) $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$;

2) удовлетворяет уравнению (22) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (23).

Докажем единственность классического решения третьей краевой задачи (22), (23) с граничным условием Робена.

Теорема 3. Пусть $k(M), q(M) > 0,\ \alpha(P) > 0,\ \beta(P) > 0.$ Тогда классическое решение задачи (22), (23) единственно.

Доказательство (от противного). Пусть $u_1(M) \neq u_2(M) -$ два решения задачи (22), (23). Рассмотрим их разность $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Функция $v(M)$ является классическим решением задачи:

$$\begin{cases} div\left(k(M)\, grad\ v(M)\right) - q(M)v(M) = 0,\quad M \in D, & (26) \\ \alpha(P)\dfrac{\partial v(P)}{\partial n_P} + \beta(P)v(P) = 0,\quad P \in S. & (27) \end{cases}$$

Умножим уравнение (26) на $v(M)$ и проинтегрируем по области D:

$$\int_D v(M)\, div\left(k(M)\, grad\ v(M)\right) dV - \int_D q(M)v^2(M)\, dV = 0$$

Применим к первому интегралу в правой части первую формулу Грина:

$$\int_S k(P)v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}d\sigma_P - \int_D k(M)\,grad^2 v(M)dV_M - \int_D q(M)v^2(M)dV_M = 0$$

Так как из граничного условия следует, что

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} = -\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v(P),$$

то окончательно получаем:

$$-\int_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v^2(P)d\sigma_P - \int_D k(M)\,grad^2 v(M)dV_M - \int_D q(M)v^2(M)dV_M = 0, \quad (28)$$

откуда, с учетом знаков коэффициентов, следует, что $v(M)\equiv 0,$ откуда $u_1(M)\equiv u_2(M)-$ противоречие, доказывающее теорему. **Ч.т.д.**

Замечание 1. Из теоремы 3 можно получить доказательство единственности решения задачи Дирихле $(\alpha = 0\ , \beta = 1)$.
При этом получаем, что $v(P) = 0,\ P \in S$ и формула (28) принимает вид

$$-\int_D k(M)\, grad^2 v(M) dV_M - \int_D q(M) v^2(M) dV_M = 0.$$

Если $q(M) \neq 0,$ то $v(M) \equiv 0,$ откуда следует противоречие, которое доказывает теорему.

Если $q(M) = 0,$ то $grad\ v(M) = 0,$ $v(M)$ равна постоянной $v(M) = C,$ и так как $v(P) = 0, P \in S,$ то $C = 0$ и $v(M) \equiv 0,$ откуда следует противоречие, которое доказывает теорему.

Отметим, что данное доказательство требует выполнения условия $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}),$ в то время как для классического решения задачи Дирихле достаточно выполнения условия $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$.

Замечание 2. В случае задачи Неймана $(\alpha = 1,\ \beta = 0)$ при $q = 0$ решение определяется с точностью до аддитивной постоянной. В самом деле так как

$$\int_S k(P) v(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P = 0$$

и, следовательно,

$$\int_D k(M)\, grad^2 v(M) dV_M = 0,$$

то

$$grad\ v(M) = 0,\ v(M) = C,\ u_1(M) - u_2(M) = C.$$

4. Внешние краевые задачи

Внешние краевые задачи по разному ставятся в двумерном и трехмерном случаях.

1) Внешняя задача Дирихле

а) Трехмерный случай

Рассмотрим вешнюю задачу Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D^e, & (29) \\ u(P) = \mu(P), P \in S, & (30) \\ u(M) \rightrightarrows 0, M \to \infty, & (31) \end{cases}$$

где D^e – трехмерная область, внешняя к замкнутой поверхности S, Условие (31) означает равномерную сходимость функции $u(M)$ к нулю на бесконечности.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (29)-(31), если она:

1) $u(M) \in C^{(2)}(D^e) \cap C(\bar{D}^e)$;

2) удовлетворяет уравнению (29) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (30);

4) равномерно стремится к нулю при M стремящемся к бесконечности.

