МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова,
И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова,
Н.Е. Шапкина**

Функция Грина оператора Лапласа

Москва
Физический факультет МГУ
2018

Б о л ю б о в А. Н., Л е в а ш о в а Н. Т.,
М о г и л е в с к и й И. Е., М у х а р т о в а Ю. В.,
Ш а п к и н а Н. Е.
Функция Грина оператора Лапласа / Учебное пособие.
М.: Физический факультет МГУ, 2018.

Настоящее методическое пособие составлено на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по курсу «Методы математической физики» на физическом факультете МГУ. В пособии приведены подробные теоретические сведения, необходимые для решения задач Дирихле для оператора Лапласа с помощью функции Грина. Также рассмотрены различные методы построения функции Грина. В тексте содержится большое количество разобранных примеров решения задач математической физики с помощью функции Грина, и задачи для самостоятельного решения.

Рассмотренный материал может представлять интерес как для студентов и преподавателей физического ф-та МГУ, так и для более широкого круга читателей, в том числе аспирантов и сотрудников, специализирующихся в области математической физики и ее приложений.
Авторский коллектив выражает глубокую признательность А.А. Панину за внесенные ценные замечания.

Рецензенты:
д.ф.-м. н., профессор *Ю.А. Пирогов* (МГУ, физический ф-т, каф. фотоники и физики микроволн),
к.ф.-м. н., снс *В.В. Лопушенко* (МГУ, ф-т ВМК, каф. математической физики)

Боголюбов Александр Николаевич
Левашова Наталия Тимуровна
Могилевский Илья Ефимович
Мухартова Юлия Вячеславовна
Шапкина Наталья Евгеньевна

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Уравнение Пуассона и потенциал электростатического поля

Многие стационарные физические процессы, например, стационарное распределение температуры, распределение потенциала электростатического поля, стационарное течение жидкости описываются с помощью уравнения Пуассона. Рассмотрим математическую постановку внутренней краевой задачи для этого уравнения:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D \subset \mathbb{R}^3, \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = f(P), \quad P \in S, \quad |\alpha| + |\beta| > 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая область D, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S.

Введем понятие функции Грина для (1.1.1) на примере задачи электростатики. Потенциал $\varphi(M)$ электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона [1, 7]:

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho(M), \quad M \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1.2}$$

где $\rho(M)$ — объемная плотность заряда (здесь и далее используется система единиц СГС).

С другой стороны, из курса общей физики [13] известно, что потенциал системы точечных зарядов q_k в силу принципа суперпозиции может быть представлен в виде:

$$\varphi(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{r_{M_k M}}.$$

Здесь $r_{M_k M} = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и точкой $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в которой расположен заряд q_k (точкой источника).

Если же заряд распределен в некотором объеме V_0 с непрерывной плотностью $\rho(M)$, то суммирование заменяется интегрированием по данному объему:

$$\varphi(M) = \int\limits_{V_0} \frac{\rho(M')}{r_{_{M'M}}} dV_{M'}. \tag{1.1.3}$$

Здесь индекс M' у элемента объема означает, что интегрирование ведется по координатам точки M'.

Получив выражение (1.1.3) из физических соображений, мы должны ответить на вопрос: в каком смысле его можно считать решением уравнения (1.1.2), ведь оно удовлетворяет (1.1.2) не для любых функций $\rho(M)$, которые могут быть недостаточно гладкими.

Утверждение 1.1.1 [1] *Если плотность $\rho(M)$ непрерывна вместе со своими первыми производными, то функция (*1.1.3*) дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (*1.1.2*).*

Далее такие решения будем называть классическими. Дадим определение классического решения.

Определение 1.1.1 *Будем говорить, что функция $u(M)$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u(M) = -F(M) \tag{1.1.4}$$

*в классическом смысле, если она дважды непрерывно дифференцируема и при подстановке в уравнение (*1.1.4*) обращает его в верное равенство.*

Если же, например, функция $\rho(M)$ ограничена и интегрируема, но не является непрерывно дифференцируемой, то функция $\varphi(M)$ вида (1.1.3) только один раз непрерывно дифференцируема [1]. В этом случае уже недостаточно понятия классического решения дифференциального уравнения, и его нужно некоторым образом расширить. Для этого служит аппарат обобщенных функций и обобщенных решений, о котором речь пойдет несколько позже.

Естественно, описанный выше способ получения решения задачи в виде суперпозиции вкладов от элементарных источников применим не только в электростатике. Его можно обобщить на все задачи типа (1.1.1), если функции F и f удовлетворяют определенным условиям, которые будут сформулированы ниже.

Для этого используется аппарат функций Грина, которые описывают поле точечного источника в области D с соответствующими граничными условиями. Поэтому прежде всего мы рассмотрим поле точечного источника в неограниченном пространстве, а затем уже будем учитывать граничные условия для каждого конкретного типа задач.

§ 2. Плотность точечного источника

Возникает естественный вопрос: каким образом можно математически описать плотность точечного заряда в электростатике. Для того, чтобы выяснить, что происходит в точке M_0, в которую помещен единичный заряд, поступим следующим образом (в изложении будем следовать [9]). Предположим, что весь заряд равномерно распределен по шару $K(M_0, \varepsilon)$ с центром в M_0 и радиусом ε, и попробуем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Введем функцию

$$f_\varepsilon\left(M, M_0\right) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & M \in K\left(M_0, \varepsilon\right), \\ 0, & M \notin K\left(M_0, \varepsilon\right), \end{cases} \tag{1.2.1}$$

при этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon\left(M, M_0\right) dV_M = 1.$$

Если мы будем рассматривать в каждой паре точек M, M_0 предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon\left(M, M_0\right)$, то получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon\left(M, M_0\right) = \begin{cases} \infty, & M = M_0, \\ 0, & M \neq M_0. \end{cases}$$

При этом интеграл от функции $f_\varepsilon(M, M_0)$ при каждом фиксированном ε остается равным единице, а значит, имеет место предельный переход:

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon\left(M, M_0\right) dV_M.$$

Более того, для любой непрерывной в точке M_0 функции $\psi(M)$ предел при $\varepsilon \to 0$ от интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dV_M$ будет конечен и равен $\psi(M_0)$. В самом деле, из непрерывности функции $\psi(M)$ следует, что $\forall\sigma > 0\ \exists\varepsilon > 0$, такое, что для любых точек M, M_0 из области определения функции $\psi(M)$ при выполнении условия

$$0 < r_{MM_0} \leqslant \varepsilon$$

будет справедливо неравенство

$$|\psi(M) - \psi(M_0)| \leqslant \sigma.$$

Заметим, что если взять точку M внутри шара $K(M_0, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в M_0, то расстояние r_{MM_0} между M и M_0 не превосходит ε. Тогда

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\,\psi(M)\,dV_M - \psi(M_0)\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\psi(M)\,dV_M - \psi(M_0)\underbrace{\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}dV_M}_{=1}\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left(\psi(M) - \psi(M_0)\right)dV_M\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\psi(M) - \psi(M_0)\right|dV_M \leqslant$$
$$\leqslant \sigma \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}dV_M = \sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\,\psi(M)\,dV_M = \psi(M_0). \qquad (1.2.2)$$

Мы можем рассматривать интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\,\psi(M)\,dV_M$$

как результат действия функционала, за которым сохраним обозначение f_ε, на непрерывную функцию $\psi(M)$:

$$\langle f_\varepsilon, \psi \rangle \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon\left(M, M_0\right) \psi\left(M\right) dV_M.$$

Тогда равенство (1.2.2) означает, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle f_\varepsilon, \psi \rangle = \psi\left(M_0\right). \tag{1.2.3}$$

Определение 1.2.1 *δ-функцией Дирака называется функционал $\delta(M, M_0)$, действующий на любую непрерывную в точке M_0 функцию $\psi(M)$ по правилу*

$$\langle \delta(M, M_0), \psi(M) \rangle = \psi\left(M_0\right). \tag{1.2.4}$$

Таким образом, плотность единичного точечного заряда, расположенного в точке M_0, можно определить как $\delta(M, M_0)$. Тогда плотность точечного заряда величины q представляет собой функционал

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0).$$

Заметим, что для вычисления полного заряда нужно подействовать этим функционалом на функцию $\psi(x) \equiv 1$:

$$\langle \rho(M, M_0), 1 \rangle = q.$$

Если в области D распределен заряд с объемной плотностью $\rho(M)$, то полный заряд этой области можно получить по формуле:

$$Q = \int\limits_D \rho(M) dV = \langle \rho(M), 1 \rangle.$$

В декартовых координатах функционалы

$$\delta(M, M_0) \quad \text{и} \quad \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

действуют на любую непрерывную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функцию $\psi(M)$ одинаково, поэтому их можно считать равными.
В сферических координатах имеет место равенство

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0).$$

В полярных координатах

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0).$$

§ 3. Понятие обобщенной функции

Функционал $\delta(M, M_0)$, действующий на множестве непрерывных в точке M_0 функций, является примером так называемых обобщенных функций. Вообще говоря, любая обобщенная функция представляет собой функционал. Для того, чтобы ввести строгое определение пространства обобщенных функций, необходимо сперва определить пространство *основных функций* $\psi(M)$, на котором действуют эти функционалы. Сначала дадим определение финитной функции в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.3.1 *Ограниченная на $\mathbb{R}^n$ функция $\psi(M)$ называется финитной, если существует шар радиуса R*

$$\left\{M(x_1, x_2, ..., x_n) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leqslant R\right\},$$

вне которого функция $\psi(M)$ всюду равна 0. Замыкание множества $\{M : \psi(M) \neq 0\}$ называется носителем функции $\psi(M)$ и обозначается $\operatorname{supp}\psi$.

Множество $\operatorname{supp}\psi$ состоит из всех точек M, где $\psi(M) \neq 0$, и точек M, в любой окрестности которых найдется точка M', где $\psi(M') \neq 0$. Отметим, что $\psi(M) \equiv 0$ вне $\operatorname{supp}\psi$.

Определение 1.3.2 *Назовем совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций множеством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Определим сходимость в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

Определение 1.3.3 *Функциональная последовательность $\{\psi_k(M)\}$ из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ называется сходящейся к функции $\psi(M)$ из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, если последовательность функций $\{\psi_k(M)\}$ равномерно сходится к функции $\psi(M)$ вместе со всеми производными, то есть существует такой шар $U \subset \mathbb{R}^n$, что $\operatorname{supp}\psi_k \subset U$ $(k = 1, 2, ...)$, и для любой производной функции $\psi_k(M)$ выполнено*

$$D^\alpha \psi_k(M) \rightrightarrows D^\alpha \psi(M) \quad \textit{при } k \to \infty,$$

где $D^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, α_i *— целые неотрицательные числа.*

Определение 1.3.4 *Линейное пространство $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ с введенной таким образом сходимостью называется пространством основных функций.*

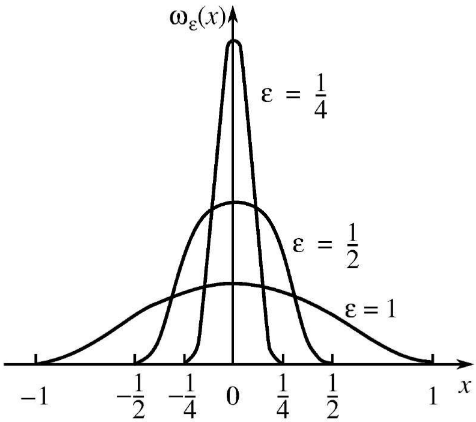

Рис. 1.3.1.

Утверждение 1.3.1 *Пространство основных функций не пусто. Например, ему принадлежит функция «шапочка» (рис.* 1.3.1*), которая часто используется на практике:*

$$\omega_\varepsilon (M, M_0) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left\{-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - R^2_{MM_0}}\right\}, & M \in K(M_0, \varepsilon), \\ 0, & M \notin K(M_0, \varepsilon), \end{cases} \tag{1.3.1}$$

где $K(M_0, \varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в точке M_0, а постоянная C_ε выбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \omega_\varepsilon (M, M_0)\, dV_M = 1.$$

Утверждение 1.3.2 *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для любой бесконечно гладкой функции $f(M)$, определенной в $\mathbb{R}^n$, можно построить основную функцию $\psi(M)$, совпадающую с $f(M)$ в области D.*

Действительно, это можно сделать, умножая функцию $f(M)$ на так называемую срезающую функцию $\eta(M)$. Срезающая функция обладает следующими свойствами: она является бесконечно гладкой, принимает значение 1 всюду в области D и быстро убывает до нуля вне области D.

Функцию $\eta(M)$ можно построить, например, следующим образом. Окружим границу ∂D области D эквидистантной поверхностью ∂D_ε, находящейся на расстоянии $d = \varepsilon$ от ∂D (см. рис. 1.3.2). Область внутри поверхности ∂D_ε назовем D_ε. Аналогично определим поверхность $\partial D_{2\varepsilon}$ и область $D_{2\varepsilon}$. Введем характеристическую функцию области D_ε:

$$\chi_\varepsilon(M) = \begin{cases} 0, & M \notin D_\varepsilon, \\ 1, & M \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\eta(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \chi_\varepsilon(M')\,\omega_\varepsilon(M', M)\,dV_{M'}, \tag{1.3.2}$$

где $\omega_\varepsilon(M', M)$ определена формулой (1.3.1).

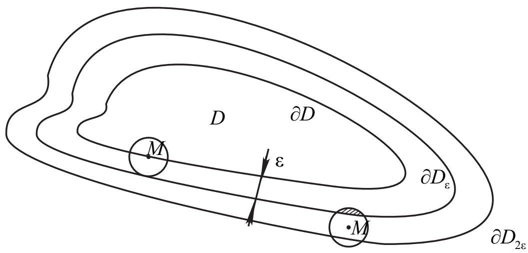

Рис. 1.3.2.

Функция $\omega_\varepsilon(M', M)$ отлична от нуля только в шаре $K(M, \varepsilon)$ с центром в точке M и радиусом ε. Если $M \in \overline{D}$, то $K(M, \varepsilon) \subset D_\varepsilon$, и интеграл (1.3.2) равен 1 в силу нормировки функции $\omega_\varepsilon(M', M)$. Если $M \in D_{2\varepsilon} \backslash \overline{D}$, то только часть шара $K(M, \varepsilon)$ попадает внутрь области D_ε (см. рис. 1.3.2), и поэтому $0 < \eta(M) < 1$. Если $M \notin D_{2\varepsilon}$, то шар $K(M, \varepsilon)$ и область D_ε не пересекаются, и $\eta(M) = 0$. Интеграл (1.3.2) зависит от координат точки M как от параметров и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию этих координат в силу бесконечной дифференцируемости подынтегральной функции [20]. Итак, функция

$$\psi(M) = \eta(M) \cdot f(M)$$

совпадает с функцией $f(M)$ в области D и принадлежит пространству основных функций.

Теперь, когда пространство основных функций задано, можно ввести понятие обобщенной функции.

Определение 1.3.5 *Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал f, действующий на пространстве основных функций $\mathfrak{D}$:*

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *и* $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{D}$

$$\langle f, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \alpha \langle f, \psi_1 \rangle + \beta \langle f, \psi_2 \rangle;$$

2) $\forall \{\psi_k\} \subset \mathfrak{D}$, $\psi_k \to \psi \in \mathfrak{D}$ *(в смысле введенной выше сходимости в* $\mathfrak{D}$*) при* $k \to \infty$

$$\langle f, \psi_k \rangle \to \langle f, \psi \rangle, \ k \to \infty.$$

Аргументы функций опущены для сокращения записи.

Введем операции сложения обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число *над полем комплексных чисел*:

$$\langle f+g,\psi\rangle = \langle f,\psi\rangle + \langle g,\psi\rangle\,,\ \forall\psi\in\mathfrak{D},$$

$$\langle \lambda\cdot f,\psi\rangle = \overline{\lambda}\,\langle f,\psi\rangle\,,\ \forall\psi\in\mathfrak{D}.$$

Как обычно, черта над λ означает комплексное сопряжение.

Множество всех обобщенных функций, определенных на $\mathfrak{D}$, с заданными на нем операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство $\mathfrak{D}'$.

Под сходимостью в пространстве обобщенных функций понимают слабую сходимость.

Определение 1.3.6 *Говорят, что последовательность обобщенных функций $f_n\in\mathfrak{D}'$ сходится к обобщенной функции $f\in\mathfrak{D}'$, если*

$$\langle f_n,\psi\rangle \to \langle f,\psi\rangle \ \text{при}\ n\to\infty$$

для любой функции $\psi\in\mathfrak{D}$.

Обобщенные функции делятся на регулярные и сингулярные.

Определение 1.3.7 *Обобщенная функция f называется регулярной, если существует функция $F(M)$, интегрируемая на любом замкнутом ограниченном множестве, такая что*

$$\langle f,\psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{F(M)}\psi(M)dV_M,\quad \forall\psi\in\mathfrak{D}. \qquad (1.3.3)$$

Поскольку функция $\psi(M)$ финитна, то интегрирование в формуле (1.3.3) ведется по ограниченной области $\operatorname{supp}\psi$.

Все прочие обобщенные функции называют сингулярными. Например, δ-функция — это сингулярная обобщенная функция [3, 4].

Говорят, что обобщенная функция f равна нулю в области G, если $\langle f,\psi\rangle = 0$ для всех $\psi\in\mathfrak{D}$, таких что носитель ψ принадлежит G. Если обобщенная функция f равна нулю в окрестности каждой точки области, то она равна нулю во всей этой области [3]. Объединение всех окрестностей, где $f=0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$, называемое нулевым множеством обобщенной функции f.

Определение 1.3.8 *Носителем обобщенной функции f называется дополнение $\mathcal{O}_f$ до $\mathbb{R}^n$:* $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n\backslash\mathcal{O}_f$. *Если* $\operatorname{supp} f$ —

ограниченное множество, то обобщенная функция f называется финитной.

Введем понятие производной обобщенной функции. Пусть $F(M) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(M) \in \mathfrak{D}$. В основе понятия обобщенной производной лежит формула, вытекающая из формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \psi dV = - \int\limits_{\mathbb{R}^n} F \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dV. \tag{1.3.4}$$

Интегрирование по пространству $\mathbb{R}^n$ ведется при $-\infty < x_i < + +\infty$, $i = \overline{1, n}$, а все подстановки на бесконечности обращаются в 0 за счет финитности функции ψ. Поскольку интегралы можно понимать как результат действия линейного непрерывного функционала на гладкую финитную функцию ψ в смысле определения 1.3.7, то равенство (1.3.4) можно переписать в виде:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \psi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle, \tag{1.3.5}$$

где f — обобщенная функция, порождаемая функцией $F(M)$, а $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ — обобщенная функция, порождаемая функцией $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$. Равенство (1.3.5) примем за определение производной обобщенной функции, как регулярной, так и сингулярной.

Определение 1.3.9 *Функционал, действующий на любую функцию $\psi \in \mathfrak{D}$ по правилу, задаваемому формулой (1.3.5), называется производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ обобщенной функции f.*

Аналогично можно определить производные любого порядка от обобщенных функций.

Определение 1.3.10 *Производной*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, α_i — целые неотрицательные числа, обобщенной функции f называется функционал $D^\alpha f$, действующий на любую функцию $\psi \in \mathfrak{D}$ по правилу:

$$\langle D^\alpha f, \psi \rangle = (-1)^\alpha \langle f, D^\alpha \psi \rangle .$$

Важным инструментом при решении задач математической физики является операция свертки. Для локально интегрируемых в $\mathbb{R}^1$ функций $F(x)$ и $G(x)$ их свертка $(F * G)(x)$ определяется как

$$(F * G)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)G(x-y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)G(y)dy = (G * F)(x). \tag{1.3.6}$$

В n-мерном случае для удобства записи введем обозначение $F(\vec{r}_M)$ для функции F координат точки $M \in \mathbb{R}^n$, где $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки M. Тогда для локально интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $F(\vec{r}_M)$ и $G(\vec{r}_Q)$ их свертку $(F * G)(x)$ можно определить как

$$(F * G)(\vec{r}_M) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\vec{r}_Q)G(\vec{r}_M - \vec{r}_Q)dV_Q =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(\vec{r}_M - \vec{r}_Q)G(\vec{r}_Q)dV_Q = (G * F)(\vec{r}_M) \tag{1.3.7}$$

при условии, что интеграл (1.3.7) существует и определяет локально интегрируемую в $\mathbb{R}^n$ функцию. Распространим понятие свертки на обобщенные функции.

Если интеграл (1.3.7) является локально интегрируемой функцией в $\mathbb{R}^n$, то свертка $F * G$ определяет регулярную обобщенную функцию, для которой используем обозначение $f * g$, такую что

$$\langle f * g, \psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{(F * G)(\vec{r}_\xi)}\psi(\vec{r}_\xi)dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G(\vec{r}_Q)F(\vec{r}_\xi - \vec{r}_Q)}dV_Q \right] \psi(\vec{r}_\xi)dV_\xi =$$

$$= \left\{ \vec{r}_M = \vec{r}_\xi - \vec{r}_Q \text{ при фиксированном } \vec{r}_Q,\ dV_M = dV_\xi \right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G(\vec{r}_Q)F(\vec{r}_M)}\psi(\vec{r}_M + \vec{r}_Q)dV_M dV_Q, \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3.8}$$

Так как $\psi(\vec{r}_M + \vec{r}_Q)$ не является финитной функцией в $\mathbb{R}^{2n}$, то интеграл (1.3.8) существует не для всех локально интегрируемых функций F и G.

Для дальнейшего рассмотрения сверток обобщенных функций нам понадобится понятие их *прямого произведения*. Для локально интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $F(\vec{r}_M)$ и $G(\vec{r}_Q)$ их произведение $F(\vec{r}_M)G(\vec{r}_Q)$ будет локально интегрируемой функцией в $\mathbb{R}^{2n}$. Эта функция определяет регулярную обобщенную функцию $f(\vec{r}_M)\cdot g(\vec{r}_Q)$, такую, что для любой функции $\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)$ из пространства основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$ имеют место равенства:

$$\langle f(\vec{r}_M)\cdot g(\vec{r}_Q),\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{F(\vec{r}_M)G(\vec{r}_Q)}\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)dV_M dV_Q =$$

$$= \langle f(\vec{r}_M),\langle g(\vec{r}_Q),\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\rangle\rangle = \langle g(\vec{r}_Q),\langle f(\vec{r}_M),\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\rangle\rangle. \tag{1.3.9}$$

Равенство (1.3.9) примем за определение прямого произведения $f(\vec{r}_M)\cdot g(\vec{r}_Q)$ обобщенных функций $f,g\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle f(\vec{r}_M)\cdot g(\vec{r}_Q),\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\rangle = \langle f(\vec{r}_M),\langle g(\vec{r}_Q),\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\rangle\rangle \tag{1.3.10}$$

для любой функции $\psi(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.

Введем теперь понятие свертки для пары произвольных обобщенных функций $f,g\in\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, не обязательно регулярных. Для этого нужно построить для них аналог равенства (1.3.8). Введем вспомогательную последовательность $\{\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\}$ основных функций из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$, *сходящуюся к 1 в* $\mathbb{R}^{2n}$. Это означает, что
1) для любого шара K в $\mathbb{R}^{2n}$ найдется такой номер N, что $\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)=1$ в шаре K для всех $k\geqslant N$;
2) функции $\{\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\}$ равномерно ограничены в $\mathbb{R}^{2n}$ вместе со всеми своими производными.

Тогда для любых локально интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $F(\vec{r}_M)$ и $G(\vec{r}_Q)$, для которых интеграл в равенстве (1.3.8) существует, это равенство можно переписать в виде:

$$\langle f*g,\psi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f(\vec{r}_M)\cdot g(\vec{r}_Q),\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\psi(\vec{r}_M+\vec{r}_Q)\rangle,\ \forall\psi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.3.11}$$

где $\{\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\}$, $k=1,2,...,$ — любая последовательность основных функций, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. При этом для каждого фиксированного номера k функция $\eta_k(\vec{r}_M,\vec{r}_Q)\psi(\vec{r}_M+\vec{r}_Q)$ принадлежит пространству основных функций $\mathbb{R}^{2n}$. Это позволяет принять равенство (1.3.11) за определение свертки обобщенных функций f и g.

Определение 1.3.11 *Сверткой $f * g$ обобщенных функций f и g из $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется функционал, действующий на произвольную функцию $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу*

$$\langle f * g, \psi \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle f(\vec{r}_M) \cdot g(\vec{r}_Q), \eta_k(\vec{r}_M, \vec{r}_Q) \psi(\vec{r}_M + \vec{r}_Q) \rangle,$$

если предел соответствующей числовой последовательности существует для $\forall \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\forall \{\eta_k(\vec{r}_M, \vec{r}_Q)\} \subset \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящейся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$.

Если функционал $f * g$ существует, то он принадлежит $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ [3].

Достаточные условия существования свертки двух обобщенных функций $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ устанавливает следующая теорема [3].

Теорема 1.3.1 *Пусть f — произвольная, а g — финитная обобщенные функции. Тогда свертка $f * g$ существует, принадлежит $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ и представима в виде:*

$$\langle f * g, \psi \rangle = \langle f(\vec{r}_M) \cdot g(\vec{r}_Q), \eta(\vec{r}_Q) \psi(\vec{r}_M + \vec{r}_Q) \rangle, \quad \forall \psi \in \mathfrak{D},$$

где η — любая основная функция, равная 1 в некоторой окрестности носителя функции g.

Свертка обобщенных функций обладает следующим важным свойством, которое используется при построении с ее помощью решений дифференциальных уравнений: если существует свертка $f * g$, то существуют и свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем справедливы равенства [3]

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g. \tag{1.3.12}$$

§ 4. Потенциал поля точечного источника. Фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае.

Пусть точечный заряд величины q помещен в точку M_0 неограниченного однородного пространства $\mathbb{R}^3$. Как было отмечено раньше, плотность точечного заряда дается формулой:

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0). \tag{1.4.1}$$

Формально записанное уравнение (1.1.2) для потенциала поля точечного заряда, в правую часть которого подставлено выражение (1.4.1), имеет вид

$$\Delta \varphi = -4\pi q \delta(M, M_0). \tag{1.4.2}$$

В правой части уравнения (1.4.2) стоит функционал, тогда левая его часть также должна представлять собой функционал. Этот функционал — обобщенная производная функции φ, и уравнение (1.4.2) нужно понимать следующим образом: для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M, M_0)\Delta\psi dV_M = -4\pi q\psi(M_0). \tag{1.4.3}$$

Покажем, что хорошо известный из электростатики потенциал поля точечного заряда

$$\varphi(M, M_0) = \frac{q}{r_{MM_0}} \tag{1.4.4}$$

удовлетворяет уравнению (1.4.3) во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — пространство основных функций, найдется число $R > 0$, такое что $\operatorname{supp}\psi \subset K(M_0, R)$, где $K(M_0, R)$ — шар радиуса R с центром в точке M_0. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M, M_0)\Delta\psi(M) dV_M = q \int\limits_{K(M_0,R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M. \tag{1.4.5}$$

Используя третью формулу Грина (А.1.7) (см. Приложение 1), получим:

$$\int\limits_{K(M_0,R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M =$$
$$= \int\limits_{\Sigma(M_0,R)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial\psi(P)}{\partial n_P} - \psi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}} \right) d\sigma_P - 4\pi\psi(M_0),$$

где $\Sigma(M_0, R)$ — сфера радиуса R с центром в точке M_0, $\vec{n}_P$ — вектор внешней нормали к сфере в точке P. Так как $\operatorname{supp}\psi \subset K(M_0, R)$, то финитная функция ψ вместе со всеми своими производными тождественно равна 0 на сфере $\Sigma(M_0, R)$, и поверхностный интеграл в последнем выражении обращается в нуль. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{r_{MM_0}} \Delta\psi(M) dV_M = -4\pi q\psi(M_0),$$

что и требовалось доказать.

Определение 1.4.1 *Фундаментальным решением оператора Лапласа называется всякая обобщенная функция, являющаяся решением уравнения*

$$\Delta\varphi = -\delta(M, M_0). \tag{1.4.6}$$

Очевидно, что фундаментальное решение определяется с точностью до произвольного решения однородного уравнения

$$\Delta\varphi = 0.$$

Положив величину q точечного заряда в формуле (1.4.4) равной $\frac{1}{4\pi}$, получим частное решение уравнения (1.4.6):

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{_{MM_0}}}.$$

Следовательно, функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}} + v, \tag{1.4.7}$$

где v — произвольная гармоническая функция [1], есть фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном пространстве.

Замечание 1.4.1 *Фундаментальное решение оператора Лапласа можно получить другим способом. Поскольку фундаментальное решение удовлетворяет уравнению* (1.4.6) *в смысле обобщенных функций, то в классическом смысле функция* φ *удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки* M_0. *Функция* φ *имеет вид:*

$$\varphi(M, M_0) = g(M, M_0) + v(M),$$

где $g(M, M_0)$ *— частное решение уравнения уравнения* (1.4.6), *зависящее только от расстояния* $r_{_{MM_0}}$ *между точками* M *и* M_0 *и имеющее особенность при* $r_{_{MM_0}} \to 0$, *а* $v(M)$ *— гармоническая функция. Для того, чтобы найти* $g(M, M_0)$, *поместим начало координат в точку* M_0. *В этой системе координат*

[1] Гармонической в области D называется функция, удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа в классическом смысле.

решение $g(M, M_0) = g(r_{MM_0}) = g(r)$ *обладает радиальной симметрией. Решая уравнение*

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right) = 0, \quad r > 0,$$

получим $g(r) = \dfrac{A}{r} + B$, *где* A *и* B *— произвольные постоянные. Выбираем решение, имеющее особенность в начале координат:*

$$g(r) = \frac{A}{r}.$$

Возвращаясь к исходным координатам, получаем:

$$g(M, M_0) = \frac{A}{r_{MM_0}}.$$

Остается найти нормировочный множитель A, *так чтобы* $g(M, M_0)$ *удовлетворяла уравнению (*1.4.6*). Это означает, что должно выполняться равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} g(M, M_0)\Delta\psi(M)dV_M = -\psi(M_0),$$

или же

$$A\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}}dV_M = -\psi(M_0). \tag{1.4.8}$$

*Сравнивая равенство (*1.4.8*) с третьей формулой Грина (*A.1.7*), получаем* $A = \dfrac{1}{4\pi}$.

Рассмотренный потенциал поля точечного заряда является примером обобщенного решения дифференциального уравнения. По аналогии с (1.4.3) можно ввести понятие обобщенного решения уравнения

$$\Delta u = -F(M). \tag{1.4.9}$$

Определение 1.4.2 *Будем называть функцию* $u(M)$ *обобщенным решением уравнения (*1.4.9*), если она удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(M)\cdot\Delta\psi(M)dV = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} F(M)\cdot\psi(M)dV \tag{1.4.10}$$

для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{D}$.

Понятие обобщенного решения уравнения шире понятия классического решения, так как функция $u(M)$ может быть недифференцируемой. Если же функция удовлетворяет уравнению (1.4.9) в классическом смысле, то она удовлетворяет ему и в обобщенном.

§ 5. Потенциал заряженной нити. Фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае.

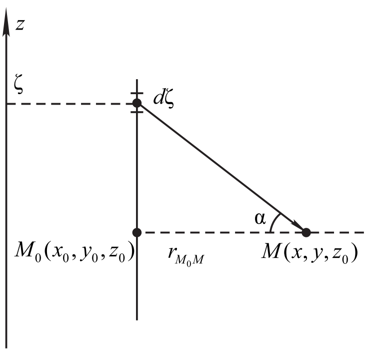

Рис. 1.5.3.

Найдем электростатический потенциал φ бесконечной тонкой заряженной нити, линейная плотность зарядов которой постоянна и равна e. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oz была параллельна нити. Так как нить бесконечна и плотность заряда постоянна, то распределение поля не будет зависеть от координаты z. Пусть нить проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Будем искать поле в плоскости $z = z_0$. Потенциал поля, создаваемого нитью в точке наблюдения $M(x, y, z_0)$, можно рассматривать как сумму потенциалов полей элементарных зарядов величины $ed\zeta$, имеющих координату $z = \zeta$, и непрерывно распределенных вдоль нити. Непосредственное вычисление потенциала поля бесконечной нити приводит к расходящемуся интегралу. Поэтому найдем сначала напряженность электростатического поля нити. Величина напряженности поля, создаваемого участком нити длины $d\zeta$, равна

$$dE = \frac{ed\zeta}{(z_0 - \zeta)^2 + r^2_{M_0M}},$$

где $r_{M_0M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние от точки M до нити (см. рис 1.5.3). Радиальная составляющая напряженности поля в точке $M(x, y, z)$ имеет вид:

$$dE_r = \frac{ed\zeta}{(z_0 - \zeta)^2 + r^2_{M_0M}} \cdot \cos\alpha = \frac{er_{M_0M}d\zeta}{\left((z_0 - \zeta)^2 + r^2_{M_0M}\right)^{3/2}}, \qquad (1.5.1)$$

так как $\cos\alpha = \dfrac{r_{M_0M}}{\sqrt{(z_0-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}}}$, а составляющая вдоль оси Oz равна

$$dE_z = \frac{ed\zeta}{(z_0-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}} \cdot \sin\alpha = \frac{e(\zeta - z_0)d\zeta}{\left((z_0-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}\right)^{3/2}}. \qquad (1.5.2)$$

Бесконечная нить создает в точке $M(x, y, z_0)$ поле, напряженность которого имеет вид:

$$\vec{E}(r_{M_0M}) = E(r_{M_0M}) \cdot \frac{\vec{r}_{M_0M}}{r_{M_0M}}.$$

В том, что z-компонента напряженности поля в любой точке M равна нулю, можно убедиться, непосредственно интегрируя выражение (1.5.2) вдоль прямой $-\infty < \zeta < +\infty$.

Согласно принципу суперпозиции, величину $E(r_{M_0M})$ можно вычислить по формуле:

$$E(r_{M_0M}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e\, r_{M_0M}\, d\zeta}{\left(r^2_{M_0M} + (z_0-\zeta)^2\right)^{3/2}}.$$

Последний интеграл вычисляется при помощи подстановки

$$\frac{\zeta - z_0}{r_{M_0M}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда

$$\frac{d\zeta}{r_{M_0M}} = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

В результате получаем

$$E(r_{M_0M}) = \frac{e}{r_{M_0M}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{2e}{r_{M_0M}}.$$

Для вычисления потенциала $\varphi\left(r_{M_0M}\right)$ нити воспользуемся тем, что $\vec{E}\left(r_{M_0M}\right) = -\nabla\varphi\left(r_{M_0M}\right)$, то есть $E\left(r_{M_0M}\right) = -\dfrac{d\varphi}{dr_{M_0M}}$, откуда

$$\varphi(M, M_0) = 2e\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + const. \qquad (1.5.3)$$

Замечание 1.5.1 *Поскольку потенциал φ, создаваемый равномерно заряженной бесконечной нитью, не зависит от координаты z, то задачу можно рассматривать как двумерную в любой плоскости, перпендикулярной нити. Сечение нити этой плоскостью может рассматриваться как точечный «заряд» в двумерном пространстве, потенциал которого дается формулой* (1.5.3).

Используя третью формулу Грина в двумерном случае (A.3.3) аналогично тому, как это сделано в трехмерном случае, можно показать, что потенциал (1.5.3) удовлетворяет уравнению

$$\Delta_M \varphi = -4\pi e \delta(M, M_0), \tag{1.5.4}$$

где $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ и $M = M(x, y)$.

Функция

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$$

является частным решением уравнения

$$\Delta_M \varphi = -\delta(M, M_0). \tag{1.5.5}$$

Фундаментальным решением оператора Лапласа в двумерном случае является функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M), \tag{1.5.6}$$

где $v(M)$ — любая гармоническая на плоскости функция.

§ 6. Ньютоновы потенциалы

Пусть $\vec{r}_M$ — радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathbb{R}^n$, где n равно 2 или 3, $\rho(\vec{r}_M)$ — обобщенная функция из $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Функции

$$V_2(\vec{r}_M) = \ln \frac{1}{|\vec{r}_M|} * \rho(\vec{r}_Q), \text{ если } n = 2,$$

$$V_3(\vec{r}_M) = \frac{1}{|\vec{r}_M|} * \rho(\vec{r}_Q), \text{ если } n = 3,$$

называются ньютоновыми потенциалами с плотностью ρ.

В этих выражениях

$$\ln\frac{1}{|\vec{r}_M|}=\ln\frac{1}{r_{MO}}=2\pi g_2(M,O) \text{ и } \frac{1}{|\vec{r}_M|}=\frac{1}{r_{MO}}=4\pi g_3(M,O)$$

— фундаментальные решения оператора Лапласа в двумерном и трехмерном случаях с точностью до нормировочного множителя, O — начало координат.

Если ρ — финитная обобщенная функция, то потенциал V_n, $n=2,3$, существует в $\mathfrak{D}'$ и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_2(\vec{r}_M)=-2\pi\rho(\vec{r}_M)$$

в двумерном случае и

$$\Delta V_3(\vec{r}_M)=-4\pi\rho(\vec{r}_M)$$

в трехмерном.

Покажем, что это действительно так. Рассмотрим, например, трехмерный случай. Пользуясь равенством (1.3.12), получаем

$$\Delta V_3(\vec{r}_M)=\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}_M|}*\rho(\vec{r}_Q)\right)=\left(\Delta\frac{1}{|\vec{r}_M|}\right)*\rho(\vec{r}_Q)=$$
$$=-4\pi\delta(M,O)*\rho(\vec{r}_Q)=-4\pi\rho(\vec{r}_M),$$

так как имеет место равенство

$$\langle\delta(M,O)*\rho(\vec{r}_Q),\psi(\vec{r}_M)\rangle=\langle\delta(M,O)\cdot\rho(\vec{r}_Q),\eta(\vec{r}_Q)\psi(\vec{r}_M+\vec{r}_Q)\rangle=$$
$$=\langle\rho(\vec{r}_Q),\langle\delta(M,O),\eta(\vec{r}_Q)\psi(\vec{r}_M+\vec{r}_Q)\rangle\rangle=$$
$$=\langle\rho(\vec{r}_Q),\eta(\vec{r}_Q)\psi(\vec{r}_Q)\rangle=\langle\rho,\psi\rangle,$$

то есть $\delta*\rho=\rho$, так как функция η равна единице в окрестности носителя финитной функции ρ. Для потенциала V_2 в двумерном случае рассуждения аналогичны.

Если $\rho(M)$ — абсолютно интегрируемая функция в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, и $\rho(M)\equiv 0$ вне области D, то потенциал $V_3(M)$ называется объемным потенциалом, а $V_2(M)$ — логарифмическим потенциалом. Потенциалы $V_n(M)$, $n=2,3$, в этом случае представляют собой локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$, причем

$$V_2(M)=\int\limits_D\rho(Q)\ln\frac{1}{r_{QM}}dS_Q,\qquad V_3(M)=\int\limits_D\frac{\rho(Q)}{r_{QM}}dV_Q.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что функция $\varphi(M, M_0) = 2e \ln \dfrac{1}{r_{_{MM_0}}}$ удовлетворяет уравнению $\Delta_{_M}\varphi = -4\pi e\delta(M, M_0)$.
2. Докажите, что $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством.
3. Докажите, что множество $\mathfrak{D}'$ всех обобщенных функций, определенных на $\mathfrak{D}$, с заданными на нем операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство.
4. Докажите, что классическое решение уравнения $\Delta u = -F$ удовлетворяет ему и в обобщенном смысле.

Глава 2

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ

§ 1. Внутренние трехмерные задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $D \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова [1]) S:

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D, \tag{2.1.1}$$
$$u(P)|_S = f(P), \quad P \in S. \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1 *Будем называть классическим решением задачи* (2.1.1-2.1.2) *функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (2.1.1) *в области D и граничному условию* (2.1.2).

Утверждение 2.1.1 *Если выполнены условия $F \in L_2(D) \cap$ $\cap\, C^{(1)}(D)$ и $f \in C(S)$, то задача* (2.1.1-2.1.2) *имеет един-*

---

[1]) Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполнены условия:
— в каждой точке поверхности S существует нормаль (или касательная плоскость);
— существует такое число d, что прямые, параллельные нормали в точке P поверхности S, пересекают не более одного раза часть поверхности S, лежащую внутри шара радиуса d с центром в точке P;
— угол γ между нормалями в двух разных точках поверхности, находящихся внутри одного шара радиуса d с центром в точке $P \in S$, удовлетворяет следующему условию: $\gamma \leqslant Ar^{\delta}$, где r — расстояние между этими точками, A — некоторая конечная постоянная и $0 < \delta \leqslant 1$.

Свойства поверхности Ляпунова:
— если S — поверхность Ляпунова, тогда справедливо $S \in C^1$, обратное, вообще говоря, не верно.
— если $S \in C^2$, тогда S является поверхностью Ляпунова с $\delta = 1$.

ственное классическое решение [1]. Для того, чтобы найти это решение, воспользуемся второй формулой Грина [3]:

$$\int\limits_D \big(G(Q,M)\Delta_Q u(Q) - u(Q)\Delta_Q G(Q,M)\big)\,dV_Q = \\ = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P, \tag{2.1.3}$$

где $G(Q,M) = \dfrac{1}{4\pi r_{QM}} + v$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, определенное формулой (1.4.7).

Поскольку

$$\Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M),$$

из (2.1.3) получаем:

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q. \tag{2.1.4}$$

На границе области $u(P)|_S = f(P)$, а внутри области $\Delta u(Q) = = -F(Q)$, поэтому

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P + \\ + \int\limits_D F(Q)G(Q,M) dV_Q. \tag{2.1.5}$$

В правой части равенства (2.1.5) остается одно неизвестное слагаемое

$$\int\limits_S G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dS_P,$$

содержащее производную искомого решения по нормали к границе, которое не выражается через входные данные задачи. Однако фундаментальное решение $G(Q,M)$ оператора Лапласа определяется с точностью до произвольной гармонической функции v, поэтому можно выбрать ее такой, чтобы $G(P,M) = 0$ в любой точке $P \in S$. Для этого функция $v = v(Q, M)$ должна быть решением задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_Q v(Q, M) = 0, \quad Q, M \in D, \\ v(P, M)|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P \in S, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

где производные берутся по координатам точки Q, а координаты точки M играют роль параметров. Тогда в любой внутренней точке M области D имеет место равенство:

$$u(M) = -\int\limits_S f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} dS_P + \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dV_Q. \tag{2.1.7}$$

Это выражение является классическим решением задачи (2.1.1)-(2.1.2), если $F \in C^{(1)}(D)$ и $f \in C(S)$ [1].

Определение 2.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области D с замкнутой границей S ($\overline{D}$ — область D вместе с границей) будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная при $Q \in \overline{D}$ для каждой фиксированной точки $M \in D$;
2) $G(P, M)|_{P \in S} = 0$ для каждой фиксированной точки $M \in D$.

Итак, из определения функции Грина $G(Q, M)$ следует, что она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q, M) = -\delta(Q, M), \quad Q, \ M \in D, \\ G(P, M)|_S = 0, \quad P \in S. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Утверждение 2.1.2 *Если граница S области D является поверхностью Ляпунова, то решение задачи Дирихле* (2.1.8) *существует и единственно* [1].

Из постановки задачи (2.1.8) следует, что функция Грина оператора Лапласа $G(Q, M)$ определяется только областью D. С помощью функции Грина можно получить решения задач вида (2.1.1)-(2.1.2) в квадратурах, используя интегральную формулу (2.1.7).

Поясним физический смысл функции Грина на примере электростатики. Пусть в точку M области D, ограниченной идеально проводящей заземленной поверхностью S, помещен точечный заряд $+q$. В соответствии с принципом суперпозиции потенциал φ электростатического поля в точке Q внутри D складывается из потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_0(Q, M) = \frac{q}{r_{QM}}$$

и потенциала

$$v(Q, M) = \int\limits_S \frac{\sigma(P, M)}{r_{PQ}} dS_P \tag{2.1.9}$$

поля индуцированных на внутренней стороне поверхности S зарядов плотности $\sigma(P, M)$, где

$$\int\limits_S \sigma(P, M) dS_P = -q.$$

Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma(P, M)$ зависит от координат точки M расположения точечного заряда, однако интеграл по поверхности от этой функции представляет собой полный индуцированный заряд и от координат точки M уже не зависит. Итак, внутри области D

$$\varphi(Q, M) = \frac{q}{r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q, M \in D,$$

причем

$$\Delta_Q v(Q, M) = 0, \quad Q, M \in D,$$

поскольку $v(Q, M)$ — потенциал поля, порождаемого зарядами, распределенными по поверхности. На поверхности S суммарный потенциал равен 0, так как она заземлена. Таким образом, функция Грина $G(Q, M)$ представляет собой потенциал поля, порождаемого в точке Q точечным зарядом величины $\dfrac{1}{4\pi}$, помещенным в точку M, если поверхность S заземлена.

Утверждение 2.1.3 *Функция Грина симметрична относительно перестановки точек Q и M [1]:*

$$G(Q, M) = G(M, Q).$$

Симметричность функции Грина является отражением физического принципа взаимности: заряд, помещенный в точку M, создает в точке наблюдения Q поле с таким же потенциалом, который создал бы в точке M этот же заряд, если бы он был помещен в точку Q.

Следовательно, в формуле (2.1.7) поле $u(M)$ есть результат суперпозиции полей зарядов, распределенных в точках Q области D и в точках P на ее границе S. Правая часть в равенстве (2.1.7) состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет собой поверхностный потенциал (см. [1]), а второе — объемный потенциал поля зарядов, распределенных в области D с объемной плотностью $F(Q)$.

Замечание 2.1.1 *Потенциал* (2.1.9) *называется поверхностным потенциалом простого слоя. Подробнее о поверхностных потенциалах см.* [1].

§ 2. Внешние трехмерные задачи

Пусть область D_e — внешняя область по отношению к ограниченной области D с замкнутой границей S, являющейся поверхностью Ляпунова. Для того, чтобы решение краевой задачи для уравнения Пуассона или Лапласа во внешней области D_e было единственным, в постановке задачи помимо краевого условия на поверхности S следует добавить условие на бесконечности. Таким условием является требование регулярности решения на бесконечности.

Определение 2.2.1 *В трехмерном случае функция $u(M)$ называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом $r \geqslant r_0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, выполнены неравенства*

$$|u| \leqslant \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{A}{r^2},$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Гармоническая в области D_e трехмерного пространства функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности [7].

Определение 2.2.2 *Будем называть регулярным на бесконечности классическим решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона функцию, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e, непрерывную в области $\overline{D_e}$ ($\overline{D_e}$ — область D_e вместе с границей S), регулярную на бесконечности, удо-*

влетворяющую в классическом смысле уравнению Пуассона в области D_e и граничному условию.

Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле:

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D_e, \tag{2.2.1}$$

$$u(P)|_S = f(P), \quad P \in S, \tag{2.2.2}$$

$$u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \tag{2.2.3}$$

Утверждение 2.2.1 *Если функция $F(M)$ финитна и непрерывно дифференцируема в D_e, а функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S, то существует единственное классическое решение задачи (*2.2.1-2.2.3*)* [1] .

Для регулярных на бесконечности функций во внешних областях остаются справедливыми формулы Грина [1]. Это позволяет построить решение задачи (2.2.1-2.2.3) в квадратурном виде с помощью функции Грина аналогично случаю внутренней задачи.

Определение 2.2.3 *Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области $\overline{D_e}$, будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in$ $\in D_e$, непрерывная при $Q \in \overline{D_e}$ для каждой фиксированной точки $M \in D_e$;
2) $G(P,M)|_{P\in S} = 0$ для каждой фиксированной точки $M \in D_e$;
3) $G(Q,M)$ как функция координат точки $Q \in D_e$ регулярна на бесконечности для каждой точки $M \in D_e$.

Решение задачи (2.2.1) - (2.2.3) может быть найдено по формуле, аналогичной (2.1.7):

$$u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q, \tag{2.2.4}$$

где функция Грина $G(Q,M)$ для каждой фиксированной точки M является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D_e, \\ G(P,M)|_S = 0, \quad P \in S, \\ G(Q,M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

В выражении (2.2.4) нормаль $\vec{n}_P$ является внешней по отношению к области D_e.

Для того, чтобы построить функцию $G(Q,M)$, достаточно решить задачу для гармонического слагаемого $v(Q,M)$:

$$\begin{cases} \Delta_Q v(Q,M) = 0, \quad Q, M \in D_e, \\ v(P,M)|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P \in S, \\ v(Q,M) \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности}, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

где координаты точки M выступают в роли параметров; символ $\rightrightarrows 0$ означает регулярное стремление к нулю.