Замечание. Условие (31) существенно для единственности решения. Пусть нужно решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне сферы Σ_0^R при постоянном граничном условии $u(P) = f_0$, $f_0 = const$. Если условие (31) не выполнено, то решениями будут функции $\bar{u} = f_0$, $\bar{\bar{u}} = f_0 \dfrac{R}{r}$, а также любая функция $\alpha\bar{u} + \beta\bar{\bar{u}},\ \alpha + \beta = 1.$ При выполнении условия (31) единственным решением будет функция $\bar{\bar{u}}$.

Теорема. Классическое решение задачи (29)-(31) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(M) \neq u_2(M)-$ два решения задачи (22), (23). Рассмотрим их разность $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Функция $v(M)$ является классическим решением задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, M \in D^e, & (32) \\ v(P) = 0, P \in S, & (33) \\ v(M) \Rightarrow 0, M \to \infty. & (34) \end{cases}$$

Из условия (34) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > 0$, что $\left|v(M)\right| < \varepsilon, r \geq R.$ Пусть $\bar{M} \in D^r = D^e \cap K_0^r,\ r \geq R.$ Применяя принцип максимума к области D^r, получим, что $\left|v(\bar{M})\right| < \varepsilon, \bar{M} \in D^r, r \geq R.$ Так как ε любое, то $\left|v(\bar{M})\right| = 0,\ \bar{M} \in D^r,\ r \geq R.$ Переходя к пределу при $r \to \infty$, получим $v(\bar{M}) = 0$ для любой точки $\bar{M} \in D^e$, откуда следует, что $u_1(\bar{M}) = u_2(\bar{M}),\ \bar{M} \in D^e -$ противоречие, которое доказывает теорему. **Ч.т.д.**

б) Двумерный случай

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0,\ M \in G^e, & (35) \\ u(P) = \mu(P),\ P \in C, & (36) \\ \left|u(M)\right| \leq N,\ M \in \bar{G}^e, & (37) \end{cases}$$

Где G^e – плоская область, внешняя относительно контура C: $\overline{G}^e = G^e + C$.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (35)-(37), если она:

1) $u(M) \in C^{(2)}(G^e) \cap C(\overline{G}^e)$;

2) удовлетворяет уравнению (35) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (36);

4) ограничена на бесконечности.

Замечание. Если в двумерном случае потребовать равномерное стремление решения к нулю на бесконечности, то для единственности решения этого будет достаточно. Но такое требование оказываются сверхдостаточным, то есть слишком сильным: задача может вообще не иметь решения.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r \ge 1, \\ u = 1, \ r = 1. \end{cases}$$

Решение имеет вид: $u(r) = C_1 \ln\frac{1}{r} + C_2,$ и если потребовать, чтобы $u(r)$ равномерно стремилось к нулю на бесконечности, то получим, что $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ и, следовательно, $u = 0.$ Но это решение при этом не выполняется граничное условие, и, таким образом, задача не имеет решений. Но у задачи существует ограниченное на бесконечности решение $u(r) = 1.$

Замечание. Условие ограниченности на бесконечности (37) требует при доказательстве теоремы единственности применения **метода барьерной функции.**

Теорема. Классическое решение задачи (35)-(37) единственное.

Доказательство. Пусть $u_1 \neq u_2 -$ два решения задачи (35)-(37): $\left|u_1(M)\right| \le N_1$, $\left|u_2(M)\right| \le N_2$. Рассмотрим их разность $v = u_1 - u_2$:

$\left|v\right| \le N = N_1 + N_2$.

Обозначим через $\bar{G}^i = G^i + C -$ внутреннюю область, а через $\bar{G}^e = G^e + C -$ внешнюю область, расположенную вне контура C.