§ 3. Методы построения функции Грина задачи Дирихле

3.1. Метод электростатических изображений. Для задач (2.1.6) и (2.2.6) выполнена теорема существования и единственности классического решения. Поэтому, если удастся получить каким-либо способом гармоническую функцию v, удовлетворяющую поставленным граничным условиям, то функция $G(M,M_0) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r_{MM_0}} + v$ представляет собой единственное решение задачи (2.1.8) во внутренней области или задачи (2.2.5) во внешней области.

Для ряда областей весьма эффективным способом построения функции Грина задачи Дирихле является применение метода электростатических изображений. Воспользуемся тем, что одной из физических интерпретаций функции Грина $G(M,M_0)$ задачи Дирихле в области D является потенциал поля, создаваемого в точке $M \in D$ точечным зарядом величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$, расположенным в точке $M_0 \in D$, если граница S области D является заземленной идеально проводящей поверхностью.

Предположим, что вне области D можно расположить фиктивные электрические заряды таким образом, чтобы суммарный потенциал поля, создаваемого зарядом $q = \dfrac{1}{4\pi}$, расположенным в точке M_0, и этими фиктивными зарядами, на границе S обращался в нуль. Такие фиктивные заряды называются электростатическими изображениями заряда, помещенного в точку

M_0. Потенциал поля, порожденного зарядами, находящимися вне области, представляет собой гармоническую внутри области D функцию v, удовлетворяющую граничному условию

$$v|_S = -\frac{1}{4\pi r_{_{PM_0}}}, \quad P \in S, \tag{2.3.1}$$

то есть искомое гармоническое слагаемое в функции Грина.

В следующем примере рассмотрим построение функции Грина как потенциала точечного заряда при наличии проводящей поверхности.

Пример 2.3.1. *Найдите потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q, помещенным в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 > 0$, в вакууме в верхнем полупространстве над плоскостью $z = 0$, если эта плоскость представляет собой идеальный заземленный проводник.*

Решение. Потенциал $\varphi(M, M_0)$ в точке $M(x, y, z)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M \varphi = -4\pi q \delta(M, M_0), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, +\infty), \\ \varphi|_{z=0} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

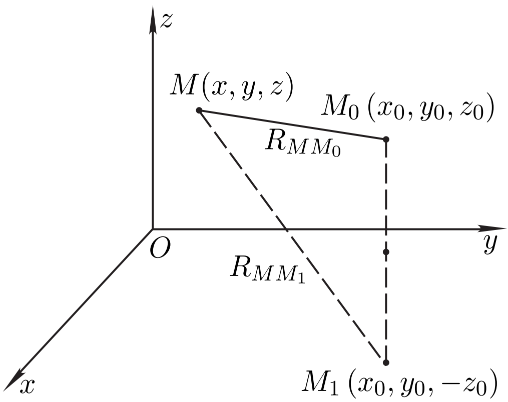

Рис. 2.3.1.

Потенциал φ в соответствии с принципом суперпозиции представляет собой сумму потенциала точечного заряда q, расположенного в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ свободного пространства, и потенциала поля индуцированных на плоскости $z = 0$ зарядов. Потенциал поля индуцированных зарядов можно найти методом электростатических изображений. Этот потенциал совпадает с потенциалом фиктивного точечного заряда $-q$, помещенного в точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, симметричную $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $z = 0$ (рис. 2.3.1).

Функция

$$\varphi(M, M_0) = q \cdot \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right) =$$
$$= q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right. \qquad (2.3.3)$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right)$$

удовлетворяет уравнению в задаче (2.3.2) и граничному условию. Функция

$$v = -\frac{q}{r_{MM_1}}$$

является гармонической в верхнем полупространстве и удовлетворяет граничному условию

$$v|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}}, \quad P = P(x, y, 0),$$

так как $r_{PM_0} = r_{PM_1}$ для любой точки $P(x, y, 0)$, принадлежащей плоскости $z = 0$, и равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Найденный потенциал в случае $q = \dfrac{1}{4\pi}$ представляет собой функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в верхнем полупространстве:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right. \qquad (2.3.4)$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right).$$

Воспользуемся найденной в рассмотренном примере функцией Грина для нахождения плотности индуцированного на поверхности $z = 0$ заряда.

Пример 2.3.2. *Найдите плотность поверхностных зарядов $\sigma(x, y)$, индуцированных на идеально проводящей заземленной плоскости $z = 0$ в вакууме зарядом $+q$, помещенным в точку*

M_0 верхнего полупространства.

Решение. Известно [13], что на границе S двух сред скачок нормальной по отношению к этой границе составляющей вектора $\vec{D}$ равен $4\pi\sigma$. Если первая среда является идеально проводящей, то поле в ней равно нулю, и поэтому

$$[D_n]\big|_S = (D_{2n} - D_{1n})\big|_S = D_{2n}\big|_S = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S = 4\pi\sigma.$$

При этом нормаль $\vec{n}$ направлена из первой среды во вторую. Таким образом, если область D с границей S заполнена идеальным проводником, то плотность индуцированного на границе S поверхностного заряда равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S,$$

где $\vec{n}$ — внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

Для плоской границы $z = 0$ получаем

$$\sigma(x,y) = -\,\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{2.3.5}$$

Подставляя в формулу (2.3.5) выражение (2.3.3) для потенциала $\varphi(M, M_0)$, находим

$$\sigma(x,y) = -\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{z_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}}.$$

Используем найденную выше функцию Грина для построения решения краевой задачи для уравнения Лапласа.

Пример 2.3.3. *Найдите потенциал поля, создаваемого в верхнем полупространстве $z > 0$ непроводящей плоскостью, на которой задан потенциал $f(x,y)$, такой что $f(x,y) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ при $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$.*

Решение. Необходимо решить задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x,y \in \mathbb{R}^2, \quad z \in (0,+\infty), \\ u|_{z=0} = f(x,y), \quad x,y \in \mathbb{R}^2, \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to +\infty, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Непосредственное применение формулы (2.2.4) в данной задаче неправомерно, поскольку плоскость $z = 0$ не является ограниченной поверхностью. Тем не менее, в данной задаче можно получить ее аналог. Для этого воспользуемся формулой (2.1.4) в области, ограниченной плоскостью $z = 0$ и полусферой $\Sigma_{1/2}(O, R)$ с центром в начале координат и радиусом R:

$$\begin{aligned} u(M) = -\int\limits_{U_R} f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \\ + \int\limits_{\Sigma_{1/2}(O,R)} \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Здесь U_R — круг с центром в начале координат и радиусом R, лежащий в плоскости $z = 0$. Рассмотрим предел выражения в правой части равенства (2.3.7) при $R \to +\infty$.

Так как для гармонической функции u равномерное стремление к нулю на бесконечности эквивалентно ее регулярности на бесконечности, то для любой точки $P \in \Sigma_{1/2}(O, R)$ при достаточно большом R справедливы оценки:

$$|u(P)| = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \left|\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right|_{\Sigma_{1/2}(O,R)} = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Из явного вида (2.3.4) функции Грина $G(P, M)$ следует, что

$$|G(P,M)| = O\left(\frac{1}{r_{PM}}\right) = O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\left|\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_{\Sigma_{1/2}(O,R)} = O\left(\frac{1}{r_{PM}^2}\right) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

для любой точки $P \in \Sigma_{1/2}(O, R)$.

Следовательно,

$$G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} = O\left(\frac{1}{R^3}\right),$$

откуда получаем

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Sigma_{1/2}(O,R)} \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P = 0.$$

Поскольку $f(P) = O\left(\frac{1}{R}\right)$ при достаточно большом R, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{U_R} f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dS_P = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dS_P.$$

В данном случае внешняя нормаль $\vec{n}_P$ направлена против оси Oz, поэтому решение задачи можно записать в интегральном виде при помощи построенной выше функции Грина

$$G(M', M) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2}}\right)$$

следующим образом:

$$u(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(P,M)}{\partial z'}\Big|_{z'=0} f(x',y')dx'dy', \tag{2.3.8}$$

где $M = M(x,y,z)$ и $P = P(x',y',0)$.

Вычислим производную функции Грина по переменной z':

$$\frac{\partial G}{\partial z'}\Big|_{z'=0} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z'-z}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right)^{3/2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{z'+z}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{z'=0} =$$
$$= \frac{z}{2\pi\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.3.8), получим решение задачи (2.3.6):

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x',y')dx'dy'}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2\right)^{3/2}}, \quad z > 0. \tag{2.3.9}$$

Для решения следующей задачи воспользуемся функцией Грина (2.3.4) верхнего полупространства.

Пример 2.3.4. *Найдите потенциал поля, создаваемого отрезком длины L бесконечно тонкой равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда e, помещенным над идеально проводящей заземленной плоскостью. Отрезок составляет с плоскостью угол α. Расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h.*

Решение. Выберем удобную систему координат. Пусть проводящая плоскость совпадает с координатной плоскостью $z = 0$, а отрезок целиком расположен в плоскости Oyz, причем ось Oz проходит через граничную точку M_1 отрезка, расположенную ближе к плоскости $z = 0$ (см. рис 2.3.2). Пусть M_0 — любая точка отрезка. Обозначим через ξ длину отрезка M_1M_0. Координаты точки M_0 выражаются через величину ξ по формулам:

$$x_0 = 0,\ y_0 = \xi\cos\alpha,\ z_0 = h + \xi\sin\alpha.$$

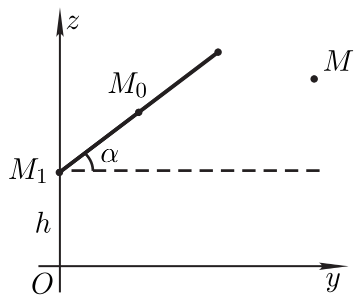

Рис. 2.3.2.

Потенциал поля $\varphi(x, y, z)$, создаваемого отрезком в присутствии заземленной плоскости в точке наблюдения $M(x, y, z)$, можно рассматривать как сумму потенциалов полей элементарных зарядов величины $ed\xi$, непрерывно распределенных вдоль рассматриваемого отрезка, и их изображений в плоскости $z = 0$:

$$\varphi(x, y, z) = e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + (y - \xi\cos\alpha)^2 + (z - h - \xi\sin\alpha)^2}} -$$

$$-e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + (y - \xi\cos\alpha)^2 + (z + h + \xi\sin\alpha)^2}} =$$

$$= e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{A_+^2 - B_+^2 + (\xi - B_+)^2}} - e\int_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{A_-^2 - B_-^2 + (\xi - B_-)^2}},$$

где
$$A_{\pm}^2 = x^2 + y^2 + (z \mp h)^2, \quad B_{\pm} = y\cos\alpha \pm (z \mp h)\sin\alpha.$$
Для вычисления интегралов воспользуемся табличной формулой:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\,\right| + C.$$
В результате получаем:
$$\varphi(x,y,z) = e\ln\left|\frac{L - B_+ + \sqrt{A_+^2 - B_+^2 + (L-B_+)^2}}{L - B_- + \sqrt{A_-^2 - B_-^2 + (L-B_-)^2}}\right| - e\ln\left|\frac{A_+ - B_+}{A_- - B_-}\right|.$$

Пример 2.3.5. *Найдите потенциал поля точечного заряда q, расположенного в заданной точке M_0 области, ограниченной двумя параллельными идеально проводящими заземленными плоскостями.*

Решение. Пусть расстояние между плоскостями равно l. Выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с одной из граничных плоскостей (рис. 2.3.3). Пусть заряд помещен в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $M(x,y,z)$ — точка наблюдения.

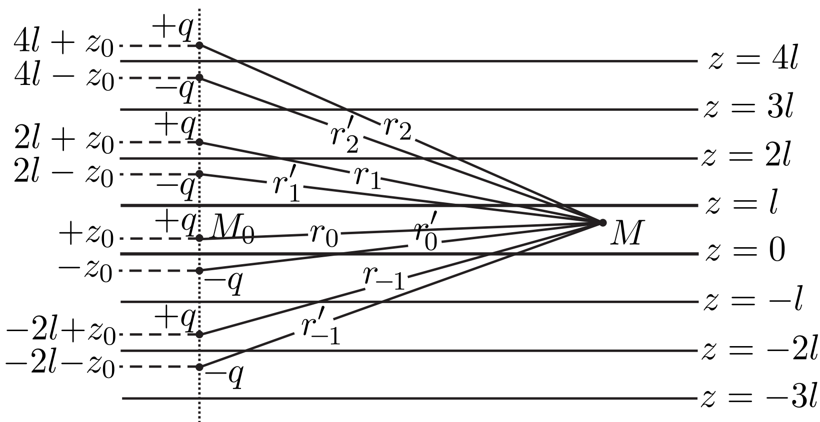

Рис. 2.3.3.

Математическая постановка задачи имеет вид:
$$\Delta u(M) = -4\pi q\delta(M, M_0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; z \in (0,l), \tag{2.3.10}$$
$$u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0. \tag{2.3.11}$$

Решение этой задачи представляет собой сумму фундаментального решения (потенциала точечного заряда, помещенного в точку M_0) и гармонической функции v:

$$u(M) = \frac{q}{r_{MM_0}} + v(M), \quad \Delta v(M) = 0.$$

Гармоническую функцию v, такую чтобы искомая функция u удовлетворяла граничным условиям задачи, можно найти методом последовательных электростатических отображений в плоскостях $z = 0$ и $z = l$.

Шаг 1. Поместим в точку $(x_0, y_0, -z_0)$ фиктивный заряд величины $-q$ симметрично заряду q относительно плоскости $z = 0$. Функция

$$u_0(M) = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right),$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_0' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2},$$

удовлетворяет уравнению (2.3.10) и условию $u_0 = 0$ при $z = 0$. Однако условие $u_0 = 0$ при $z = l$ не выполняется.

Шаг 2. Построим отображение системы зарядов, реального, расположенного в точке (x_0, y_0, z_0), и фиктивного, расположенного в точке $(x_0, y_0, -z_0)$, относительно плоскости $z = l$, меняя знаки у отображенных зарядов на противоположные. В результате получим систему четырех зарядов. Функция

$$u_1(M) = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) + q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - (2l + z_0))^2},$$

$$r_0' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - (2l - z_0))^2}$$

удовлетворяет уравнению (2.3.10) и условию $u_1 = 0$ при $z = l$, но не обращается в нуль при $z = 0$.

Последовательно повторяя отображения относительно плоскостей $z = 0$ и $z = l$, получим решение в виде ряда

$$u(M) = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) + q \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}\right), \tag{2.3.12}$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}\,,$$

$$r_n' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}\,.$$

Покажем, что функция

$$v(M) = -\frac{q}{r_0'} + q \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}\right) \tag{2.3.13}$$

является дважды непрерывно дифференцируемой в области $z \in (0, l)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа в классическом смысле, является непрерывной вплоть до границы $z = 0$ и $z = l$, а функция $u(M) = \dfrac{q}{r_0} + v(M)$ удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле при $z = 0$ и $z = l$.

Прежде всего, покажем, что ряд в (2.3.13) сходится равномерно. Пусть

$$a_n(x, y, z) = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'} = f_n(2z_0) - f_n(0),$$

где

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0+\xi))^2}}, \quad \xi \in [0, 2z_0].$$

Из курса математического анализа [19] известно, что найдется такая точка $\xi^* \in (0, 2z_0)$, что выполняется равенство

$$f_n(2z_0) = f_n(0) + 2z_0 f_n'(\xi^*),$$

где

$$f'_n(\xi^*) = \frac{z - (2ln - z_0 + \xi^*)}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z - (2ln - z_0 + \xi))^2\right)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$|a_n(x,y,z)| = 2z_0 \cdot |f'_n(\xi^*)| \leqslant \frac{2z_0}{(z + z_0 - \xi^* - 2ln)^2} \leqslant \frac{2l}{(2l - 2ln)^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, для ряда в (2.3.13) сходится мажорантный ряд, а значит сам ряд сходится равномерно. Следовательно, функция $v(M)$ является непрерывной в рассматриваемой области.

Покажем, что функция $u(M)$ является дважды непрерывно дифференцируемой при $M \neq M_0$. В самом деле, для рядов, получаемых из (2.3.12) формальным двукратным дифференцированием по переменной x или y, указанным выше способом можно получить оценку скорости сходимости соответствующих мажорантных рядов. Слагаемые в этих мажорантных рядах ведут себя как n^{-4}, а значит, сами ряды из вторых производных сходятся равномерно. Мажорантный ряд для ряда, получаемого из (2.3.12) формальным двукратным дифференцированием по переменной z, сходится со скоростью n^{-3}. Следовательно, функция $u(M)$ в (2.3.12) является дважды непрерывно дифференцируемой по x, y и z при $M \neq M_0$.

Так как каждое слагаемое в (2.3.12) удовлетворяет при $M \neq M_0$ уравнению Лапласа, то функция $u(M)$ также удовлетворяет этому уравнению при $M \neq M_0$ в классическом смысле.

Остается показать, что функция (2.3.12) удовлетворяет граничным условиям. Из метода построения функции $u(M)$ следует, что при каждом фиксированном N функция

$$u_N(M) = q \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right)$$

на одной из границ $z = 0$ или $z = l$ обращается в нуль, а на другой границе отличается от нуля на величину

$$\left.\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right)\right|_{n=N} + \left.\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right)\right|_{n=-N} \sim \frac{1}{N^2}.$$

Следовательно, с ростом N ошибка, допускаемая в граничных условиях, стремится к нулю, и функция $u(M) = \lim\limits_{N\to\infty} u_N(M)$ удовлетворяет граничным условиям задачи.

Пример 2.3.6. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле внутри двугранного угла величины* $\frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Рассматриваемая задача эквивалентна задаче о нахождении потенциала поля заряда, помещенного внутрь двугранного угла, ограниченного идеально проводящими заземленными плоскостями.

Направим ось z вдоль ребра угла и введем цилиндрические координаты, отсчитывая полярный угол от одной из граней угла. Пусть заряд $+q$ помещен в точку $M_0\,(r_0, \psi_0, z_0)$. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(M, M_0), \;\; \psi \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right), \tag{2.3.14}$$

$$\varphi|_{\psi=0} = \varphi|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0. \tag{2.3.15}$$

Воспользуемся методом электростатических отображений. Чтобы удовлетворить однородным граничным условиям на полуплоскости $\psi = 0$ отобразим исходный заряд относительно плоскости $\psi = 0$, а чтобы удовлетворить условиям на полуплоскости $\psi = \frac{\pi}{n}$ отобразим исходный заряд относительно плоскости $\psi = \frac{\pi}{n}$ (рис. 2.3.4). Наличие двух плоскостей приводит к тому, что попытка удовлетворить однородному граничному условию методом электростатических отображений на одной из них приводит к нарушению граничного условия на другой. Поэтому не удается удовлетворить двум условиям сразу. Отобразим полученную систему зарядов относительно плоскостей $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{n}$ (рис. 2.3.5) и будем продолжать этот процесс пока «круг не замкнется». Тогда

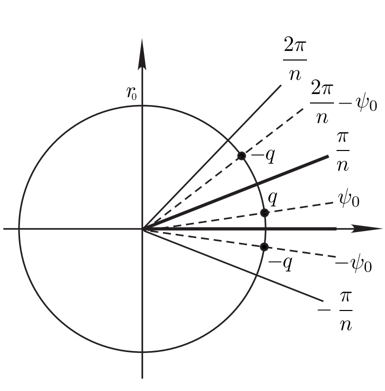

Рис. 2.3.4.

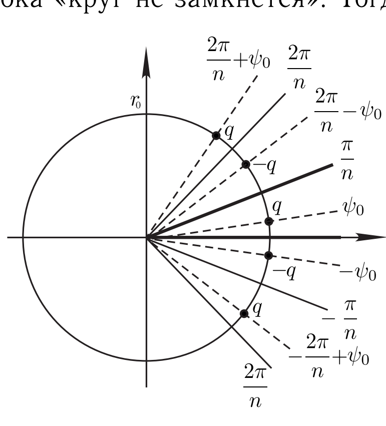

Рис. 2.3.5.

на $n-1$ шаге получим систему зарядов, потенциал суммарного поля которых удовлетворит граничным условиям, что следует из геометрических соображений. Все фиктивные заряды будут расположены на окружности $r = r_0$ в плоскости $z = z_0$. В результате в точках с координатами $\left(r_0, \dfrac{2\pi k}{n} + \psi_0, z_0\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1$, окажутся положительные заряды, а в точках с координатами $\left(r_0, \dfrac{2\pi k}{n} - \psi_0, z_0\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ — отрицательные.

Следовательно, потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку M_0 внутри двугранного угла, имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = q \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{R^{+}_{MM_k}} - \frac{1}{R^{-}_{MM_k}} \right). \tag{2.3.16}$$

Здесь $R^{\pm}_{MM_k}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ — расстояния от точки наблюдения $M(r, \psi, z)$ до зарядов построенной системы:

$$R^{+}_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2},$$

$$R^{-}_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2}.$$

Положив, как и раньше, $q = \dfrac{1}{4\pi}$ в выражении (2.3.16), мы получим функцию Грина задачи Дирихле в двугранном угле величины $\dfrac{\pi}{n}$:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{R^{+}_{MM_k}} - \frac{1}{R^{-}_{MM_k}} \right).$$

Замечание 2.3.1 *При использовании метода электростатических изображений для задачи с двугранным углом существенно, что n является целым числом. Действительно, если n не целое, то для выполнения однородных граничных условий часть фиктивных зарядов придется расположить внутри рассматриваемой области. А это означает, что потенциал поля, порождаемого фиктивными зарядами, не будет гармонической функцией в области внутри двугранного угла.*

Пример 2.3.7. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле в шаре $K(O, a)$ с центром в начале координат и радиусом a.*

Решение. Искомая функция Грина является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \in K(O, a), \\ G|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Функцию Грина

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0), \quad \Delta_M v(M, M_0) = 0$$

можно найти с помощью метода электростатических изображений.

Решим задачу в сферической системе координат. Поместим в точку $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ внутри шара заряд величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$. Рассмотрим точку $M_1(r_1, \theta_0, \psi_0)$, симметричную точке $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ относительно сферы $\Sigma(O, a)$ с центром в начале координат и радиусом a, то есть такую точку, для которой выполнено соотношение:

$$r_0 \cdot r_1 = a^2. \tag{2.3.17}$$

Покажем, что поместив в точку M_1 заряд определенной величины, можно добиться того, чтобы потенциал суммарного поля на сфере равнялся нулю.

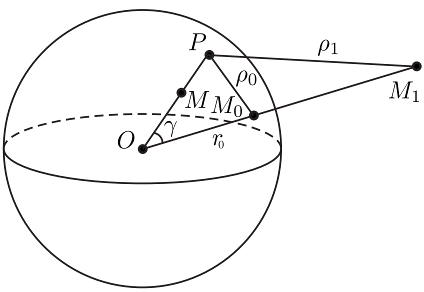

Рис. 2.3.6.

Пусть $M(r, \theta, \psi)$ — точка внутри шара. Точку на сфере $\Sigma(O, a)$, лежащую на луче OM, обозначим P. Введем обозначения: $\rho_0 = PM_0$, $\rho_1 = PM_1$. Угол, который составляют векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_0}$, обозначим γ (рис. 2.3.6).

Покажем, что треугольники $\triangle\, POM_0$ и $\triangle\, M_1OP$ подобны. Действительно, угол $\angle POM_0$ у них общий, а из условия (2.3.17) следует, что

$$\frac{OM_0}{OP} = \frac{OP}{OM_1}.$$

Из подобия треугольников получаем, что

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{r_0}{a}. \tag{2.3.18}$$

Так как точка M_1 располагается вне шара, то функция $v = \dfrac{A}{r_{MM_1}}$ является гармонической всюду внутри шара. Найдем такое A, при котором

$$v\big|_{\Sigma(O,a)} = \frac{A}{r_{PM_1}} = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}}.$$

Из равенства (2.3.18) получаем $A = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{a}{r_0}$. Отсюда следует, что функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) \tag{2.3.19}$$

обращается в нуль на сфере $\Sigma(O, a)$. В сферических координатах выражения для r_{MM_0} и r_{MM_1} имеют вид:

$$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}\,, \quad r_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\gamma}\,,$$

где [1])

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0).$$

Пример 2.3.8. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле вне шара $K(O, a)$.*

Решение. Искомая функция Грина является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \text{ вне } K(O, a), \\ G\big|_{r=a} = 0, \\ G \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to +\infty. \end{cases}$$

[1]) Рассмотрим $\triangle OMM_0$ (см. рис. 2.3.6). По теореме косинусов

$$MM_0^2 = OM^2 + OM_0^2 - 2OM \cdot OM_0\cos\gamma.$$

В наших обозначениях $OM = r$, $OM_0 = r_0$, то есть $r_{MM_0}^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma$. С другой стороны $r_{MM_0}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. В сферических координатах

$$r_{MM_0}^2 = (r\cos\psi\sin\theta - r_0\cos\psi_0\sin\theta_0)^2 + (r\sin\psi\sin\theta - r_0\sin\psi_0\sin\theta_0)^2 + \\ + (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0)\right).$$

Сравнивая с выражением для $r_{MM_0}^2$, полученным из теоремы косинусов, находим

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0).$$

Для того, чтобы найти функцию Грина внешней задачи, поместим точечный заряд $q = \dfrac{1}{4\pi}$ в точку $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ вне шара. Если поместить фиктивный заряд величины $q' = -\dfrac{qa}{r_0}$ в сопряженную точку $M_1\left(\dfrac{a^2}{r_0}, \theta_0, \psi_0\right)$ внутри шара, то суммарный потенциал поля на сфере $\Sigma(O, a)$ будет равен нулю, следовательно, решением задачи является функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right). \tag{2.3.20}$$

Таким образом, построены функции Грина для ряда областей: полупространства, слоя между двумя плоскостями, двугранного угла, внутри и вне шара. Предложенные методы можно применить и для задач нахождения потенциала поля точечного заряда при наличии проводников различной формы.