Выберем точку $M_0 \in G^i$ и построим два круга с радиусами ρ и R; $U_{M_0}^{\rho}$, $U_{M_0}^{R}$, таким образом, что $\bar{U}_{M_0}^{\rho} \subset G^i \subset U_{M_0}^{R}$. Зададим барьерную функцию переменной M, зависящую от параметра R:

$$w(M;R) = N\frac{\ln\dfrac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln\dfrac{R}{\rho}}. \qquad (38)$$

Функция $w(M;R)$ является регулярной гармонической функцией в области G^e, а, следовательно, также и в области $\tilde{G}^e = G^e \cap U_{M_0}^R$, расположенной между контуром C и окружностью $C_{M_0}^R$.

Очевидно,

$$|v(M)| = 0,\ M \in C;\ \ |v(M)| < N, M \in C_{M_0}^R.$$

$$w(M) > 0,\ M \in C;\ \ w(M) = N,\ M \in C_{M_0}^R,$$

Применяя второй принцип сравнения к функциям $v(M),\ w(M)$, получим:

$$|v(M)| < w(M),\ M \in \tilde{G}^e.$$

Зафиксируем точку $\bar{M} \in \tilde{G}^e$ и перейдем к пределу при $R \to \infty$.

В результате получим: $\left|v\left(\bar{M}\right)\right| \to 0,\ R \to \infty$, откуда следует, что $v\left(\bar{M}\right) = 0,\ \bar{M} \in G^e$. Так как $\bar{M} \in G^e$ – произвольная точка, то

$$v\left(M\right) = 0,\ u_1\left(M\right) = u_2\left(M\right),\ M \in G^e.$$

Полученное противоречие доказывает теорему**. Ч.т.д.**

2) Понятие функции регулярной на бесконечности

а) Трехмерный случай

Определение. Функция трех переменных $u(x,y,z)$ называется **регулярной на бесконечности,** если при достаточно большом $r > r_0$ имеют место оценки (где A- постоянная)

$$\left|u\left(M\right)\right| < \frac{A}{r},\ \left|\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2},\ \left|\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2},\ \left|\frac{\partial u\left(M\right)}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2}. \qquad (39)$$

Таким образом, регулярная на бесконечности функция такая, что

$$u(M) \sim O\left(\frac{1}{r}\right), \;\; grad\; u(M) \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Имеет место теорема (см. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Издательство Московского университета, М.: 1999. С. 321-322):

Теорема. Если функция $u(x,y,z)$ гармоническая вне некоторой замкнутой поверхности и равномерно стремится к нулю на бесконечности, то она регулярна на бесконечности.

Покажем, что в случае трехмерной неограниченной области, внешней по отношению к замкнутой поверхности, формулы Грина справедливы для функций , регулярных на бесконечности.

Рассмотрим область $\bar{D}^e = D^e + S,$ внешнюю по отношению замкнутой поверхности S. Построим шар $\bar{K}_0^R = K_0^R + \Sigma_0^R$, содержащий поверхность S внутри себя. Пусть $\tilde{D}^R -$ область, заключенная между поверхностью S и сферой Σ_0^R : $\tilde{D}^R = D^e \cap K_0^R.$

Применим в области $\tilde{D}^R$ к регулярным на бесконечности функциям $u(M)$ и $v(M)$ первую формулу Грина:

$$\int_{\tilde{D}^R} u(M)\Delta v(M) dV_M = \int_S u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P + \int_{\Sigma_0^R} u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$

$$-\int_{\tilde{D}^R} grad\ u(M) grad\ v(M) dV_M. \qquad (40)$$

Оценим интеграл по сфере Σ_0^R, используя свойство регулярности

$$\left|\int_{\Sigma_0^R} u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}d\sigma_P\right| = \left|\int_{\Sigma_0^R} u(P)\left(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma\right)d\sigma_P\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\Sigma_0^R} \frac{A}{R}\frac{3A}{R^2}d\sigma_P\right| = \frac{3A^2}{R^3}4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Отсюда видно, что :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Sigma_0^R} u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}d\sigma_P = 0.$$