Пример 2.3.9. *Найдите потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q, расположенным вне проводящего незаряженного шара радиуса a.*

Решение. Пусть заряд q расположен в точке M_0 вне шара $K(O, a)$. Введем сферическую систему координат (r, θ, ψ), начало координат которой совпадает с центром шара. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -4\pi q\delta(M, M_0), \\ u(P)|_{r=a} = V, \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty, \end{cases}$$

где $M = M(r, \theta, \psi)$, $M_0 = M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$, $r, r_0 \in (a, \infty)$, $\theta, \theta_0 \in$ $\in (0, \pi)$, $\psi, \psi_0 \in [0, 2\pi]$, V — постоянный потенциал на проводящей сфере $\Sigma(O, a)$, который пока не известен. Будем искать решение $u(M)$ в виде суммы функций $u_1(M)$ и $u_2(M)$, представляющих собой решения следующих задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1(M) = -4\pi q\delta(M, M_0), \\ u_1(P)|_{r=a} = 0, \\ u_1 \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2(M) = 0, \\ u_2(P)|_{r=a} = V, \\ u_2 \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty. \end{cases}$$

С физической точки зрения это означает, что потенциал поля складывается из потенциала точечного заряда в присутствии заземленной сферы и потенциала, создаваемого индуцированными на сфере зарядами.

Функция u_1 с точностью до множителя $4\pi q$ совпадает с функцией Грина оператора Лапласа внешней задачи Дирихле для шара (см. пример 2.3.8.):

$$u_1 = q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right),$$

где $M_0 = M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ и $M_1 = M_1(r_1, \theta_0, \psi_0)$, $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$.

Решая задачу для функции u_2 методом разделения переменных, получаем:

$$u_2 = V\frac{a}{r}.$$

Для вычисления потенциала V воспользуемся тем, что полный заряд сферы равен нулю. Так как поверхностная плотность заряда на поверхности проводника вычисляется по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S,$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, то для полного заряда получаем равенство

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma(O,a)}\frac{\partial u}{\partial n}dS = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma(O,a)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right)dS =$$

$$= Va - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma(O,a)}\frac{\partial u_1}{\partial r}dS.$$

Для вычисления оставшегося интеграла воспользуемся первой формулой Грина (A.1.1), в которой одна из функций равна u_1, а другая тождественно равна единице:

$$\int\limits_{\Sigma(O,a)}\frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{a}{r_0 r_{PM_1}}\right)\bigg|_{P\in\Sigma(O,a)}dS_P =$$

$$= \int\limits_{K(O,a)}\frac{q}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0 r_{MM_1}}\right)dV_M =$$

$$= -\frac{aq}{4\pi r_0}\int\limits_{K(O,a)}\Delta\frac{1}{r_{MM_1}}dV_M = \frac{aq}{r_0},$$

так как внутри шара $K(O,a)$ функция $\dfrac{1}{r_{_{MM_0}}}$ является гармонической, а функция $\dfrac{1}{r_{_{MM_1}}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{1}{r_{_{MM_1}}} = -4\pi\delta(M, M_1).$$

Таким образом,

$$V = \frac{q}{r_0}.$$

Итак, потенциал точечного заряда q вне проводящего шара радиуса a равен

$$u = \frac{aq}{rr_0} + q\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right).$$

Замечание 2.3.2 *В случае, если на сфере распределен заряд q_1, то в соответствии с принципом суперпозиции потенциал суммарного поля содержит еще одно слагаемое $u_3 = \dfrac{q_1}{r}$.*

Пример 2.3.10. *Решите задачу Дирихле в шаре $K(O,a)$ радиуса a:*

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), \\ u(P)|_{r=a} = f(P), \\ |u|_{r=0} < \infty, \end{cases} \tag{2.3.21}$$

где $M = M(r,\theta,\psi)$, $P = P(a,\theta,\psi)$, $r \in (0,a)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\psi \in$ $\in [0,2\pi]$.

Решение. Из формулы (2.1.7) имеем

$$u(M) = -\int\limits_{\Sigma(O,a)} f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \\ + \int\limits_{K(O,a)} F(Q)G(Q,M)dV_Q,$$

где $\Sigma(O,a)$ — сфера радиуса a, $Q = Q(r_0,\theta_0,\psi_0)$. Обозначим первое слагаемое в правой части $u_1(M)$, а второе $u_2(M)$. Воспользуемся выражением (2.3.19) для функции Грина в шаре.

Вначале найдем функцию $u_1(M)$. Для этого вычислим производную функции G по нормали $\vec{n}_P$ на поверхности шара:

$$-\frac{\partial G}{\partial n_P}\bigg|_{\Sigma(O,a)} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma}}\right\}\Bigg|_{r_0=a} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}}-\frac{a}{\sqrt{r^2r_0^2+a^4-2rr_0a^2\cos\gamma}}\right\}\Bigg|_{r_0=a} =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{a-r\cos\gamma}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}}-\frac{a\left(r^2a-ra^2\cos\gamma\right)}{\left(r^2a^2+a^4-2ra^3\cos\gamma\right)^{3/2}}\right\} =$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r^2}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}},$$

где $r_1=\dfrac{a^2}{r_0}$, $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0)$. Для функции u_1 получаем выражение:

$$u_1(r,\theta,\psi)=\frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\psi_0\int\limits_0^{\pi}\frac{f(\theta_0,\psi_0)\left(a^2-r^2\right)}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}}\sin\theta_0 d\theta_0. \quad (2.3.22)$$

Функция u_2 имеет вид:

$$u_2(r,\theta,\psi)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{a}r_0^2dr_0\int\limits_0^{2\pi}d\psi_0\int\limits_0^{\pi}F(r_0,\theta_0,\psi_0)\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}}-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{\sqrt{r_0^2r^2+a^4-2rr_0a^2\cos\gamma}}\right)\sin\theta_0 d\theta_0.$$

Если в задаче (2.3.21) $F\equiv 0$, то ее решением для любой непрерывной на сфере функции $f(\theta,\psi)$ является функция u_1. Выражение (2.3.22) называется интегралом Пуассона для сферы.

Пример 2.3.11. *Пусть внутри области, ограниченной полусферой радиуса a и плоскостью, проходящей через центр сферы, в точку $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ помещен точечный заряд величины q. Найдите распределение потенциала поля этого заряда, если границы области заземлены.*

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(M) = -4\pi\delta(M, M_0), \\ \varphi(P)|_{r=a} = 0, \quad z \geqslant 0, \\ \varphi(P)|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Задачу можно решить при помощи метода изображений. Воспользуемся известной функцией Грина $G(M, M_0)$ задачи Дирихле в шаре. Функция

$$\varphi_0(M) = 4\pi q G(M, M_0) = q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{a/2}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) = q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{2}{r_{MM_1}}\right),$$

где $M_1\left(2a, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, представляет собой потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ внутри заземленной сферы.

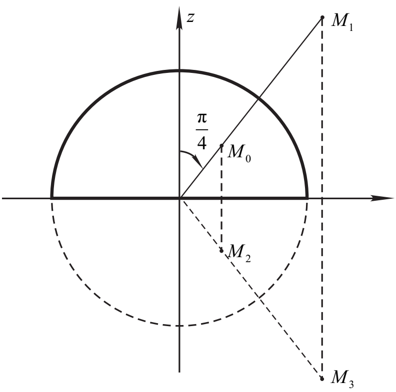

Рис. 2.3.7.

Она удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_0(M) = -4\pi q\delta(M, M_0)$$

в рассматриваемой области и однородному условию Дирихле на части границы области, представляющей собой полусферу (рис. 2.3.7). Для того, чтобы добиться выполнения граничного условия на плоскости $z = 0$, построим точку $M_2\left(\frac{a}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$, и поместим в нее фиктивный заряд $-q$. Чтобы «не испортилось» граничное условие на полусфере, рассмотрим потенциал φ_1, создаваемый фиктивным зарядом внутри шара с заземленной границей:

$$\varphi_1(M) = -q\left(\frac{1}{r_{MM_2}} - \frac{2}{r_{MM_3}}\right),$$

где точка $M_3\left(2a, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ сопряжена точке M_2 относительно сферы:

$$OM_2 \cdot OM_3 = a^2.$$

Так как мы рассматриваем задачу в половине шара выше плоскости $z = 0$, функция φ_1 является гармонической как функция координат точки M в верхнем полупространстве. Кроме того, по построению

$$\varphi_0(P) = -\varphi_1(P), \quad \forall P(x, y, 0),$$

поэтому искомый потенциал имеет вид:

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \varphi_1(M) =$$
$$= q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{2}{r_{MM_1}}\right) - q\left(\frac{1}{r_{MM_2}} - \frac{2}{r_{MM_3}}\right).$$

Отметим, что функция Грина задачи Дирихле в верхней половине шара $(z > 0)$ имеет вид:

$$G_{1/2}(M, M_0) = G(M, M_0) - G(M, M_2).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины $2L$ с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью параллельно ей на расстоянии h от нее.
2. Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины L с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью перпендикулярно ей. Ближайшая к плоскости точка отрезка удалена от нее на расстояние h.
3. Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри «полуслоя» $0 \leqslant z \leqslant l$, $x \geqslant 0$, считая, что стенки идеально проводящие и имеют нулевой потенциал.
4. Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного внутри двугранного угла величины $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в точку M_0, если его грани — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = \frac{\pi}{2}$ и $\psi = 0$. Угловая координата точки M_0 равна $\frac{\pi}{4}$, радиальная координата равна r_0.

5. Найдите потенциал поля в области $y > 0$, $z > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, создаваемого зарядами, распределенными с линейной плотностью e вдоль отрезка длины L. Концы отрезка имеют координаты (x_0, y_0, z_0), $(x_0, y_0 + L, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 > 0$. Границы $z = 0$ и $y = 0$ идеально проводящие и заземленные.
6. Найдите плотность поверхностных зарядов, индуцированных на внешней поверхности проводящей сферы точечным зарядом, помещенным в некоторую точку M_0 вне этой сферы.
7. Найдите распределение потенциала вне непроводящей сферы радиуса a, если на поверхности сферы поддерживается потенциал, равный $f(\theta, \psi)$.
8. Определите распределение потенциала на оси симметрии внутри сферы, если на поверхности сферы распределение потенциала задано следующим образом: при $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (верхняя полусфера) $u = u_1$, при $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ (нижняя полусфера) $u = u_2$, где u_1 и u_2 — константы. Внутри сферы нет объемных зарядов.
9. Найдите функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в четверти шара.
10. Найдите потенциал поля, создаваемого в неограниченном пространстве точечным зарядом, помещенным в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$. Пространство заполнено неоднородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, z > 0, \\ \varepsilon_2, z < 0. \end{cases}$$

3.2. Разложение функции Грина по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Функцию Грина оператора Лапласа можно представить в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Для того, чтобы пояснить, в каком смысле следует понимать сходимость этого ряда, необходимо напомнить понятие пространства L_2.

Функциональное пространство L_2.

Пусть D — область трехмерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью S. Рассмотрим множество непрерывных в $\overline{D}$ комплекснозначных функций $f(M)$ действительных аргументов. Как известно, они образуют линейное пространство

$C(\overline{D})$ над полем комплексных чисел. Введем в пространстве $C(\overline{D})$ скалярное произведение

$$(f, g) = \int_D \overline{g(M)} f(M) dV,$$

где черта над функцией означает комплексное сопряжение. Скалярное произведение порождает норму

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in C(\overline{D}).$$

Дополняя линейное пространство $C(\overline{D})$ пределами всех фундаментальных по введенной норме последовательностей [1]), получим *полное* нормированное (банахово) пространство, которое называют пространством $L_2(D)$ [22].

Для дальнейшего изложения нам понадобятся понятия полноты и замкнутости систем функций в $L_2(D)$.

Определение 2.3.1 *Система функций* $\{\varphi_n\}_1^\infty$ *называется полной в* $L_2(D)$*, если не существует функции* $f \in L_2(D)$*,* $\|f\| \neq 0$*, такой, что* $(f, \varphi_n) = 0$ *при всех* n*.*

Определение 2.3.2 *Система функций* $\{\varphi_n\}_1^\infty$ *называется замкнутой в* $L_2(D)$*, если для любой функции* $f \in L_2(D)$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число* $N = N(\varepsilon)$ *и коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$*, что*

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n \right\| \leqslant \varepsilon.$$

В пространстве $L_2(D)$ понятия полноты и замкнутости эквивалентны [20]. Для любой функции $f \in L_2(D)$ ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n,$$

по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset$ $\subset L_2(D)$, $\|\varphi_n\| = 1$, сходится в норме $L_2(D)$ к функции f.

---

[1]) Последовательность $\{\varphi_n(M)\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|\varphi_{n+p}(M) - \varphi_n(M)\| < \varepsilon.$$

Задача Штурма–Лиувилля.

Напомним, что задачей Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа называется следующая задача:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \ \ M \in D, \\ v|_S = 0, \ \ P \in S, \end{cases} \tag{2.3.23}$$

где S — граница области D, $v \not\equiv 0$.

Задача Штурма–Лиувилля (2.3.23) равносильна интегральному уравнению [14, 15]

$$v_n(M) = \lambda_n \int\limits_D G(Q, M) v_n(Q) dV_Q. \tag{2.3.24}$$

Перечислим основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (2.3.23), которые понадобятся нам для дальнейшего изложения.

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений λ_n, каждому из которых отвечает конечное число линейно независимых собственных функций.
2. Собственные значения при увеличении номера n неограниченно возрастают. Все собственные значения задачи Дирихле положительны.
3. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой:

$$\int\limits_D \overline{v_n(M)} v_m(M) dV = 0, \quad \text{при } n \neq m.$$

4. Система $\{v_n\}_1^\infty$ собственных функций задачи (2.3.23) *полна* и *замкнута* в $L_2(D)$.

Разложение функции Грина по системе собственных функций.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ \ M \in D, \\ u|_S = 0, \ \ P \in S. \end{cases}$$

С помощью функции Грина ее решение может быть записано в виде

$$u(M) = \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dV_Q.$$

Функция Грина удовлетворяет неравенству

$$\|G(Q,M)\|^2 = \int\limits_{D\times D} |G(Q,M)|^2 dV_Q dV_M < \infty.$$

В самом деле, так как

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M),$$

где v — гармоническая функция, непрерывная в $\overline{D}$, то найдется такая константа $C > 0$, что $|v| \leqslant C$. Следовательно

$$\|G(Q,M)\|^2 \leqslant \int\limits_{D\times D} \frac{1}{16\pi^2 r_{QM}^2} dV_Q dV_M + \frac{C}{2\pi} \int\limits_{D\times D} \frac{1}{r_{QM}} dV_Q dV_M + C^2 V_0^2,$$

где V_0 — объем области D. В [7] показано, что интегралы

$$I_1(M) = \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}^2} dV_Q, \quad I_2(M) = \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}} dV_Q$$

являются непрерывными функциями. Следовательно, интегралы

$$\int\limits_D I_1(M) dV_M, \quad \int\limits_D I_2(M) dV_M$$

ограничены.

Рассмотрим пространство $L_2(D \times D)$, состоящее из всех функций $\mathcal{K}_A(Q,M)$, таких что

$$\|\mathcal{K}_A(Q,M)\|^2 = \int\limits_{D\times D} |\mathcal{K}_A(Q,M)|^2 dV_Q dV_M < \infty.$$

В качестве скалярного произведения в $L_2(D \times D)$ используется

$$(\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B) = \int\limits_{D\times D} \overline{\mathcal{K}_B(Q,M)} \mathcal{K}_A(Q,M) dV_M dV_Q.$$

Рассмотрим операторы вида

$$(Af)(M) = \int\limits_D \mathcal{K}_A(Q,M) f(Q) dV_Q, \tag{2.3.25}$$

где $\mathcal{K}_A(Q,M) \in L_2(D \times D)$, $f \in L_2(D)$.

Справедлива следующая теорема [21]:

Теорема 2.3.1 *Для любого ядра $\mathcal{K}_A(Q,M) \in L_2(D \times D)$ оператор A, определяемый равенством (2.3.25), является ограниченным линейным оператором в $L_2(D)$, и для любой функции $f \in L_2(D)$ справедливо равенство*

$$(Af)(M) = (A_0 f)(M),$$

где A_0 — оператор с ядром

$$\mathcal{K}_{A_0}(Q,M) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (A\varphi_k, \varphi_n)\varphi_n(M)\overline{\varphi}_k(Q), \tag{2.3.26}$$

$$(A\varphi_k, \varphi_n) = \int_D \left\{ \int_D \mathcal{K}_A(Q,M)\varphi_k(Q)dV_Q \right\} \overline{\varphi_n(M)}dV_M,$$

где $\{\varphi_n\}_1^\infty$ — любая полная ортонормированная система функций в $L_2(D)$.

В качестве системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$ используем полную ортонормированную систему $\{v_n\}_1^\infty$ собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (2.3.23). Рассмотрим выражение

$$(Gf)(M) = \int_D G(Q,M)f(Q)dV_Q$$

для произвольной функции $f \in L_2(D)$. В силу теоремы 2.3.1 справедливо равенство

$$(Gf)(M) = (G_0 f)(M),$$

где G_0 — оператор с ядром

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \left\{ \int_D \left(\int_D G(Q',M')v_k(Q')dV_{Q'} \right) \overline{v_n(M')}dV_{M'} \right\} v_n(M)\overline{v_k(Q)}$$

Используя равенство (2.3.24), получаем

$$\int_D G(Q',M')v_k(Q')dV_{Q'} = \frac{1}{\lambda_k}v_k(M').$$

В силу ортонормированности системы функций $\{v_n\}_1^\infty$ справедливо равенство

$$\int_D \frac{1}{\lambda_k}v_k(M')\overline{v_n(M')}dV_{M'} = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{nk}.$$

Следовательно, ядро оператора G_0 можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\overline{v_n(Q)}}{\lambda_n}.$$

Данный ряд сходится по норме $L_2(D \times D)$. Таким образом, получаем, что для любой функции $f \in L_2(D)$ имеет место равенство

$$\int_D G(Q,M)f(Q)dV_Q = \int_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\overline{v_n(Q)}}{\lambda_n} f(Q)dV_Q.$$

Таким образом, можно считать, что

$$G(Q,M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\overline{v_n(Q)}}{\lambda_n}, \tag{2.3.27}$$

но равенство (2.3.27) следует понимать как равенство элементов пространства $L_2(D \times D)$.

Отметим, что в пространстве $L_2(D \times D)$ два элемента считаются равными, если норма их разности равна 0.

Пример 2.3.12. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного в точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ внутри заземленного прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c и идеально проводящими стенками.*

Решение. Так как потенциал поля точечного заряда с точностью до множителя $4\pi q$ совпадает с функцией Грина соответствующей задачи Дирихле, то можно воспользоваться формулой (2.3.27). Для этого найдем собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольном параллелепипеде с условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \;\; x \in (0,a),\; y \in (0,b),\; z \in (0,c), \\ \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = v|_{z=0} = v|_{z=c} = 0. \end{cases}$$

Как известно [1], собственные функции и собственные значения этой задачи имеют вид:

$$v_{nmk} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\frac{\pi n x}{a} \cdot \sin\frac{\pi m y}{b} \cdot \sin\frac{\pi k z}{c},$$

$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \text{ где } n, m, k \in \mathbb{N}.$$

Используя формулу (2.3.27), получаем потенциал поля заряда, помещенного в прямоугольный параллелепипед:

$$\varphi = \frac{8}{abc} \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n x}{a} \cdot \sin\frac{\pi n x_0}{a} \cdot \sin\frac{\pi m y}{b} \cdot \sin\frac{\pi m y_0}{b} \cdot \sin\frac{\pi k z}{c} \cdot \sin\frac{\pi k z_0}{c}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в кубе со стороной a.
2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в прямом круговом цилиндре высоты h, радиуса a.
3. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в секторе прямого кругового цилиндра высоты h, радиуса a, с углом раствора α.

3.3. Метод разделения переменных. Как показано выше, построение функции Грина

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v(Q,M)$$

внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона в трехмерном случае сводится к решению задачи

$$\begin{cases} \Delta_{_Q} v(Q,M) = 0, \quad Q \in D, \\ v(P,M)|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{_{PM}}}, \quad P \in S \end{cases} \tag{2.3.28}$$

в ограниченной области D с границей S (см. §1). Для построения функции Грина внешней задачи решается задача

$$\begin{cases} \Delta_{_Q} v = 0, \quad Q \in D_e, \\ v|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{_{PM}}}, \quad P \in S, \\ v \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности} \end{cases} \tag{2.3.29}$$

в области D_e, внешней по отношению к области D (см. §2). Одним из способов решения задач (2.3.28) и (2.3.29) является метод разделения переменных.

В данном пособии ограничимся важным для приложений случаем сферических координат. Для удобства ориентируем систему координат так, чтобы ось Oz проходила через точку источника M. Тогда ее координаты будут $M(r_0, 0, 0)$. Пусть точка наблюдения Q имеет координаты (r, θ, ψ). Полученная задача обладает аксиальной симметрией, поэтому ее решение не будет зависеть от угла ψ. Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат для аксиально симметричного случая, полученное методом разделения переменных, может быть представлено в виде ряда [1]:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{2.3.30}$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

Для решения задачи необходимо найти неизвестные коэффициенты C_n, D_n, используя граничные условия. Представим функцию, стоящую в правой части граничного условия, в виде разложения по полиномам Лежандра. Для этого построим разложение фундаментального решения оператора Лапласа в ряд по полиномам Лежандра. Применяя формулу для производящей функции полиномов Лежандра P_n [1]

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\alpha), \quad |t| < 1,$$

получаем:

$$\frac{1}{4\pi r_{QM}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), \text{ если } r > r_0, \\ \dfrac{1}{4\pi r_0} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta), \text{ если } r < r_0. \end{cases} \tag{2.3.31}$$

Описанный метод особенно удобно применять для решения задач в шаре и его частях. Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты C_n и D_n, которые зависят от r_0, достаточно подставить выражение (2.3.30) в граничное условие задачи (2.3.28) или (2.3.29) (и в условие на бесконечности в случае внешней задачи) и сравнить коэффициенты разложения в ряд Фурье по полиномам Лежандра в правой и левой частях равенства.

В случае произвольно ориентированной сферической системы координат полученную формулу (2.3.30) можно использовать, заменив $\cos\theta$ на косинус угла между векторами $\vec{r}_{OM}$ и $\vec{r}_{OQ}$:

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n(r_0) r^n + \frac{D_n(r_0)}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\gamma),$$

где $M = M(r_0, \theta_0, \psi_0)$, $Q = Q(r, \theta, \psi)$, $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0)$.

Проиллюстрируем описанный метод на следующем примере.

Пример 2.3.13. *Найдите потенциал поля, создаваемого точечным зарядом величины q внутри шарового слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными сферами с радиусами a и b $(a < b)$.*

Решение. Пусть заряд q помещен в точку M_0 внутри шарового слоя на расстоянии r_0 от центра концентрических сфер $(a < r_0 < b)$. Искомый потенциал имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = \frac{q}{r_{MM_0}} + v,$$

где v — гармоническая функция координат точки M. Введем сферическую систему координат. Поместим начало координат в центр концентрических сфер. Направим ось Oz вдоль прямой, соединяющей центр сфер и точку M_0. При таком выборе системы координат функция v не зависит от переменной ψ и является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (a, b), \quad \theta \in (0, \pi), \\ v|_{r=a} = -\left.\dfrac{q}{r_{PM_0}}\right|_{r=a} = -\dfrac{q}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta}}, \\ v|_{r=b} = -\left.\dfrac{q}{r_{PM_0}}\right|_{r=b} = -\dfrac{q}{\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\theta}}, \\ |v|_{\theta=0,\theta=\pi} < \infty. \end{cases}$$

Ее решение можно представить следующим образом [2]:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_n и B_n находятся из граничных условий.

Преобразуем граничные условия к более удобному для дальнейшего решения виду, используя (2.3.31):

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\theta}} = -\frac{q}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+(a/r_0)^2-2(a/r_0)\cos\theta}} =$$
$$= -\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

так как $r_0 > a$, и

$$-\frac{q}{\sqrt{b^2+r_0^2-2br_0\cos\theta}} = -\frac{q}{b}\frac{1}{\sqrt{1+(r_0/b)^2-2(r_0/b)\cos\theta}} =$$
$$= -\frac{q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

так как $r_0 < b$. Подставим общее решение в граничные условия:

$$v|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

$$v|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Отсюда получаем

$$A_n = -\frac{q}{b}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{b^{n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}} = -q\frac{r_0^n}{b^{2n+1}-a^{2n+1}},$$

$$B_n = -\frac{q}{r_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}.$$

Следовательно:

$$v = -\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}} P_n(\cos\theta) -$$
$$-\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^{n+1} \frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}} P_n(\cos\theta).$$

Функция Грина задачи Дирихле внутри шарового слоя имеет вид:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}-\frac{1}{4\pi r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\frac{r^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma)-$$
$$-\frac{1}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^{n+1}\frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma). \tag{2.3.32}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области $a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2$, $z \geqslant 0$, $a<b$. Совет. Воспользуйтесь формулой (2.3.32) и методом электростатических изображений.
2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в шаре радиуса a методом разделения переменных. Сравните ее с выражением (2.3.19).
3. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле вне шаре радиуса a методом разделения переменных. Сравните ее с выражением (2.3.20).

3.4. Построение функции Грина с помощью преобразования Фурье.

Если задача рассматривается в бесконечной цилиндрической области $\Omega=\{(x,y)\in D,\ z\in(-\infty,+\infty)\}$, то для построения решений дифференциальных уравнений в частных производных удобен метод Фурье. Решение задачи можно искать в виде $u=u(M,z)$, где M — точка в поперечном сечении D цилиндрической области.

Предположим, что решение $u(M,z)$ уравнения допускает преобразование Фурье по переменной z, то есть существует его Фурье-образ

$$\widehat{u}(M,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(M,z)e^{-i\mu z}dz.$$

Тогда, применяя преобразование Фурье к уравнению и граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, для Фурье-образа $\widehat{u}(M,\mu)$ получим краевую задачу в поперечном сечении цилиндрической области.

Пример 2.3.14. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного в точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ внутри бес-*

конечной цилиндрической полости поперечного сечения D с заземленной идеально проводящей границей.

Решение. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in D,\ z \in (-\infty, +\infty)\}$, $\partial\Omega$ — боковая поверхность рассматриваемого цилиндра. В отсутствии проводящей заземленной поверхности $\partial\Omega$ потенциал поля точечного заряда q, помещенного в точку M_0, имеет вид:

$$u_0 = \frac{q}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

то есть

$$u_0 \to 0 \text{ и } \frac{\partial u_0}{\partial z} \to 0 \text{ при } z \to \pm\infty. \tag{2.3.33}$$

При наличии проводящей поверхности $\partial\Omega$ нужно учесть также поле наведенных зарядов. При удалении от точки M_0 это поле будет убывать, поэтому естественно потребовать для него выполнения условий, аналогичных (2.3.33). Следовательно, математическую постановку задачи можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), & \begin{array}{l}(x, y) \in D,\\ -\infty < z < +\infty,\end{array} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \\ u \to 0, \quad u_z \to 0 \text{ при } z \to \pm\infty. & \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Будем искать решение $u(x, y, z)$, которое допускает вместе со своими производными преобразование Фурье по переменной z. Проведем преобразование Фурье по переменной z:

$$\widehat{u}(x, y, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z) e^{-i\mu z} dz.$$

Применим преобразование Фурье к левой части уравнения в задаче (2.3.34):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta u\, e^{-i\mu z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_2 u + u_{zz})\, e^{-i\mu z} dz =$$

$$= \Delta_2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\mu z} dz}_{= \widehat{u}(x, y, \mu)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{zz} e^{-i\mu z} dz, \tag{2.3.35}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа в поперечном сечении. Вычислим второй интеграл в (2.3.35), дважды интегрируя по частям и используя условия на бесконечности для функции $u(x,y,z)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{zz}e^{-i\mu z}dz = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,u_z e^{-i\mu z}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty}}_{=0} + \frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_z e^{-i\mu z}dz =$$

$$= \underbrace{\frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}}\,u e^{-i\mu z}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty}}_{=0} - \mu^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\mu z}dz}_{=\,\widehat{u}(x,y,\mu)}.$$

Таким образом, применяя преобразование Фурье к уравнению и граничному условию в задаче (2.3.34), для Фурье-образа получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta_2\widehat{u} - \mu^2\widehat{u} = -2\sqrt{2\pi}\,qe^{-i\mu z_0}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \ (x,y)\in D, \\ \widehat{u}\big|_L = 0, \end{cases} \tag{2.3.36}$$

где L — граница области D. Решение задачи (2.3.36) удобно искать в виде разложения в ряд Фурье по системе нормированных собственных функций $v_n(x,y)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta_2 v_n + \lambda_n^2 v_n = 0, \ (x,y)\in D, \\ v_n\big|_L = 0 \end{cases}$$

в поперечном сечении D:

$$\widehat{u}(x,y,\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu)v_n(x,y), \quad C_n(\mu) = \int\limits_D \widehat{u}\,v_n dS. \tag{2.3.37}$$

Умножая уравнение в задаче (2.3.36) на $v_n(x,y)$, интегрируя по области D и применяя вторую формулу Грина, получаем:

$$\int\limits_D \Delta_2\widehat{u}\,v_n ds - \mu^2 \underbrace{\int\limits_D \widehat{u}\,v_n ds}_{C_n(\mu)} = -2\sqrt{2\pi}\,qe^{-i\mu z_0}v_n(x_0,y_0),$$

где первое слагаемое преобразуем следующим образом:

$$\int\limits_D \Delta_2 \widehat{u}\, v_n ds = \int\limits_D \widehat{u} \Delta_2 v_n ds = -\lambda_n^2 \int\limits_D \widehat{u}\, v_n ds = -\lambda_n^2 C_n(\mu).$$

Таким образом, коэффициенты $C_n(\mu)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$-\lambda_n^2 C_n(\mu) - \mu^2 C_n(\mu) = -2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0).$$

Следовательно,

$$C_n(\mu) = \frac{2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2}.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(x,y,\mu) e^{i\mu z} d\mu =$$

$$= 2q \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\mu z_0} v_n(x,y) v_n(x_0,y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2} e^{i\mu z} d\mu =$$

$$= 2q \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0,y_0) v_n(x,y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(z-z_0)}}{\lambda_n^2 + \mu^2} d\mu.$$

Интеграл в последнем выражении можно вычислить с помощью вычетов, замыкая контур в верхней полуплоскости при $z - z_0 > 0$ и в нижней полуплоскости при $z - z_0 < 0$. В результате получим

$$u(x,y,z) = 2\pi q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x_0,y_0) v_n(x,y)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |z-z_0|}.$$

Пример 2.3.15. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного внутри двугранного угла величины α, $\alpha \in (0; 2\pi)$. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.*

Решение. Для частного случая $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ данная задача решена ранее методом электростатических отображений, однако, согласно замечанию 2.3.1, в общем случае этот метод неприменим.

Построим решение с помощью преобразования Фурье. Введем цилиндрическую систему координат, ось Oz которой направлена вдоль ребра двугранного угла, а полярный угол ψ отсчитывается от одной из граней этого угла. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -\dfrac{4\pi q}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\psi-\psi_0)\delta(z-z_0), \\ 0 < r, r_0 < +\infty,\ 0 < \psi, \psi_0 < \alpha,\ -\infty < z, z_0 < +\infty, \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\alpha} = 0, \\ 0 \leqslant r < +\infty,\ 0 < r_0 < +\infty, -\infty < z, z_0 < +\infty, \end{cases} \tag{2.3.38}$$

где $\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

Проведем преобразование Фурье по переменной z :

$$\widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(r,\psi,z)e^{-i\mu z}dz.$$

В пространстве Фурье-образов уравнение в задаче (2.3.38) примет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \widehat{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \psi^2} - \mu^2\widehat{u} = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\psi-\psi_0)e^{-i\mu z_0}. \tag{2.3.39}$$

Будем искать решение уравнения (2.3.39) с граничными условиями задачи (2.3.38) в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций $\left\{\sin\dfrac{\pi n\psi}{\alpha}\right\}$ задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле на отрезке $[0,\ \alpha]$:

$$\widehat{u}(r,\psi,\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r,\mu)\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha},$$

где

$$R_n(r,\mu) = \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} \widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha}d\psi. \tag{2.3.40}$$

Умножим уравнение (2.3.39) на $\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha}$ и проинтегрируем по переменной ψ от 0 до α:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^\alpha \widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha}d\psi\right)+\frac{1}{r^2}\int\limits_0^\alpha\frac{\partial^2\widehat{u}(r,\psi,\mu)}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha}d\psi-$$
$$-\mu^2\int\limits_0^\alpha \widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n\psi}{\alpha}d\psi=-\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}e^{-i\mu z_0}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n\psi_0}{\alpha}.$$

Отсюда вытекает уравнение для радиальной части:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R_n}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2R_n-\mu^2R_n=\\ =-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n\psi_0}{\alpha}\,\delta(r-r_0).\end{gathered}\tag{2.3.41}$$

Умножая уравнение (2.3.41) на r^2 и учитывая, что в смысле обобщенных функций $r^2\delta(r-r_0)=r_0^2\delta(r-r_0)$, преобразуем уравнение к виду

$$\begin{gathered}r^2\frac{\partial^2R_n}{\partial r^2}+r\frac{\partial R_n}{\partial r}-\left[\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2+\mu^2r^2\right]R_n=\\ =-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}r_0e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n\psi_0}{\alpha}\,\delta(r-r_0).\end{gathered}\tag{2.3.42}$$

Таким образом, для каждого фиксированного значения μ задача свелась к построению функции Грина для уравнения, решениями которого являются цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. В качестве дополнительных условий потребуем, чтобы

$$|R_n(0,\mu)|<\infty,\quad |R_n(r,\mu)|<\infty \text{ при } r\to+\infty.\tag{2.3.43}$$

Согласно изложенному в [17] методу построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, будем искать решение уравнения (2.3.42) с учетом дополнительных условий (2.3.43) в следующем виде:

$$R_n(r,\mu)=\begin{cases}C_1I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r<r_0,\\ C_2K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r>r_0.\end{cases}\tag{2.3.44}$$

Функции $I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ и $K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ представляют собой решения однородного уравнения (2.3.42), ограниченные при $r = 0$ и при $r \to +\infty$ соответственно. Следуя [17], потребуем выполнения следующих условий сопряжения при $r = r_0$:

$$\begin{cases} R_n(r_0+0,\mu) - R_n(r_0-0,\mu) = 0, \\ R_n'(r_0+0,\mu) - R_n'(r_0-0,\mu) = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}\sin\dfrac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0}. \end{cases} \tag{2.3.45}$$

Подставляя (2.3.44) в (2.3.45), получим систему для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - C_1 I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = 0, \\ \mu C_2 K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - \mu C_1 I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}\sin\dfrac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} C_2 = C_1 \dfrac{I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}{K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}, \\ C_1\mu\left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\right] = \\ \qquad = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}\sin\dfrac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0). \end{cases} \tag{2.3.46}$$

Учитывая, что определитель Вронского функций Инфельда и Макдональда равен [1]

$$W\left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\right] = \\ = \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)\right] = -\frac{1}{\mu r_0},$$

из (2.3.46) получаем

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sin\dfrac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), \\ C_2 = \dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sin\dfrac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_n(r,\mu) = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sin\frac{\pi n\psi_0}{\alpha}\, e^{-i\mu z_0} \begin{cases} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), & r < r_0, \\ I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r > r_0. \end{cases} \tag{2.3.47}$$

Подставляя (2.3.47) в (2.3.40), находим

$$\widehat{u}(r,\psi,\mu) = \\ = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-i\mu z_0} \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \sin\frac{\pi n \psi_0}{\alpha} \sin\frac{\pi n \psi}{\alpha}, & r < r_0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) \sin\frac{\pi n \psi_0}{\alpha} \sin\frac{\pi n \psi}{\alpha}, & r > r_0. \end{cases} \tag{2.3.48}$$

Для того, чтобы получить решение исходной задачи, необходимо осуществить обратное преобразование Фурье:

$$u(r,\psi,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(r,\psi,\mu) e^{i\mu z} d\mu. \tag{2.3.49}$$

Сходимость интеграла (2.3.49) следует из свойств функций Инфельда и Макдональда [1].

Задачи для самостоятельного решения.

1. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, взятой вне бесконечного проводящего заземленного цилиндра кругового поперечного сечения помещен заряд q. Поставьте задачу для нахождения потенциала поля, порождаемого этим зарядом, и сведите ее к краевой задаче для уравнения Гельмгольца на плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.
2. В точке M_0 внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности с квадратным поперечным сечением расположен заряд q. Найдите потенциал поля, порождаемого этим зарядом.
3. Внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, находится заряженный отрезок прямой длины l. Отрезок расположен на оси цилиндра и имеет плотность заряда, равную e. Найдите потенциал поля, создаваемого этим отрезком.
4. Внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, $a > b$, находится заряженный отрезок прямой длины $a/2$. Пусть ось Oz совпадает с осью цилиндра, а ось Ox параллельна большей стороне поперечного сечения. Координаты концов заряженного отрезка равны $(-a/4, 0, 0)$ и $(a/4, 0, 0)$. Найдите потенциал поля, создаваемого этим отрезком.

§ 4. Внутренние двумерные задачи

Пусть D — область на плоскости, ограниченная замкнутой кривой Ляпунова L. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле:

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D, \tag{2.4.1}$$

$$u(P)|_L = f(P), \quad P \in L. \tag{2.4.2}$$

Определение 2.4.1 *Будем называть классическим решением задачи* (2.4.1-2.4.2) *функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (2.4.1) *в области D и граничному условию* (2.4.2).

Утверждение 2.4.1 *При $F \in L_2(D) \cap C^{(1)}(D)$ и $f \in C(L)$ задача* (2.4.1-2.4.2) *имеет единственное классическое решение* [1].

Для его построения можно повторить те же рассуждения, что и в трехмерном случае, взяв во второй формуле Грина фундаментальное решение оператора Лапласа на плоскости:

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{_{QM}}} + v(Q, M), \tag{2.4.3}$$

где $v(Q, M)$ — гармоническая по переменной Q функция. Тогда аналогом формулы (2.1.5) будет

$$\begin{aligned} u(M) = \int\limits_L \left(G(P, M) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} \right) dl_P - \\ - \int\limits_D G(Q, M) \Delta u(Q) dS_Q = \\ = \int\limits_L \left(G(P, M) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dS_Q. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Как и в трехмерном случае, в выражении (2.4.4) можно убрать слагаемое, содержащее неизвестное значение $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}$ на границе L, если воспользоваться произвольностью гармонического слагаемого v в (2.4.3) и потребовать выполнения условия

$$G(P, M) = 0, \ \ \forall P \in L.$$

Тогда

$$u(M) = -\int\limits_L f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} dl_P + \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dS_Q. \tag{2.4.5}$$

Определение 2.4.2 *Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ *— гармоническая функция координат точки* $Q \in D$*, непрерывная на* $\overline{D}$ *для каждой точки* $M \in D$*;*
2) $G(P,M)|_{P\in L} = 0$ *для каждой точки* $M \in D$.

Для того, чтобы построить решение двумерной задачи Дирихле (2.4.1)-(2.4.2), достаточно найти такую функцию $v(Q,M)$, что

$$\begin{cases} \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D, \\ v|_L = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{PM}}, \quad P \in L \end{cases} \tag{2.4.6}$$

и использовать формулу (2.4.5).

§ 5. Внешние двумерные задачи

Пусть D_e — дополнение некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ с гладкой замкнутой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Также, как и в трехмерном случае, для того, чтобы краевая задача для уравнения Пуассона или Лапласа в области D_e имела единственное решение, следует потребовать регулярности решения на бесконечности.

Определение 2.5.1 *Функция* $u(M)$ *называется регулярной на бесконечности в двумерном случае, если она ограничена при* $r \to +\infty$*, где* $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в двумерном случае ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D_e, \\ u(P)|_L = f(P), \quad P \in L, \\ |u(M)| < \infty. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Утверждение 2.5.1 *Если функция* F *является финитной и непрерывно дифференцируемой, а функция* f *непрерывной, то задача* (2.5.1) *имеет единственное классическое решение* [1].

Заметим, что поскольку в двумерном случае от функций требуется только ограниченность на бесконечности, формулы Грина во внешних областях остаются справедливыми лишь для регулярных функций, *гармонических вне некоторой ограниченной области* (см. прил. А., § 4). Так как функция $F(M)$ предполагается финитной, то для решения задачи (2.5.1) применимы формулы Грина. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось строго внутри области D.

Введем функцию

$$\Omega(M) = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } M \in D_e, \\ \pi, & \text{если } M \in L, \\ 0, & \text{если } M \notin \overline{D_e}. \end{cases}$$

Тогда, применяя третью формулу Грина для решения рассматриваемой задачи (2.5.1), имеем:

$$\Omega(M)u(M) - 2\pi u_\infty = \int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{_{PM}}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{_{PM}}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) \ln \frac{1}{r_{_{QM}}} dS_Q, \tag{2.5.2}$$

где $u_\infty = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} u dl$ — среднее значение функции u по окружности бесконечно большого радиуса (C_R — окружность радиуса R с центром в начале координат).

Запишем формулу (2.5.2), взяв в качестве точки M начало координат O:

$$-2\pi u_\infty = \int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{_{PO}}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{_{PO}}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) \ln \frac{1}{r_{_{QO}}} dS_Q, \tag{2.5.3}$$

поскольку точка O не принадлежит области $\overline{D_e}$.

Пусть M — произвольная точка области D_e. Подставим в соотношение (2.5.2) слагаемое $2\pi u_\infty$, определяемое равенством

(2.5.3), и получим

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{r_{PM}} - \ln\frac{1}{r_{PO}}\right) - \right.$$
$$\left. -u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{r_{PM}} - \ln\frac{1}{r_{PO}}\right)\right\} dl_P - \tag{2.5.4}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_e} \Delta u(Q)\left(\ln\frac{1}{r_{QM}} - \ln\frac{1}{r_{QO}}\right) dS_Q.$$

Пусть $\widetilde{v}(Q)$ — произвольная гармоническая в области D_e и регулярная на бесконечности функция. Для решения $u(Q)$ задачи (2.5.1) и функции $\widetilde{v}(Q)$ справедлива вторая формула Грина (A.4.5) в области D_e:

$$0 = \int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\widetilde{v}(P) - u(P)\frac{\partial \widetilde{v}(P)}{\partial n_P}\right\} dl_P - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q)\widetilde{v}(Q) dS_Q. \tag{2.5.5}$$

Складывая равенства (2.5.4) и (2.5.5), получаем

$$u(M) = \int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P}G(P,M) - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}G(P,M)\right\} dl_P -$$
$$- \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) G(Q,M) dS_Q, \tag{2.5.6}$$

где введено обозначение

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{QM}} - \ln\frac{1}{r_{QO}}\right) + \widetilde{v}(Q). \tag{2.5.7}$$

Замечание 2.5.1 *При построении функции $G(Q,M)$ вместо точки O можно выбрать любую точку строго внутри области D.*

Функция $v(Q) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QO}} + \widetilde{v}(Q)$ является гармонической в области D_e по координатам точки Q, но имеет логарифмическую особенность на бесконечности.

Покажем, что функция $G(Q,M)$, определяемая формулой (2.5.7), регулярна на бесконечности. Перейдем в полярную систему координат. Пусть точка наблюдения Q имеет координаты (r, ψ), а точка источника M — координаты (r_0, ψ_0). Тогда

$$r_{_{QM}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}\,, \quad r_{_{QO}} = r.$$

Так как функция $\widetilde{v}(Q)$ является регулярной на бесконечности, то существует $A > 0$, такое что $|\widetilde{v}(Q)| < A$ на бесконечности. Тогда

$$\lim_{r\to+\infty} |G(Q,M)| = \lim_{r\to+\infty} \left| \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{_{QM}}} - \ln\frac{1}{r_{_{QO}}}\right) + \widetilde{v}(Q)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\left|\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}} - \ln\frac{1}{r}\right| + A =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{4\pi}\left|\ln\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - 2\frac{r_0}{r}\cos(\psi - \psi_0)\right)\right| + A = A.$$

Соотношение (2.5.6) является аналогом формулы (2.2.4) для внешней задачи в трехмерном случае. Воспользуемся произвольностью гармонической функции $\widetilde{v}$ и выберем ее такой, чтобы функция $G(P,M)$ обращалась в нуль в любой точке $P \in L$. При этом для решения задачи (2.5.1) из (2.5.6) получаем следующее выражение:

$$u(M) = -\int\limits_L f(P)\frac{\partial}{\partial n_P}G(P,M)dl_P + \int\limits_{D_e} F(Q)G(Q,M)dS_Q. \tag{2.5.8}$$

Определение 2.5.2 *Функцией Грина внешней задачи Дирихле для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{QM}}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e, \tag{2.5.9}$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in \in D_e$, непрерывная в $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$, имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;
2) $G(P,M)|_{P\in L} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$;
3) $G(Q,M)$ регулярна на бесконечности.

Функция Грина $G(Q,M)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q \in D_e, \quad M \in D_e, \\ G(P,M)|_L = 0, \quad P \in L, \\ G(Q,M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{2.5.10}$$

Поскольку функция Грина (2.5.9) регулярна на бесконечности, то можно показать, что она симметрична относительно перестановки точки наблюдения Q и точки источника M. Читателю предлагается доказать это самостоятельно аналогично тому, как это сделано в [1] для случая ограниченной области.

§ 6. Методы решения двумерных задач

6.1. Метод электростатических изображений.

Как и в трехмерном случае, при решении двумерных задач в ряде областей удобно использовать метод электростатических изображений.

Пример 2.6.1. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле внутри круга радиуса a.*

Решение. Введем полярную систему координат, поместив начало координат в центр круга. Функция Грина оператора Лапласа задачи Дирихле внутри круга $U(O,a)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad M, M_0 \in U(O,a), \\ G(P,M_0)|_{r=a} = 0, \end{cases}$$

где $M_0 = M_0(r_0,\psi_0)$ — точка источника, $M = M(r,\psi)$ — точка наблюдения, $P = P(a,\psi)$ — точка на границе области (на окружности).

Используем построение, аналогичное тому, что применялось при решении задачи в шаре. Гармоническую функцию $v(M)$ в выражении

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + v(M)$$

будем искать в виде

$$v(M) = A + B\ln\frac{1}{r_{_{MM_1}}} = B\ln\frac{\widetilde{A}}{r_{_{MM_1}}}, \quad \widetilde{A} = e^{\frac{A}{B}},$$

где A и B — некоторые постоянные, $M_1(r_1, \psi_0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно окружности радиуса a:

$$r_0 \cdot r_1 = a^2.$$

Проводя те же геометрические построения, что и для задачи в шаре, получаем

$$\frac{r_{PM_0}}{r_{PM_1}} = \frac{r_0}{a}.$$

Если взять $B = -\dfrac{1}{2\pi}$ и $\widetilde{A} = \dfrac{a}{r_0}$, то гармоническая функция

$$v(M) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

удовлетворяет граничному условию

$$v|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}}.$$

Такая функция $v(M)$ единственна в силу теоремы единственности решения внутренней задачи Дирихле на плоскости [1]. Следовательно, функция Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в круге радиуса a имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)\right), \tag{2.6.1}$$

где $r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}$,
$r_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_0)}$, $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$.

Пример 2.6.2. *Для любой непрерывной функции $f(\psi)$ найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $U(O, a)$*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < a, \quad \psi \in [0, 2\pi] \\ u|_{r=a} = f(\psi) \end{cases}$$

в интегральной форме.