Интеграл

$$\int_{\tilde{D}^R} grad\ u(M)grad\ v(M)dV_M.$$

при $R \to \infty$ стремится к интегралу по всей области D^e. Этот интеграл существует, так как

$$grad\ u(M)\, grad\ v(M) \sim O\left(\frac{1}{R^4}\right).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\tilde{D}^R} grad\ u(M) grad\ v(M)\, dV_M = \int\limits_{D^e} grad\ u(M) grad\ v(M)\, dV_M ,$$

а значит и предел левой части равенства (40)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\tilde{D}^R} u(M)\,\Delta v(M) dV_M = \int\limits_{D^e} u(M)\,\Delta v(M) dV_M .$$

В результате, переходя в формуле (40) к пределу при $R \to \infty$,

приходим к первой формуле Грина:

$$\int_{D^e} u(M)\Delta v(M)dV_M = \int_S u(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}d\sigma_P - \int_{D^e} grad\ u(M) grad\ v(M)dV_M. \quad (40)$$

Из первой формулы Грина в неограниченной области следует вторая и третья формулы Грина.

б) Двумерный случай

Определение. Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Для гармонической в области G^e и регулярной на бесконечности функции при $r \geq r_0$ и постоянном A справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}. \qquad (41)$$

3) Внешняя задача Неймана

а) Трехмерный случай

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D^e, & (42) \\ \dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P} = \mu(P), P \in S, & (43) \\ u(M) \Rightarrow 0, M \to \infty. & (44) \end{cases}$$

Поскольку решение задачи (42)-(44) является функцией регулярной на бесконечности, то для него справедливы формулы Грина.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (42)-(44), если она:

1) $u(M) \in C^{(2)}(D^e) \cap C^{(1)}(\bar{D}^e)$;

2) удовлетворяет уравнению (42) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (43);

4) равномерно стремится к нулю при M стремящемся к бесконечности.

Теорема. В трехмерном случае решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа регулярное на бесконечности единственное.

Доказательство (от противного). Пусть $u_1(M) \neq u_2(M) -$ два решения задачи (42)-(43). Рассмотрим функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Так как $v(M) -$ регулярная на бесконечности функция, то применяя к ней первую формулу Грина и учитывая, что

$$\Delta v(M)=0,\ M\in D^e;\quad \frac{\partial v(P)}{\partial n_P}=0,\ P\in S,$$

получим:

$$\int\limits_{D^e} v(M)\Delta v(M)dV_M=\int\limits_S v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}d\sigma_P-\int\limits_{D^e} grad^2 v(M)dV_M,$$

$$\int\limits_{D^e} grad^2 v(M)dV_M=\int\limits_{D^e}\left(v_x^2(M)+v_y^2(M)+v_z^2(M)\right)dV_M=0.$$

Так как $v(M)\in C^{(1)}\left(\bar{D}^e\right)$, то

$$v_x(M)=v_y(M)=v_z(M)=0, M\in D^e\Rightarrow v(M)=const, M\in D^e.$$

Но так как $v(M)\Rightarrow 0,\ M\to\infty$, то $v(M)\equiv 0,\ u_1(M)=u_2(M)$ –

противоречие, доказывающее теорему. **Ч.т.д.**

б) Двумерный случай

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in G^e, & (45) \\ \dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P} = \mu(P), P \in C, & (46) \\ |u(M)| \le N, M \in \bar{G}^e, & (47) \end{cases}$$

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением задачи (45)-(47), если она:

1) $u(M) \in C^{(2)}(D^e) \cap C^{(1)}(\bar{D}^e)$;

2) удовлетворяет уравнению (45) в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию (46);

4) ограничена на бесконечности.

Имеет место теорема:

Теорема. В двумерном случае классическое решение внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа, регулярное на бесконечности, определяется с точностью до аддитивной постоянной.