Решение. Воспользуемся представлением решения через функцию Грина с помощью формулы (2.4.5), в которой $G(M, M_0)$ определяется выражением (2.6.1) для $F(M) \equiv 0$:

$$u(M_0) = -\int\limits_{C_a} f(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dl_P,$$

где C_a — окружность радиуса a.

Вычислим производную функции Грина по направлению внешней нормали к границе области (окружности):

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}} - \right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\psi-\psi_0)}}\right)\right)\right|_{r=a} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\ln\left(r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\psi-\psi_0)\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(\frac{r^2r_0^2}{a^2}+a^2-2rr_0\cos(\psi-\psi_0)\right)\right\}\right|_{r=a} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{a-r_0\cos(\psi-\psi_0)}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\psi-\psi_0)} - \frac{\frac{r_0^2}{a}-r_0\cos(\psi-\psi_0)}{r_0^2+a^2-2ar_0\cos(\psi-\psi_0)}\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\psi-\psi_0)}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (2.4.5), получим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в любой точке $M_0(r_0,\psi_0)$ круга $U(O,a)$

$$u(r_0,\psi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\psi-\psi_0)}f(\psi)d\psi. \qquad (2.6.2)$$

Формула (2.6.2) носит название *интеграла Пуассона*.

Пример 2.6.3. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $U(O,a)$ радиуса a.*

Решение. Функция Грина является решением следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad r>a,\ r_0>a, \\ G|_{r=a}=0, \\ |G|<\infty \text{ при } r\to+\infty. \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

Здесь r и r_0 — полярные радиусы точек M и M_0 соответственно.

Будем искать функцию $G(M, M_0)$ в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, \quad r > a, \ r_0 > a, \\ v(P)|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{PM_0}}, \end{cases} \tag{2.6.4}$$

где P — произвольная точка окружности радиуса a с центром в начале координат.

Пусть $M_1\left(\dfrac{a^2}{r_0}, \psi_0\right)$ — точка, сопряженная $M_0\,(r_0, \psi_0)$ относительно окружности радиуса a. Функция

$$v(M) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}}$$

является гармонической вне круга радиуса a и удовлетворяет (2.6.4). Таким образом, решение задачи (2.6.3) имеет следующий вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}}. \tag{2.6.5}$$

Пример 2.6.4. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины $\dfrac{\pi}{n}$ параллельно ребру этого угла. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.*

Решение. Введем цилиндрическую систему координат. Направим ось Oz вдоль ребра двугранного угла, а полярную ось поместим на одной из его граней. Для введенной системы координат в данной задаче решение не зависит от z, следовательно, задачу можно рассматривать как двумерную в поперечном сечении угла. Пусть $M(r, \psi)$ — произвольная точка поперечного сечения угла, $M_0(r_0, \psi_0)$ — точка сечения, через которую проходит заряженная нить. Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta(M, M_0), \ 0 < \psi < \dfrac{\pi}{n}, \ 0 < \psi_0 < \dfrac{\pi}{n}, \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0. \end{cases}$$

Данную задачу можно рассматривать как задачу о потенциале поля точечного заряда на плоскости. По аналогии с решением примера 2.3.6. применим метод электростатических отображений, используя для потенциала поля точечного заряда выражение

$$\varphi(M) = 2q \ln \frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Для функции $u(M)$ получим

$$u(M) = 2q \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln \frac{1}{R^+_{MM_k}} - \ln \frac{1}{R^-_{MM_k}} \right), \tag{2.6.6}$$

где

$$R^+_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right)},$$
$$R^-_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right)}.$$

При $q = \dfrac{1}{4\pi}$ выражение (2.6.6) представляет собой функцию Грина задачи Дирихле в угле величины $\dfrac{\pi}{n}$ на плоскости.

Пример 2.6.5. *Найдите потенциал поля внутри двугранного угла величины $\dfrac{\pi}{2}$, образованного координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, если грань $x = 0$ — идеально проводящая заземленная плоскость, а грань $y = 0$ — непроводящая плоскость, на которой задан потенциал $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$.*

Решение. Аналогично примеру 2.6.4. задача может быть сведена к двумерной в поперечном сечении двугранного угла:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2 + a^2}, \\ |u| < \infty. \end{cases}$$

Ее решение можно построить при помощи функции Грина. Найдем функцию Грина, пользуясь результатом предыдущего примера для $n = 2$ (так как величина двугранного угла в данном случае равна $\frac{\pi}{2}$):

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}\right.$$

$$\left. - \ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}\right).$$

Согласно (2.5.8), решение задачи имеет вид

$$u(M_0) = \int\limits_0^{+\infty} \left(u\,\frac{\partial G}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} dx$$

для любой точки M_0 внутри угла. Так как

$$\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right),$$

получаем

$$u(M_0) = \frac{y_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{y_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{2Ax}{x^2+a^2} - A\left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} + \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right) + \right.$$

$$\left. + B\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\right\}dx,$$

где

$$A = \frac{2x_0}{4x_0^2a^2 + \left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}, \quad B = \frac{x_0^2-y_0^2+a^2}{4x_0^2a^2 + \left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$u(M_0) = \frac{y_0}{\pi}\left\{A\ln\frac{x^2+a^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x+x_0)^2+y_0^2}}\right|_0^{+\infty} +$$

$$+\frac{B}{y_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{y_0}\Big|_0^{+\infty} - \operatorname{arctg}\frac{x+x_0}{y_0}\Big|_0^{+\infty}\right)\Bigg\} =$$

$$= -\frac{Ay_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2} + 2\frac{B}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} =$$

$$= \frac{1}{4x_0^2a^2+\left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}\left\{-\frac{2x_0y_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\left(x_0^2-y_0^2+a^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4a^2r_0^2\cos^2\psi_0+\left(r_0^2-a^2\right)^2}\left\{-\frac{r_0^2\sin 2\psi_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{r_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\left(r_0^2\cos 2\psi_0+a^2\right)\left(\frac{\pi}{2}-\psi_0\right)\right\},$$

где (r_0, ψ_0) — полярные координаты точки M_0:

$$x_0 = r_0\cos\psi_0, \quad y_0 = r_0\sin\psi_0.$$

Пример 2.6.6. *Найдите потенциал поля внутри двугранного угла, величины $\frac{\pi}{2}$, образованного координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, если грань $x = 0$ — идеально проводящая заземленная плоскость, а грань $y = 0$ поддерживается при постоянном потенциале V.*

Решение. В данной задаче нет зависимости от переменной z, и поэтому задачу можно рассматривать как двумерную в произвольной плоскости $z = const$. В этой плоскости перейдем в полярную систему координат $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$.

Математическая постановка рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}, r > 0, \\ u|_{\psi=0} = 0, \\ u|_{\psi=\frac{\pi}{2}} = V, \\ |u| < \infty \, \text{при}\, r \to +\infty. \end{cases}$$

Так как искомая функция удовлетворяет однородному уравнению и однородному условию при $\psi = 0$, а при $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ она равна константе, то решение задачи не зависит от переменной r. Следовательно, $u = u(\psi)$. Любая линейная функция переменной ψ удовлетворяет уравнению Лапласа. В данном случае можно подобрать эту линейную функцию так, что она будет удовлетворять и граничным условиям: $u(\psi) = \dfrac{2V}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \psi\right)$. Так как для рассматриваемой задачи имеет место теорема единственности решения, то найденная функция является решением задачи.

Пример 2.6.7. *Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если*

$$u|_{y=0} = \cos x.$$

Решение. Функция Грина для полуплоскости может быть получена из примера 2.6.4. при $n = 1$:

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{R^{+}_{QM}} - \ln\frac{1}{R^{-}_{QM}}\right) = \\ = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} - \ln\frac{1}{(x'-x)^2 + (y'+y)^2}\right).$$

Отсюда производная по внешней нормали равна

$$\frac{\partial G}{\partial n}(P, M)\bigg|_{y'=0} = -\frac{\partial G}{\partial y'}(P, M)\bigg|_{y'=0} = -\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{(x'-x)^2 + y^2}.$$

Согласно (2.5.8), решение задачи имеет вид

$$u(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u(P)\,\frac{\partial G}{\partial y'}(P, M)\right)\bigg|_{y'=0} dx' = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(x', 0)dx'}{(x'-x)^2 + y^2}.$$

Следовательно, в данном случае решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x' dx'}{(x'-x)^2+y^2}$$

при $y > 0$. Воспользуемся основной теоремой теории вычетов и леммой Жордана:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix'}dx'}{(x'-x)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\,\mathrm{Re}\,2\pi i\,\mathrm{Res}_{\xi=x+iy}\frac{e^{i\xi}}{(\xi-x)^2+y^2} =$$
$$= y\,\mathrm{Re}\,2i\;\frac{e^{i\xi}}{\xi-x+iy}\bigg|_{\xi=x+iy} = y\,\mathrm{Re}\,2i\,\frac{e^{i(x+iy)}}{2iy} = e^{-y}\cos x.$$

Пример 2.6.8. *Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в бесконечном секторе с углом* $\frac{\pi}{2}$, *если:*

$$u|_{x=0} = \sin y,\;\; u|_{y=0} = \sin x.$$

Решение. Так же как и в прошлом примере, функция Грина для полуплоскости может быть получена из примера 2.6.4., но только уже при $n=2$:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{R^{+}_{QM_0}} - \ln\frac{1}{R^{-}_{QM_0}} + \ln\frac{1}{R^{+}_{QM_1}} - \ln\frac{1}{R^{-}_{QM_1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'-y)^2} - \ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'+y)^2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{(x'+x)^2+(y'+y)^2} - \ln\frac{1}{(x'+x)^2+(y'-y)^2}\right).$$

Воспользовавшись (2.5.8) для данной функции Грина, получим

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}u(x',0)\left[\frac{1}{(x'-x)^2+y^2} - \frac{1}{(x'+x)^2+y^2}\right]dx' +$$
$$+\frac{x}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}u(0,y')\left[\frac{1}{x^2+(y'-y)^2} - \frac{1}{x^2+(y'+y)^2}\right]dy' = I_1 + I_2.$$

Для первого интеграла I_1 имеем

$$I_1 = \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x' dx'}{(x'-x)^2+y^2} - \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x' dx'}{(x'+x)^2+y^2}.$$

Во втором слагаемом проведем замену переменной $x'' = -x'$, получим

$$I_1 = \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x' dx'}{(x'-x)^2+y^2} - \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{-\infty} \frac{\sin x'' dx''}{(x''-x)^2+y^2} =$$
$$= \frac{y}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x' dx'}{(x'-x)^2+y^2} + \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin x'' dx''}{(x''-x)^2+y^2} = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x' dx'}{(x'-x)^2+y^2}.$$

Воспользовавшись основной теоремой теории вычетов и леммой Жордана, получаем

$$I_1 = e^{-y}\sin x.$$

Аналогично,

$$I_2 = e^{-x}\sin y.$$

Тогда

$$u(x,y) = e^{-y}\sin x + e^{-x}\sin y.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите потенциал поля бесконечно длинной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла, образованного координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости. Края пластины лежат на прямых, параллельных ребру угла, проходящих, соответственно, через точки (x_1, y_1, z_1) и $(x_1, y_1 + L, z_1)$ (см. рис. 2.6.8, 2.6.9).
2. Найдите потенциал поля бесконечно длинной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла величины $\dfrac{\pi}{2}$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \dfrac{\pi}{2}$. Края пластины лежат на прямых, параллельных ребру угла, проходящих, соответственно, через точки

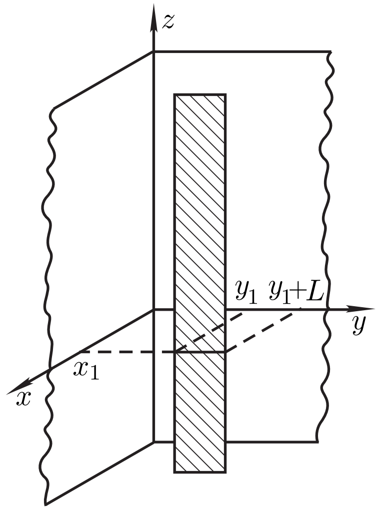

Рис. 2.6.8.

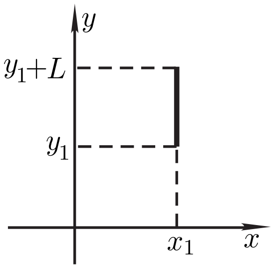

Рис. 2.6.9.

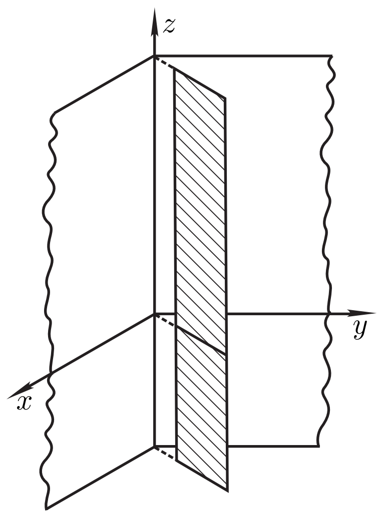

Рис. 2.6.10.

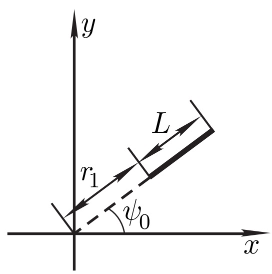

Рис. 2.6.11.

(r_1, ψ_0, z_1) и $(r_1 + L, \psi_0, z_1)$, $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2.6.10, 2.6.11).

3. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости кругового сечения параллельно оси цилиндра. Полость

ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.

4. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной вне бесконечного цилиндра кругового сечения параллельно его оси. Цилиндр является идеально проводящим и заземленным.
5. Постройте функцию Грина оператора Лапласа внутренней задачи Дирихле для полукруга радиуса a.
6. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости параллельно оси цилиндра. Поперечное сечение полости представляет собой сектор круга радиуса a с углом $\dfrac{\pi}{4}$. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.
7. Найдите потенциал поля, создаваемого в области, ограниченной бесконечной цилиндрической поверхностью кругового сечения радиуса a, которая поддерживается при потенциале
$$V = \frac{1}{2 + \cos\psi + \sin\psi},$$
где ψ — полярный угол.
Совет. Примените формулу Пуассона для круга. Используйте замену переменных $z = e^{i\psi}$. При этом интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ перейдет в интеграл по единичной окружности $|z| = 1$. Для вычисления последнего интеграла воспользуйтесь теорией вычетов.
8. С помощью функции Грина для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ решите краевую задачу вне круга радиуса a:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ u|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \infty \text{ при } r \to +\infty. \end{cases}$$
9. Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если:
$$u|_{y=0} = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ V_0, \quad x > 0, \end{cases}$$
где $V_0 = const$.
10. Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если:
$$u|_{y=0} = \sin x.$$

Ответ: $e^{-y}\sin x$.

11. Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в бесконечном секторе с углом $\dfrac{\pi}{2}$, если:

$$u|_{x=0} = \cos y,\ \ u|_{y=0} = \cos x.$$

Ответ: $u(x,y) = e^{-y}\cos x + e^{-x}\cos y$.

12. Решите с помощью функции Грина краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < a, \quad \psi \in (0,\pi), \\ u|_{r=a} = 0, \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\pi} = V_0, \end{cases}$$

где $V_0 = const$.

6.2. Разложение функции Грина по собственным функциям оператора Лапласа.

Функция Грина оператора Лапласа внутренней двумерной задачи Дирихле представима в виде ряда

$$G(Q,M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(Q)v_k(M)}{\lambda_k}, \tag{2.6.7}$$

где v_k и λ_k соответственно ортонормированные собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta v_k = -\lambda_k v_k, \quad M \in D, \\ v_k|_L = 0. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

Ряд сходится по норме пространства $L_2(D \times D)$. Равенство (2.6.7) следует понимать как равенство элементов пространства $L_2(D \times D)$ (см. раздел 3.2). Равенство (2.6.7) следует из теоремы (2.3.1), так как

$$\|G(Q,M)\|^2 = \int\limits_D \int\limits_D G^2(Q,M)dS_Q dS_M < \infty.$$

В самом деле, поскольку

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{QM}}} + v(Q),$$

где v — гармоническая функция, непрерывная в $\overline{D}$, то найдется такая константа $C > 0$, что $|v| \leqslant C$. Следовательно

$$\|G(Q,M)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{D\times D} \left(\ln\frac{1}{r_{QM}}\right)^2 dS_Q dS_M + \frac{C}{\pi} \int\limits_{D\times D} \left|\ln\frac{1}{r_{QM}}\right| dS_Q dS_M + C^2 S_0^2, \tag{2.6.9}$$

где S_0 — площадь области D.

Так как $\left|\ln\frac{1}{r_{QM}}\right| \leqslant \frac{1}{r_{QM}}$ и $\left(\ln\frac{1}{r_{QM}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{r_{QM}}$ при $r_{QM} \to 0$, и, как показано в [7], интеграл

$$I(M) = \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}}\, dS_Q$$

является непрерывной функцией переменной M, то интегралы в правой части (2.6.9) сходятся.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с постоянной линейной плотностью заряда ρ, помещенной внутрь бесконечной цилиндрической полости прямоугольного поперечного сечения: $0 < x < a$, $0 < y < b$. Стенки цилиндра идеально проводящие и заземленные, а нить параллельна оси цилиндра.
2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в секторе радиуса a с углом α.

6.3. Метод разделения переменных.

Метод разделения переменных для построения функции Грина задачи Дирихле в двумерной области D применяется аналогично тому, как это делается в трехмерном случае (см. раздел 3.3). Функция Грина имеет вид

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M),$$

где $Q \in D$ — точка истока, $M \in D$ — точка наблюдения, а функция v является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q\, v = 0, & Q \in D, \\ v|_L = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{PM}}, & P \in L. \end{cases} \tag{2.6.10}$$

Решая задачу (2.6.10) в полярной системе координат, получаем

$$v(r,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\cos n\psi + \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_n r^n + F_n r^{-n}\right)\sin n\psi.$$

Коэффициенты C_n, D_n, E_n, F_n находятся из граничного условия. Разложим неоднородность в граничном условии задачи (2.6.10) в ряд Фурье по основной тригонометрической системе. Для этого воспользуемся разложением в ряд Фурье фундаментального решения оператора Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\varphi-\varphi_0), \text{ если } r > r_0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\varphi-\varphi_0), \text{ если } r < r_0. \end{cases} \tag{2.6.11}$$

Вывод формулы (2.6.11) приведен в приложении (см. Б.0.14).

Пример 2.6.9. *Найдите потенциал поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью с постоянной линейной плотностью заряда ρ_0,расположенной внутри цилиндрического слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными цилиндрическими поверхностями, поперечные сечения которых являются окружностями радиусов a и b ($a < b$). Нить параллельна оси системы.*

Решение. Задачу можно рассматривать как двумерную в любом поперечном сечении цилиндрического слоя. Пусть нить проходит через точку M_0, лежащую в некотором поперечном сечении. Потенциал поля, создаваемого нитью, имеет вид

$$\varphi(M) = 2\rho_0 \ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + v(M).$$

В выбранном поперечном сечении цилиндрического слоя введем полярные координаты. Поместим начало координат на ось симметрии области, а полярную ось ориентируем так, чтобы на ней лежала точка M_0. В этой системе точка M имеет координаты

(r,ψ), а точка M_0 — координаты $(r_0, 0)$. Задача для функции $v(M)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (a,b), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ v|_{r=a} = -2\rho_0 \ln \dfrac{1}{r_{_{PM_0}}}\bigg|_{r=a} = 2\rho_0 \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\psi}\,, \\ v|_{r=b} = -2\rho_0 \ln \dfrac{1}{r_{_{PM_0}}}\bigg|_{r=b} = 2\rho_0 \ln \sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0 \cos\psi}\,. \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа в кольце можно записать следующим образом [2]:

$$v = A_0 \ln\frac{r}{a} + B_0 \ln\frac{b}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n} \cos n\psi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n} \cos n\psi.$$

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n найдем из граничных условий. Для этого представим неоднородности в граничных условиях задачи в виде разложения в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\{\sin n\psi, \cos n\psi\}$, используя формулы (2.6.11):

$$v|_{r=a} = 2\rho_0 \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi} = \\ = 2\rho_0 \ln r_0 - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n}, \text{ так как } r_0 > a, \text{ и}$$

$$v|_{r=b} = 2\rho_0 \ln \sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\psi} = 2\rho_0 \ln b - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$$

так как $r_0 < b$.

Подставляя ряд для функции v в граничные условия задачи, получаем:

$$A_0 = 2\rho_0 \frac{\ln b}{\ln(b/a)}, \quad A_n = -\frac{2\rho_0}{n} \frac{r_0^n}{b^{2n} - a^{2n}},$$

$$B_0 = 2\rho_0 \frac{\ln r_0}{\ln(b/a)}, \quad B_n = -\frac{2\rho_0}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{a^n}{b^{2n} - a^{2n}}.$$

Итак, потенциал имеет вид:

$$\varphi(M)=2\rho_0\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\psi}}+2\rho_0\frac{\ln b\ln(r/a)+\ln r_0\ln(b/r)}{\ln(b/a)}-$$

$$-2\rho_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}+\left(\frac{a^2}{r_0r}\right)^n\frac{b^{2n}-r^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\right\}\cos n\psi.$$

В случае, когда $\rho_0=\dfrac{1}{4\pi}$, найденный потенциал представляет собой функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в кольце $a\leqslant r\leqslant b$ в выбранной системе координат, ориентированной таким образом, что полярная ось проходит через точку M_0. В произвольной полярной системе координат, в которой точки M и M_0 имеют координаты (r,ψ) и (r_0,ψ_0) соответственно, функция Грина имеет вид:

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\ln b\ln(r/a)+\ln r_0\ln(b/r)}{\ln(b/a)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}+\left(\frac{a^2}{r_0r}\right)^n\frac{b^{2n}-r^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\right\}\cos n(\psi-\psi_0).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в полукольце $\{a\leqslant r\leqslant b, 0\leqslant\psi\leqslant\pi\}$.
2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в круге, используя метод разделения переменных.
3. Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле вне круга, используя метод разделения переменных.

6.4. Использование конформных отображений для построения функции Грина оператора Лапласа.

Напомним определение и некоторые свойства конформного отображения [10].

Определение 2.6.1 *Взаимно однозначное отображение области D комплексной плоскости z на область $\tilde{D}$ комплексной плоскости w называется конформным, если это отображение во всех точках $z\in D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.*

Теорема 2.6.1 [10] *Пусть функция $h(z)$ является однозначной и однолистной аналитической функцией в области D и $h'(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда функция $h(z)$ производит конформное отображение области D на область $\widetilde{D}$ комплексной плоскости w, представляющую собой область значений функции $w = h(z)$ при $z \in D$.*

Итак, конформное отображение обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. То есть угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0, равен по абсолютной величине углу между их образами на плоскости w в точке $w_0 = h(z_0)$, а бесконечно малые линейные элементы $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ и $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ преобразуются подобным образом в бесконечно малые линейные элементы $\Delta w_1 = w_1 - w_0$ и $\Delta w_2 = w_2 - w_0$. Коэффициент подобия равен

$$\frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = \frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = |h'(z_0)|.$$

При конформном отображении граница области D переходит в границу области $\widetilde{D}$.

Пусть конформное отображение совершается с помощью аналитической функции $w = h(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, где $z = x + iy$. Тогда замена переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \tag{2.6.12}$$

является невырожденной, а якобиан перехода от старых переменных (x, y) к новым переменным (ξ, η) имеет вид [10]

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{1}{|h'(z)|^2}.$$

Пусть в исходных координатах точка M имеет координаты (x, y), а точка M_0 — координаты (x_0, y_0), и пусть при замене переменных (2.6.12) они переходят в точки $\widetilde{M}(\xi, \eta)$ и $\widetilde{M}_0(\xi_0, \eta_0)$ соответственно.

Покажем, что имеет место равенство

$$\delta(M, M_0) = |h'(z)|^2 \cdot \delta(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0). \tag{2.6.13}$$

Пусть $f_\varepsilon(M, M_0)$ — финитные функции в $\mathbb{R}^2$ при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(M, M_0) dS_M = 1, \ \forall \varepsilon > 0, \tag{2.6.14}$$

и

$$\langle f_\varepsilon(M, M_0), \psi(M)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dS_M \to \psi(M_0)$$

при $\varepsilon \to 0$ для любой непрерывной в точке M_0 функции $\psi(M)$. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и будем считать, что $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, содержащая внутри себя носитель функции $f_\varepsilon(M, M_0)$. Тогда для любой непрерывной в точке M_0 функции $\psi(M)$ имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dS_M = \int\limits_{D} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dxdy =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{D}} f_\varepsilon\left(h^{-1}(\widetilde{M}), h^{-1}(\widetilde{M}_0)\right)\psi\left(h^{-1}(\widetilde{M})\right)\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{D}} \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0)\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\widetilde{\psi}(\widetilde{M})d\xi d\eta,$$

где использованы обозначения $\widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0) = f_\varepsilon\left(h^{-1}(\widetilde{M}), h^{-1}(\widetilde{M}_0)\right)$ и $\widetilde{\psi}(\widetilde{M}) = \psi\left(h^{-1}(\widetilde{M})\right)$, $h^{-1}(\widetilde{M})$ — прообраз точки M, а $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которую переходит область D в результате замены переменных (2.6.12).

В силу равенства (2.6.14) получаем, что

$$\int\limits_{\widetilde{D}} \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0)\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M)dxdy = \psi(M_0),$$

то и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\widetilde{D}} \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0)\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\widetilde{\psi}(\widetilde{M})d\xi d\eta = \psi(M_0) = \widetilde{\psi}(\widetilde{M}_0).$$

Таким образом, функции $\widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0})\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ слабо сходятся к $\delta(\widetilde{M},\widetilde{M_0})$, то есть для любой функции $\varphi(\widetilde{M})$, непрерывной в точке $\widetilde{M_0}$, имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0})\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},\varphi(\widetilde{M})\right\rangle=\varphi(\widetilde{M_0}).$$

Так как

$$\left\langle \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0})\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},\varphi(\widetilde{M})\right\rangle=\left\langle \widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0}),\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\varphi(\widetilde{M})\right\rangle,$$

то функции $\widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0})$ при $\varepsilon\to 0$ слабо сходятся к $\left(\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\bigg|_{\widetilde{M_0}}\right)^{-1}\cdot\delta(\widetilde{M},\widetilde{M_0})$.

Поскольку функции $\widetilde{f}_\varepsilon(\widetilde{M},\widetilde{M_0})=f_\varepsilon(M,M_0)$ слабо сходятся к $\delta(M,M_0)$ при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\delta(\widetilde{M},\widetilde{M_0})=\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\bigg|_{\widetilde{M_0}}\cdot\delta(M,M_0)=\frac{1}{|h'(z)|^2}\cdot\delta(M,M_0),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу для функции Грина $G(M,M_0)$ оператора Лапласа с условиями Дирихле в односвязной двумерной области D с границей L, являющейся кривой Ляпунова:

$$\begin{cases}\Delta_{xy}G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), & M(x,y),M_0(x_0,y_0)\in D,\\[2ex] G(P,M_0)=0, \ \ P\in L.\end{cases}$$

Здесь использовано обозначение Δ_{xy} для оператора Лапласа чтобы подчеркнуть, что он берется в исходных координатах (x,y).

Из теоремы Римана [10] вытекает, что найдется такая аналитическая функция $w=h(z,z_0)$, которая будет осуществлять конформное отображение области D на внутренность единичного круга $|w|<1$ с центром в начале координат так, что фиксированная внутренняя точка $z_0=x_0+iy_0$ переходит в центр этого круга (то есть, в начало координат $\widetilde{O}$). Граница L исходной области D в результате такого преобразования переходит в окружность $|w|=1$.

В результате замены переменных (2.6.12) оператор Лапласа преобразуется следующим образом [10]:

$$\Delta_{xy} = |h'_z|^2 \Delta_{\xi\eta}.$$

Следовательно, с учетом равенства (2.6.13), для функции Грина $\widetilde{G}(\widetilde{M}, \widetilde{O}) = G(M, M_0)$ в новых координатах получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} \widetilde{G}(\widetilde{M}, \widetilde{O}) = -\delta(\widetilde{M}, \widetilde{O}), \\ \widetilde{G}(\widetilde{P}, \widetilde{O}) = 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{M}$ — произвольная точка внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат $\widetilde{O}$, $\widetilde{P}$ — произвольная точка на границе этого круга. Решение этой задачи имеет вид

$$\widetilde{G}(\widetilde{M}, \widetilde{O}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\widetilde{r}},$$

где $\widetilde{r}$ — расстояние от $\widetilde{M}$ до начала координат. Так как $\widetilde{r} = |w| = |h(z, z_0)|$, то, возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|h(z, z_0)|},$$

где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Итак, справедлива следующая теорема [10]:

Теорема 2.6.2 *Если функция $w = h(z_0, z)$ осуществляет конформное отображение области D_1 комплексной плоскости z на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, что заданная точка $z_0 \in D$ переходит в центр $w = 0$ этого круга, то функция*

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|h(z_0, z)|} \qquad (2.6.15)$$

является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D.

Пример 2.6.10. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с постоянной линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины α параллельно ребру этого угла, $\alpha \in (0; 2\pi)$. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости. (Для частного случая $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ данная задача решена ранее методом электростати-*

ческих отображений, однако в общем случае этот метод неприменим: рано или поздно фиктивный заряд, полученный при отражении, попадет в рассматриваемую область, что приведет к наличию лишнего точечного источника).

Решение. Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Oz с ребром угла. Так как линейная плотность заряда q нити постоянна, то в задаче нет зависимости от переменной z, и она сводится к двумерной. Рассмотрим произвольную плоскость, перпендикулярную ребру угла. Пусть M_0 — точка пересечения нити с этой плоскостью, и (r_0, ψ_0) — полярные координаты точки M_0 в рассматриваемой плоскости. Область $D = \{(r,\psi):\ r > 0,\ 0 < \psi < \alpha\}$ в выбранной плоскости соответствует внутренней части двугранного угла. Итак, задача принимает вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q\delta(M, M_0),\ \ M, M_0 \in D, \\ u\big|_{\psi=0} = u\big|_{\psi=\alpha} = 0. \end{cases}$$

Введем комплексную плоскость z, где $|z| = r$, $\arg z = \psi$ и будем искать решение этой задачи с помощью теоремы 2.6.2. Для этого нужно отобразить область D на внутренность круга единичного радиуса. Сначала преобразуем сектор в верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\zeta_0 = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$ (используется главная ветвь функции), где z_0 соответствует точке M_0. Верхняя полуплоскость может быть отображена на круг с помощью дробно-линейной функции

$$w = f(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \overline{\zeta}_0},$$

где $\overline{\zeta}_0$ — комплекно сопряженное к ζ_0, причем точка $\zeta_0 = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$ переходит в центр круга. Следовательно, по теореме 2.6.2, решение задачи имеет вид:

$$u(z, z_0) = 2q \ln \frac{\left| z^{\pi/\alpha} - \overline{z}_0^{\pi/\alpha} \right|}{\left| z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha} \right|},$$

или

$$u(r,\psi) = q \ln \frac{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2\,(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}(\psi + \psi_0)}{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2\,(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}(\psi - \psi_0)}.$$

Замечание 2.6.1 *Вообще говоря, функция* $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ *является многозначной:*

$$\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{\pi}{\alpha}(\ln|z| + i\arg z + i2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы построить с ее помощью конформное отображение, мы выбираем ветвь, соответствующую $k = 0$.

Точка $z = 0$ *является точкой ветвления для функции* $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, *поэтому при* $z = 0$ *конформность отображения нарушается. Тем не менее, значение потенциала поля в этой точке известно из граничного условия, оно равно нулю, поскольку по условию грани угла заземлены.*

Пример 2.6.11. *Постройте функцию Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в полосе* $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in \in (0; \pi)$.

Решение. Для решения задачи нужно построить конформное отображение данной полосы комплексной плоскости z на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$, при котором заданная точка z_0 переходила бы в центр круга $\zeta = 0$. Это отображение осуществляется с помощью функции

$$f(z, z_0) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\overline{z}_0}}.$$

Так как

$$|e^z - e^{z_0}| = \left\{(e^x \cos y - e^{x_0}\cos y_0)^2 + (e^x \sin y - e^{x_0}\sin y_0)^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= e^{\frac{x+x_0}{2}}\sqrt{2}\,\{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)\}^{\frac{1}{2}},$$

то после преобразований получаем искомую функцию Грина

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины $\frac{2\pi}{3}$ параллельно ребру этого угла. Грани угла представляют собой идеально проводящие заземленные плоскости.

2. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной вне двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (r_1, ψ_0, z_1) и $(r_1 + L, \psi_0, z_1)$, $\frac{\pi}{2} < \psi_0 < 2\pi$.

6.5. Построение функции Грина с помощью разложения в ряд Фурье. Метод разложения в ряд Фурье применим и в двумерном случае. Он позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим построение функции Грина с помощью этого метода.

Пример 2.6.12. *Постройте функцию Грина для кольцевого сектора $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \psi \leqslant \alpha$.*

Решение. Функция Грина $G(r, r_0, \psi, \psi_0)$ является решением задачи

$$\Delta G = -\frac{4\pi}{r_0}\delta(r - r_0)\delta(\psi - \psi_0), \tag{2.6.16}$$

$$a < r, r_0 < b;\ 0 < \psi, \psi_0 < \alpha, \tag{2.6.17}$$

$$G|_{\psi=0} = G|_{\psi=\alpha} = 0, \tag{2.6.18}$$

$$G|_{r=a} = G|_{r=b} = 0, \tag{2.6.19}$$

где $\Delta G = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}$, а в правой части уравнения (2.6.16) использовано выражение для $\delta(M, M_0)$ в полярной системе координат. Будем искать функцию $G(r, r_0, \psi, \psi_0)$ в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций $v_n(\psi) = \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi$, $n = 1, 2, \ldots$ отрезка $[0, \alpha]$:

$$G(r, r_0, \psi, \psi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi.$$

Коэффициенты A_n разложения в ряд Фурье определяются формулами

$$A_n(r) = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} G(r, r_0, \psi, \psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Получим уравнения для коэффициентов разложения. Для этого умножим уравнение (2.6.16) на $\dfrac{2}{\alpha}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi$ и проинтегрируем левую и правую части полученного равенства по отрезку $[0,\alpha]$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\alpha G\left(r,r_0,\psi,\psi_0\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\frac{\partial^2 G}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi=-\frac{8\pi\delta(r-r_0)}{\alpha r_0}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0,$$

где выражение в правой части равенства получено из определения δ-функции. Два раза интегрируя по частям второе слагаемое в левой части с учетом граничных условий (2.6.18), получаем уравнения для функций $A_n(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n}{dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 A_n=-\frac{8\pi r}{r_0\alpha}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0,\ \ n=1,2,\ldots \tag{2.6.20}$$

Краевые условия для этого уравнения следуют из (2.6.19):

$$A_n(a)=A_n(b)=0. \tag{2.6.21}$$

Будем строить решение задачи (2.6.20)-(2.6.21) с помощью функции Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $[a,b]$. Как известно [17], функцию Грина самосопряженного оператора

$$L[y]=\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dy}{dr}\right)-q(r)y$$

следует искать в виде:

$$g(r,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\begin{cases} y_1(r)y_2(s), & a\leqslant r\leqslant s,\\ y_2(r)y_1(s), & s\leqslant r\leqslant b,\end{cases}$$

где $y_1(r)$, $y_2(r)$ — решения однородного уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющие условиям

$$y_1(a)=0,\quad y_2(b)=0, \tag{2.6.22}$$

а $W(s)$ — определитель Вронского функций $y_1(r)$ и $y_2(r)$, взятый в точке s.

Решения однородного уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 y=0,$$

удовлетворяющие краевым условиям (2.6.22), имеют вид

$$y_1(r)=r^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right),\quad y_2(r)=r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right).$$

Так как для краевой задачи (2.6.20)-(2.6.21) функция $p(r)=$ $=r$, то, подставляя в выражение для определителя Вронского функции $y_1(r)$ и $y_2(r)$, получаем

$$p(s)W(s)=sW\left[y_1(s),y_2(s)\right]=-\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right).$$

Следовательно, функция $g(r,s)$ имеет вид

$$g(r,s)=\left[-\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\begin{cases}\left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & a\leqslant r\leqslant s,\\ \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{s}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & s\leqslant r\leqslant b.\end{cases}$$

Функция $A_n(r)$, которая является решением задачи (2.6.20)-(2.6.21), может быть представлена через функцию $g(r,s)$ следующим образом [17]:

$$A_n(r)=\int_a^b g(r,s)\left(-\frac{8\pi}{\alpha}\right)\frac{s}{r_0}\delta(s-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 ds, \qquad (2.6.23)$$

Подставляя выражение для $g(r, s)$ в (2.6.23) и вычисляя интеграл, получаем

$$A_n(r) = \\ = \begin{cases} 4 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\dfrac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) \left(1 - \left(\dfrac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & a \leqslant r \leqslant r_0, \\ 4 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\dfrac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) \left(1 - \left(\dfrac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & r_0 \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Окончательно решение задачи (2.6.16)-(2.6.19) получаем в виде ряда Фурье

$$G(r, r_0, \psi, \psi_0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\dfrac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) \left(1 - \left(\dfrac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \times \\ \qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi, \ r \leqslant r_0, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \left(1 - \left(\dfrac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right) \left(1 - \left(\dfrac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)} \times \\ \qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin \dfrac{\pi n}{\alpha}\psi, \quad r_0 \leqslant r. \end{cases}$$

Отметим, что полученные ряды сходятся абсолютно при $r \neq \neq r_0$ и условно при $r = r_0$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутрь бесконечной цилиндрической полости,

поперечное сечение которой имеет форму сектора радиуса a и углом $\dfrac{\pi}{4}$. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.

Глава 3

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ НЕЙМАНА

Краевые задачи для оператора Лапласа с граничным условием Неймана возникают, например, при расчете стационарного распределения температуры в некоторой области. Если известен тепловой поток через границу этой области, то мы приходим к задаче с неоднородным условием Неймана. Если поток тепла через границу отсутствует, то есть граница теплоизолирована, то граничное условие Неймана оказывается однородным.

§ 1. Внутренние трехмерные задачи

Пусть D — область, ограниченная поверхностью Ляпунова S в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta u\,(M) = -F(M), \quad M \in D, \tag{3.1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u\,(P)}{\partial n}\right|_S = f(P), \quad P \in S, \tag{3.1.2}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

В отличие от задачи Дирихле вторая краевая задача (3.1.1-3.1.2) разрешима только при выполнении условия

$$-\int\limits_D F(M)dV = \int\limits_S f(P)dS. \tag{3.1.3}$$

Действительно, пусть решение задачи $u(M)$ существует. Применим первую формулу Грина

$$\int\limits_D v\Delta u\,dV = \int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_D \nabla v \cdot \nabla u\,dV,$$

к решению $u\,(M)$ задачи (3.1.1-3.1.2) и функции $v\,(M) = 1$. В результате получим

$$\int\limits_D \Delta u dV = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS, \tag{3.1.4}$$

откуда следует (3.1.3). Таким образом, условие (3.1.3) является необходимым условием разрешимости задачи.

Поясним физический смысл условия разрешимости (3.1.3) в рамках электростатики. Если функция u представляет собой потенциал электростатического поля, то выражение в правой части (3.1.4) есть полный поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S, а выражение в левой части (3.1.4) есть полный заряд, находящийся внутри области D. Таким образом, равенство (3.1.3) означает выполнение теоремы Остроградского–Гаусса.

Пусть условие разрешимости задачи (3.1.1)-(3.1.2) выполнено.

Определение 3.1.1 *Будем называть классическим решением задачи (*3.1.1-3.1.2*) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (*3.1.1*) в области D и граничному условию (*3.1.2*).*

Утверждение 3.1.1 *Если функция $F(M)$ является непрерывно дифференцируемой, а функция $f(P)$ непрерывна и удовлетворяет условию (*3.1.3*), то задача (*3.1.1*)-(*3.1.2*) имеет классическое решение, которое определяется с точностью до аддитивной постоянной* [1].

Для того, чтобы получить выражение для решения задачи (3.1.1-3.1.2), воспользуемся формулой (2.1.4):

$$
\begin{aligned}
u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P - \\
- \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q.
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

Через $G(Q,M)$ обозначено фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае, которое представляет собой сумму двух слагаемых:

$$
G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v\,(Q)\,,
$$

где $v\,(Q)$ — гармоническая в области D функция. Подставляя в выражение (3.1.5) значения $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$ и $\Delta u(Q) = -F(Q)$, получаем:

$$
\begin{aligned}
u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)f(P) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P + \\
+ \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q.
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

В правой части (3.1.6) содержится слагаемое

$$
\int\limits_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dS_P = \int\limits_S u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{4\pi r_{_{PM}}} + v(P)\right) dS_P, \tag{3.1.7}
$$

значение которого неизвестно, поскольку в задаче на границе S задано лишь $\dfrac{\partial u}{\partial n}(P)$, $P \in S$, а значение самой функции $u(P)$ не определено.

Решение внутренней трехмерной задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной, поэтому подберем функцию v таким образом, чтобы выражение (3.1.7) было равно константе. Возьмем в качестве функции v решение задачи

$$
\begin{cases}
\Delta v(Q) = 0, \quad Q \in D, \\
\left.\dfrac{\partial v}{\partial n_P}\right|_S = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial n_P}\dfrac{1}{r_{_{PM}}} + C, \quad P \in S.
\end{cases} \tag{3.1.8}
$$

Константа C в краевом условии задачи (3.1.8) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости (3.1.3), которое в данном случае приобретает вид:

$$
\int\limits_S \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{_{PM}}} + C \right) dS_P = 0,
$$

откуда получаем

$$
C \cdot S_0 = \int\limits_S \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{_{PM}}} \right) dS_P,
$$

где S_0 — площадь поверхности S. Интеграл в правой части последнего равенства можно вычислить, используя третью формулу Грина (А.1.7), записанную для функции $u \equiv 1$:

$$
1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{_{PM}}} dS_P.
$$

Окончательно получаем

$$C = -\frac{1}{S_0}.$$

Определение 3.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой фиксированной точки $M \in D$;
2) $\dfrac{\partial}{\partial n_P} G(P, M)\Big|_{P \in S} = -\dfrac{1}{S_0}$ для каждой фиксированной точки $M \in D$, где S_0 — площадь поверхности S.

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в трехмерном случае представляет собой решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q, M) = -\delta(Q, M), \quad Q, M \in D, \\ \dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\Big|_S = -\dfrac{1}{S_0}, \quad P \in S, \quad M \in D. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Функция Грина задачи Неймана (3.1.1)-(3.1.2) определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q, но, вообще говоря, зависящего от координат точки M. Для более удобного представления функции Грина это слагаемое можно выбрать так, чтобы она была симметричной: $G(Q, M) = G(M, Q)$. Для этого достаточно потребовать выполнения дополнительного условия

$$\int\limits_S G(P, M) dS_P = 0, \tag{3.1.10}$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q, M)$ [1].

Таким образом, решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) можно записать в виде

$$u(M) = \int\limits_S G(P, M) f(P) dS_p + \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dV_Q + A_0, \tag{3.1.11}$$

где A_0 — произвольная постоянная.

§ 2. Внешние трехмерные задачи Неймана

Как и в случае внешних задач Дирихле, при постановке внешних задач Неймана для оператора Лапласа требуется дополнительное условие регулярности решения на бесконечности (см. определение 2.2.1).

Пусть D_e — дополнение ограниченной области D до всего пространства $\mathbb{R}^3$, $\overline{D}_e$ — область D_e со своей границей S. Будем искать регулярное на бесконечности решение следующей задачи:

$$\Delta u(M) = -F(M), \ \ M \in D_e, \tag{3.2.1}$$

$$\left.\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_S = f(P), \ \ P \in S, \tag{3.2.2}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D_e нормаль к поверхности S.

Определение 3.2.1 *Будем называть классическим решением задачи* (3.2.1)*-*(3.2.2) *регулярную на бесконечности функцию* $u(M)$*, дважды непрерывно дифференцируемую в области* D_e*, непрерывно дифференцируемую в области* $\overline{D}_e$*, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (3.2.1) *в области* D_e *и граничному условию* (3.2.2)*.*

Утверждение 3.2.1 *Если поверхность* S *является поверхностью Ляпунова, то задача* (3.2.1)*-*(3.2.2) *имеет единственное классическое решение для любой непрерывной на поверхности* S *функции* $f(P)$ *и любой финитной непрерывно-дифференцируемой функции* $F(M)$ [1].

Таким образом, в отличие от случая внутренней трехмерной задачи Неймана, для внешней трехмерной задачи дополнительное условие разрешимости не требуется.

Для регулярных на бесконечности функций во внешних областях справедливы формулы Грина. Поэтому решение задачи (3.2.1) можно построить, используя формулу (2.1.4):

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P -$$

$$- \int\limits_{D_e} G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q,$$

где

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q),$$

а $v(Q)$ — произвольная регулярная на бесконечности гармоническая функция. Заметим, что в отличие от внутренних задач Неймана, при построении решения внешних задач в трехмерном случае можно требовать, чтобы производная $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}$ обращалась в ноль на границе S, так как никаких дополнительных условий разрешимости задачи не требуется.

Определение 3.2.2 *Функцией Грина внешней задачи Неймана (3.2.1)-(3.2.2) для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q,M)$ — регулярная на бесконечности гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D_e}$ для каждой фиксированной точки $M \in D_e$;

2) $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\Big|_{P\in S} = 0$ для каждой фиксированной точки $M \in$ $\in D_e$.

Функция Грина $G(Q,M)$ для каждой фиксированной точки M является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \ \ Q,M \in D_e, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\Big|_S = 0, \ \ P \in S, M \in D_e, \\ G(Q,M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Отметим, что функция $G(Q,M)$ симметрична относительно перестановки точек Q и M.

Решение задачи (3.2.1) может быть записано в виде:

$$u(M) = \int\limits_S G(P,M)f(P)dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q. \tag{3.2.4}$$

§ 3. Внутренние двумерные задачи Неймана

Пусть D — ограниченная область в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ с границей L, являющейся кривой Ляпунова. Рассмотрим задачу Неймана:

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}\bigg|_L = f(P), \quad P \in L. \tag{3.3.2}$$

Как и в случае трехмерной задачи, можно доказать, что краевая задача (3.3.1)-(3.3.2) разрешима только при выполнении условия

$$-\int\limits_D F(M)dS = \int\limits_L f(P)dl. \tag{3.3.3}$$

Определение 3.3.1 *Будем называть классическим решением задачи* (3.3.1)*-*(3.3.2) *функцию* $u(M)$*, дважды непрерывно дифференцируемую в области* D*, непрерывно дифференцируемую в области* $\overline{D}$*, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (3.3.1) *в области* D *и граничному условию* (3.3.2) *при условии* (3.3.3)*.*

Утверждение 3.3.1 *Если функция* $f(P)$ *является непрерывной, а функция* $F(M)$ *— непрерывно дифференцируемой, то при выполнении условия* (3.3.3) *решение задачи* (3.3.1)*-*(3.3.2) *существует, но оно не единственно и определяется с точностью до аддитивной постоянной* [1].

Как и в трехмерном случае, для решения задачи (3.3.1)-(3.3.2) справедливо соотношение:

$$\begin{gathered} u(M) = \int\limits_L \left(G(P,M)f(P) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \\ + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Здесь $G(Q,M)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q),$$

где $v(Q)$ — гармоническая в области S функция.

В правой части (3.3.4) содержится слагаемое

$$\int\limits_L u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dl_P = \int\limits_L u(P)\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dl_P, \tag{3.3.5}$$

значение которого неизвестно, поскольку на границе L задано лишь $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, а значение $u(P)$ не задано.

Как и в трехмерном случае, подберем функцию v для каждой фиксированной точки M, таким образом, чтобы выражение (3.3.5) было равно константе. Возьмем в качестве функции $v(Q)$ решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v(Q) = 0, \quad Q \in D, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n_P}\right|_L = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial n_P}\ln\dfrac{1}{r_{PM}} + C, \quad P \in L. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Константа C в краевом условии (3.3.6) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости (3.3.3), которое в данном случае приобретает вид:

$$\int\limits_L \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} + C\right) dl_P = 0,$$

откуда получаем

$$C \cdot L_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} dl_P, \tag{3.3.7}$$

где L_0 — длина кривой L.

Интеграл в правой части (3.3.7) можно вычислить, используя третью формулу Грина (A.3.3), записанную для функции $u \equiv 1$:

$$1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} dl_P.$$

Окончательно получаем

$$C = -\frac{1}{L_0}.$$

Определение 3.3.2 *Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ *— гармоническая функция координат точки* $Q \in D$*, непрерывная на* $\overline{D}$ *для каждой точки* $M \in D$*;*
2) $\dfrac{\partial}{\partial n_P} G(P,M)\Big|_{P\in L} = -\dfrac{1}{L_0}$ *для каждой точки* $M \in D$*.*

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в двумерном случае представляет собой решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\Big|_L = -\dfrac{1}{L_0}, \quad P \in L, \quad M \in D. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

С ее помощью можно записать зешение задачи (3.3.1)-(3.3.2) в виде

$$u(M) = \int\limits_L G(P,M) f(P) dl_P + \int\limits_D G(Q,M) F(Q) dS_Q + A_0, \tag{3.3.9}$$

где A_0 — произвольная постоянная.

Отметим,что функция Грина задачи Неймана определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q, но, вообще говоря, зависящего от координат точки M. Это слагаемое можно выбрать так, чтобы функция Грина была симметричной. Для этого достаточно потребовать выполнения дополнительного условия

$$\int\limits_L G(P,M) dl_P = 0,$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q,M)$ [1].

§ 4. Внешние двумерные задачи Неймана

Пусть D_e — дополнение некоторой замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ с гладкой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Внешняя задача Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае имеет вид:

$$\Delta u(M) = -F(M), \;\; M \in D_e, \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}\Big|_L = f(P), \;\; P \in L, \tag{3.4.2}$$

$$|u| < \infty, \tag{3.4.3}$$

где $\vec{n}$ — внешняя по отношению к области D_e нормаль к границе L.

Определение 3.4.1 *Будем называть классическим решением задачи* (3.4.1)-(3.4.3) *регулярную на бесконечности функцию* $u(M)$*, дважды непрерывно дифференцируемую в области* D_e*, непрерывно дифференцируемую в области* $\overline{D}_e$*, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (3.4.1) *в области* D_e *и граничному условию* (3.4.2).

Утверждение 3.4.1 *Если кривая* L *является кривой Ляпунова, функция* $F(M)$ *является финитной и непрерывно дифференцируемой, а функция* $f(P)$ *непрерывной, то задача* (3.4.1)-(3.4.3) *имеет классическое решение только при выполнении условия разрешимости*

$$\int\limits_{L} f(P)dl_P = -\int\limits_{D_e} F(M)dS_M. \tag{3.4.4}$$

Условие (3.4.4) получается из второй формулы Грина для неограниченной области D_e (см. (А.4.5)):

$$\int\limits_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \int\limits_{L} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dl,$$

записанной для решения $u(M)$ задачи (3.4.1) и регулярной на бесконечности в двумерном случае функции $v(M) = 1$. Провести подобные рассуждения в случае внешних трехмерных задач Неймана нельзя, так как формулы Грина во внешних областях справедливы только для регулярных на бесконечности функций, к которым функция $v \equiv 1$ в трехмерном случае не относится.

Классическое решение внешней двумерной задачи Неймана не единственно, а определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пусть условие (3.4.4) выполнено. Построим решение задачи (3.4.1)-(3.4.3) в интегральном виде. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось внутри области D. Рассмотрим функцию

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QO}} + \widetilde{v}(Q), \tag{3.4.5}$$

где $\widetilde{v}(Q)$ — гармоническая в области D_e регулярная на бесконечности функция. Функция $G(Q, M)$ представляет собой регулярное на бесконечности фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае, то есть

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,M \in D_e, \\ |G(Q,M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to +\infty, \quad M \in D_e, \end{cases} \tag{3.4.6}$$

где M — фиксированная точка.

Предположим, что носитель функции $F(M)$ в задаче (3.4.1) принадлежит ограниченной области $D_0 \subset D_e \subset \mathbb{R}^2$. Тогда вне области D_0 решение $u(M)$ задачи (3.4.1) является гармонической функцией, и поэтому в любой точке $M \in D_e$ для него справедлива формула (2.5.6) из §5 главы 2:

$$u(M) = \int\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(P,M) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) \right\} dl_P -$$
$$- \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) G(Q,M) dS_Q.$$

Подставляя в последнее выражение правые части уравнения и краевого условия задачи (3.4.1)-(3.4.3), получаем:

$$\begin{aligned} u(M) = \int\limits_L \left(f(P)G(P,M) - u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \\ + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q) dS_Q. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Слагаемое

$$\int\limits_L u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dl_P \tag{3.4.8}$$

в выражении (3.4.7) неизвестно. Поскольку решение внешней двумерной задачи Неймана для оператора Лапласа определяется с точностью до аддитивной постоянной, подберем функцию $\widetilde{v}(Q)$ в выражении (3.4.5) для функции $G(Q,M)$ таким образом, чтобы это неизвестное слагаемое было равно константе. Если положить

$$\left. \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right|_L = C = const, \tag{3.4.9}$$

то интеграл (3.4.8) представляет собой константу. Постоянную C определим из условия разрешимости задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D_e, \\ |G(Q,M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to +\infty, \quad M \in D_e. \\ \left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = C, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

которое принимает вид:

$$\int\limits_L C dl_P = -1. \tag{3.4.11}$$

Из равенства (3.4.11) получаем

$$C = -\frac{1}{L_0},$$

где L_0 — длина кривой L.

Определение 3.4.2 *Функцией Грина внешней задачи Неймана* (3.4.1)-(3.4.3) *для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in \in D_e$, непрерывная на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$ и имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;
2) $\left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_{P\in L} = -\dfrac{1}{L_0}$ для каждой точки $M \in D_e$, где L_0 — длина кривой L;
3) $G(Q,M)$ регулярна на бесконечности.

Функция $G(Q,M)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D_e, \\ \left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = -\dfrac{1}{L_0}, \quad P \in L, \quad M \in D_e, \\ |G(Q,M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to +\infty, \quad M \in D_e. \end{cases} \tag{3.4.12}$$

Решение задачи (3.4.12) определено с точностью до слагаемого, не зависящего от точки Q.

Как и в случае внутренних двумерных задач, функция Грина будет симметрична относительно перестановки точек M и Q, если дополнительно потребовать выполнения условия

$$\int\limits_{L} G(P, M) dl_P = 0,$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q, M)$.

Решение краевой задачи Неймана (3.4.1)-(3.4.3) можно представить с помощью функции Грина следующим образом:

$$u(M) = \int\limits_{L} G(P, M) f(P) dl_P + \int\limits_{D_e} G(Q, M) F(Q) dV_Q + A_0,$$

где $M \in D_e$ — произвольная точка области, A_0 — произвольная константа.

§ 5. Методы решения задач Неймана

5.1. Метод зеркальных отображений.

Пример 3.5.1. *Найдите решение задачи Неймана в верхнем полупространстве:*

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \; x, y \in (-\infty, +\infty), \; z \in (0, +\infty), \\ \left. \dfrac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} \right|_{z=0} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности}, \end{cases} \tag{3.5.1}$$

где точка наблюдения M имеет координаты (x, y, z), а точка источника M_0 — координаты (x_0, y_0, z_0). Решение этой задачи будем называть функцией Грина оператора Лапласа задачи Неймана в верхнем полупространстве.

Решение. Пусть точка $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ симметрична точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $z = 0$. Функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{r_{MM_1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right), \tag{3.5.2}$$

представляющая собой сумму фундаментального решения оператора Лапласа и гармонической функции $v(M) = \dfrac{1}{4\pi r_{MM_1}}$, удовлетворяет уравнению (3.5.1) и граничному условию (3.5.1) и является регулярной на бесконечности. Следовательно, она представляет собой искомую функцию Грина.

Поясним физический смысл построенной функции Грина на примере задачи о стационарном точечном источнике тепла. Пусть плоскость $z = 0$ является теплоизолированной, то есть поток тепла через нее отсутствует. Поместим точечный источник тепла в точку M_0 верхнего полупространства. Формально добиться равенства нулю потока тепла через границу можно, поместив в симметричную точку M_1 фиктивный источник тепла той же мощности.

Пример 3.5.2. *Найдите распределение температуры от стационарного источника тепла мощности q, расположенного в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри слоя $0 < z < l$, считая, что плоскость $z = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а плоскость $z = l$ не пропускает тепло.*

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — точка наблюдения (рис. 3.5.1). Искомое распределение температуры $u(x, y, z)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -q\cdot\delta(M, M_0), \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \ z \in (0, l), \\ u|_{z=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l} = 0, \end{cases} \tag{3.5.3}$$

и имеет вид $u(M) = \dfrac{q}{r_{MM_0}} + v(M)$, где $v(M)$ — гармоническая функция.

Найдем функцию v, последовательно отображая точечный источник тепла относительно плоскостей $z = 0$ и $z = l$ так, чтобы на каждом шаге точно выполнялось краевое условие при $z = 0$ или $z = l$.

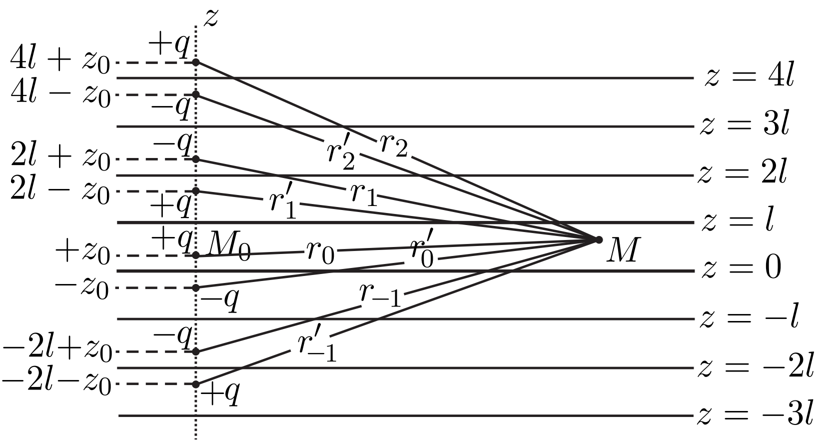

Рис. 3.5.1.

Шаг 1. Добиться выполнения условия Дирихле при $z = 0$ можно, добавляя симметрично относительно плоскости $z = 0$ фиктивный источник в точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, мощность которого по модулю равна, но по знаку противоположна исходному. Будем далее называть его стоком тепла. Поскольку сток оказывается вне слоя $z \in [0, l]$, то функция

$$u_0(M) = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right),$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_0' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2},$$

удовлетворяет уравнению (3.5.3) в области $x, y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in \in (0, l)$ и граничному условию $u_0 = 0$ при $z = 0$. Однако условие $\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = 0$ при $z = l$ не выполняется.

Шаг 2. Для того, чтобы добиться выполнения условия Неймана при $z = l$, достаточно отобразить источники (исходный в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и фиктивный в точке $M_1(x_0, y_0, -z_0)$) симметрично относительно плоскости $z = l$, не меняя их знаки. В результате получаем систему из двух источников и двух стоков. Функция

$$u_1(M) = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) - q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l+z_0))^2}\,,$$

$$r_1' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l-z_0))^2}\,,$$

удовлетворяет уравнению (3.5.3), граничному условию $\dfrac{\partial u_1}{\partial z} = 0$ при $z = l$, но не обращается в нуль при $z = 0$.

Последовательно повторяя отображения, так что при отражении относительно плоскости $z = 0$ знаки источников и стоков меняются на противоположные, а при отражении относительно плоскости $z = l$ остаются неизменными, получим решение в виде ряда

$$u(M) = q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'} \right), \tag{3.5.4}$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}\,,$$

$$r_n' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}\,.$$

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (3.5.4) доказывается также, как и в примере 2.3.5. Аналогично можно показать, что ряд (3.5.4) можно дважды дифференцировать. Граничные условия для полученной функции при $z = 0$ и $z = l$ также оказываются выполненными, так как на каждом шаге одно из граничных условий выполняется точно, а ошибка в другом граничном условии убывает как $\dfrac{1}{n^2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите распределение температуры в нижнем полупространстве, создаваемое точечным источником, помещенным в точку $M_0(1, 2, -3)$, если плоскость $z = 0$ теплоизолирована.
2. Найдите распределение температуры в верхнем полупространстве $z > 0$, если поток тепла через плоскость $z = 0$ задается функцией $f(x, y)$, такой что $f(x, y) = \underline{\underline{O}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.
3. Найдите распределение температуры в верхнем полупространстве $z > 0$, если в некоторой ограниченной области D верхнего полупространства распололожены источники

тепла с плотностью $Q(M)$, а плоскость $z = 0$ теплоизолирована.

4. Найдите распределение температуры, создаваемое отрезком длины l бесконечно тонкой равномерно нагретой нити с линейной плотностью источников тепла q, помещенным над теплоизолированной плоскостью: а) отрезок составляет с плоскостью угол α, расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h; б) отрезок расположен параллельно плоскости на расстоянии h от нее; в) отрезок расположен перпендикулярно плоскости, расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h.
5. Найдите распределение температуры, создаваемое стационарным источником мощности q, расположенным в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри слоя $0 < z < l$, считая, что плоскости $z = 0$ и $z = l$ не пропускают тепло.
6. Найдите распределение температуры, создаваемое точечным источником, помещенным в точке M_0 внутри двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$, если одна грань угла $\psi = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а вторая его грань $\psi = \frac{\pi}{2}$ теплоизолирована. Угловая координата точки M_0 равна $\frac{\pi}{8}$, радиальная координата равна r_0.
7. Найдите распределение температуры в области $y > 0$, $z > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, создаваемое источниками, расположенными с линейной плотностью q вдоль отрезка длины l. Концы отрезка имеют координаты (x_0, y_0, z_0), $(x_0, y_0 + l, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 > 0$. Граница $z = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а граница $y = 0$ теплоизолирована.

5.2. Метод разделения переменных.

Пример 3.5.3. *Найдите функцию Грина внутренней задачи Неймана для шара радиуса a.*

Решение. Для того, чтобы построить функцию Грина $G(M, M_0)$, прежде всего выберем систему координат, в которой будет наиболее удобно решать задачу. Направим ось Oz, от которой отсчитывается угол θ сферической системы координат, так, чтобы она проходила через точку источника M_0. Тогда точки M и M_0 будут иметь координаты

$$M(r, \theta, \psi) \text{ и } M_0(r_0, 0, 0),$$

а расстояние между ними

$$r_{_{MM_0}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}\,.$$

Функция Грина представима в виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} + v(M),$$

где $v(M)$ есть решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{4\pi a^2} - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\left.\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\right|_{r=a}, \\ |v|_{r=0} < \infty. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Заметим, что решение задачи (3.5.5) не зависит от угла ψ, так как функция v удовлетворяет однородному уравнению, и в граничном условии нет зависимости от ψ. Решение может быть записано в виде [2]:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{na^{n-1}} P_n(\cos\theta). \tag{3.5.6}$$

Разложим выражение

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} \tag{3.5.7}$$

в граничном условии задачи (3.5.5) в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Поскольку $r_0 < a$, а выражение (3.5.7) нам нужно при $r = a$, то, не ограничивая общности, его можно сначала получить для $r_0 < r \leqslant a$. Рассмотрим

$$\frac{1}{r_{_{MM_0}}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + (r_0/r)^2 - 2(r_0/r)\cos\theta}} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Здесь мы воспользовались формулой для производящей функции полиномов Лежандра [1] и тем, что $\frac{r_0}{r} < 1$. Итак, выражение в правой части граничного условия можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi a^2} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\Bigg|_{r=a} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n(n+1)}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n(n+1)}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta).$$

Тогда, подставляя функцию v, задаваемую выражением (3.5.6), в граничное условие, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n(n+1)}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta),$$

откуда находим

$$A_n = \frac{1}{4\pi a^2}(n+1)\left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, функция v имеет вид:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi a}\frac{n+1}{n}\left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$
$$= A_0 + \frac{1}{4\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) + \frac{1}{4\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

где A_0 — произвольная постоянная. Введем обозначение $r_1 = a^2/r_0$ и просуммируем первый из рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}} - 1 =$$

$$= \frac{a^2}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1\cos\theta}} - 1 = \frac{a^2}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}} - 1,$$

где $M_1(r_1, 0, 0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно сферы, то есть точка, лежащая на луче OM_0, такая что $r_1 \cdot r_0 = a^2$.

Используя формулу (Б.0.9) приложения, просуммируем второй ряд в выражении для функции v:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$

$$= -\ln \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{r_0 r}{a^2} \cos\theta + \sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1}\cos\theta + \frac{r^2}{r_1^2}} \right\} =$$

$$= -\ln \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{r_0 r}{a^2} \cos\theta + \frac{r_0}{a^2} r_{MM_1} \right\} = \ln \frac{2a^2}{a^2 - r r_0 \cos\theta + r_0 r_{MM_1}}.$$

Следовательно, в выбранной системе координат функция Грина внутренней задачи Неймана для шара имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{a} \ln \frac{2a^2}{a^2 - r r_0 \cos\theta + r_0 r_{MM_1}} \right) + A,$$

где A — произвольная постоянная.

Если система координат ориентирована произвольным образом, то точки M и M_0 имеют координаты

$$M(r, \theta, \psi) \text{ и } M_0(r_0, \theta_0, \psi_0),$$

а функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned} G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \ln \frac{2a^2}{a^2 - r r_0 \cos\gamma + r_0 r_{MM_1}} \right) + A(M_0), \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

где $M_1(a^2/r_0, \theta_0, \psi_0)$ — точка, сопряженная относительно сферы радиуса a точке M_0, γ — угол между лучами OM и OM_0,

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\psi - \psi_0),$$

а $A(M_0)$ — произвольная функция точки M_0, не зависящая от точки M.

Пример 3.5.4. *С помощью найденной в предыдущем примере функции Грина постройте решение краевой задачи Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta, \psi), \\ |u|_{r=0} < +\infty \end{cases}$$

в шаре радиуса a, если выполнено условие разрешимости задачи

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta, \psi)\sin\theta d\theta d\psi = 0.$$

Решение. С помощью функции Грина (3.5.8) решение задачи в произвольной точке $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$, принадлежащей рассматриваемому шару, может быть записано в виде:

$$u(r_0, \theta_0, \psi_0) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} G(a, \theta, \psi; r_0, \theta_0, \psi_0) f(\theta, \psi) a^2 \sin\theta d\theta d\psi + C,$$

где C — произвольная константа. Поскольку для любой точки P на поверхности шара

$$r_{PM_1} = \frac{a}{r_0} r_{PM_0}$$

где

$$r_{PM_0} = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma},$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0),$$

M_0 и M_1 — точки, сопряженные относительно сферы радиуса a (см. пример 2.3.7.), то

$$G(P, M_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} + \frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - ar_0\cos\gamma + r_0 r_{PM_1}}\right) + A(M_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} + \frac{1}{a}\ln\frac{2a}{a - r_0\cos\gamma + r_{PM_0}}\right) + A(M_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} - \frac{1}{a}\ln\left(a - r_0\cos\gamma + r_{PM_0}\right)\right) + \widetilde{A}(M_0),$$

где $\widetilde{A}(M_0) = A(M_0) + \dfrac{1}{4\pi a}\ln 2a$.

Таким образом, решение задачи можно записать в виде:

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{a}\ln\left(a - r_0\cos\gamma + \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma}\right)\right) f(\theta, \psi)\sin\theta d\theta d\psi + C.$$

Полученная формула называется формулой Неймана.

Пример 3.5.5. *Найдите функцию Грина внутренней задачи Неймана для круга.*

Решение. Искомая функция Грина является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad r \in (0, a), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi a} \end{cases} \tag{3.5.9}$$

и имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M),$$

где

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, \quad r \in (0, a), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi a} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\ln\left.\dfrac{1}{r_{MM_0}}\right|_{r=a}, \\ |v|_{r=0} < \infty. \end{cases} \tag{3.5.10}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы точка M_0 лежала на полярной оси. Тогда

$$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi},$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r - r_0\cos\psi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}.$$

Таким образом, гармоническая функция $v(M)$ должна удовлетворять граничному условию:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a - r_0 \cos\psi}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\psi} - \frac{1}{2\pi a}, \quad r_0 < a.$$

Следуя [2], с помощью метода разделения переменных получаем:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} \left(A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi\right).$$

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n найдем из граничного условия задачи (3.5.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{1 - (r_0/a)\cos\psi}{1 + (r_0/a)^2 - 2(r_0/a)\cos\psi} - 1 \right). \tag{3.5.11}$$

Выражение в правой части этого равенства можно разложить в ряд по системе функций $\{\cos n\psi\}$, если воспользоваться следующими соотношениями:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\psi} = \frac{1}{1 - te^{i\psi}} = \frac{1 - te^{-i\psi}}{1 + t^2 - 2t\cos\psi}. \tag{3.5.12}$$

Рассмотрим действительную часть этого равенства, положив $t = r_0/a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \cos n\psi = \frac{1 - (r_0/a)\cos\psi}{1 + (r_0/a)^2 - 2(r_0/a)\cos\psi}. \tag{3.5.13}$$

Используя (3.5.13), мы можем записать граничные условия (3.5.11) в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \cos n\psi.$$

Сравнивая правую и левую части этого равенства, находим

$$A_n = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad B_n = 0.$$

Следовательно

$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r_0 r)^n}{n a^{2n}}\cos n\psi. \tag{3.5.14}$$

Полученный ряд можно просуммировать. Для этого возьмем $t = \frac{r_0 r}{a^2}$ и рассмотрим мнимую часть равенства (3.5.12):

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin n\psi = \frac{t\sin\psi}{1 + t^2 - 2t\cos\psi},$$

откуда в результате интегрирования по ψ получаем

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\cos n\psi}{n} = \int\frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}d\psi = \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2-2t\cos\psi\right) + C.$$

Положив $t = 0$, находим постоянную интегрирования $C = 0$, и окончательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\cos n\psi}{n} = \frac{-\ln\left(1+t^2-2t\cos\psi\right)}{2} = \ln\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\psi}}. \tag{3.5.15}$$

Таким образом, искомую функцию v в (3.5.14), взяв в (3.5.15) $t = \frac{r_0 r}{a^2}$, можно записать в следующем виде:

$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^2 - 2\frac{r_0 r}{a^2}\cos\psi}} =$$

$$= A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a^2}{r_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{a^4}{r_0^2} + r^2 - 2\frac{ra^2}{r_0}\cos\psi}}.$$

Обозначим $r_1 = a^2/r_0$ расстояние от начала координат до точки $M_1(r_1, 0)$, сопряженной точке $M_0(r_0, 0)$ относительно окружности. Тогда

$$\sqrt{\frac{a^4}{r_0^2} + r^2 - 2\frac{ra^2}{r_0}\cos\psi} = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1\cos\psi} = r_{MM_1}.$$

Отсюда
$$v(M) = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln a + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0 \cdot r_{_{MM_1}}}.$$

Так как $\dfrac{1}{2\pi}\ln a$ — константа, то ее можно объединить с A_0, и записать функцию Грина в следующем виде, оставляя обозначение константы A_0:
$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + \ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right) + A_0.$$

Пример 3.5.6. *Постройте функцию Грина задачи Неймана вне круга радиуса a.*

Решение. Введем полярные координаты и для удобства направим полярную ось так, чтобы ей принадлежала точка источника M_0. Тогда M_0 и точка наблюдения M имеют координаты $M_0(r_0, 0)$ и $M(r, \psi)$, и функция Грина имеет вид:
$$G(r, \psi; r_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\psi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v(r, \psi),$$

где, аналогично (3.5.10), задачу для функции $v(M)$ сформулируем следующим образом:
$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r > a, \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\left.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\ln\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\psi}}\right|_{r=a} + \\ + \left.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dr}\ln\dfrac{1}{r}\right|_{r=a} + \dfrac{1}{2\pi a}, \\ |v| < \infty. \end{cases} \tag{3.5.16}$$

Преобразуем выражение в правой части граничного условия. Так как $r_0 > a$, а выражение
$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\psi}}$$

в граничном условии нас интересует при $r = a$, то, не ограничивая общности, можно сначала рассмотреть это выражение при $a \leqslant r < r_0$, а потом положить r равным a. При $r < r_0$
$$\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\psi}} = \ln\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0}\cos\psi\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n}.$$

Таким образом, функция v должна удовлетворять условию

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{r_0^n}\cos n\psi.$$

Следовательно, общее решение задачи (3.5.16) можно искать в виде

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^n}\cos n\psi.$$

Найдем коэффициенты A_n из граничного условия задачи (3.5.16):

$$A_n = \frac{a^{2n}}{2\pi n r_0^n},\quad n = 1, 2, \ldots$$

Коэффициент A_0 остается неопределенным. Итак, функция v имеет вид:

$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{rr_0}\right)^n\frac{\cos n\psi}{n} = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n\frac{\cos n\psi}{n} =$$

$$= A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\psi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},$$

где $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$.

Обозначим $M_1(r_1, 0)$ точку, сопряженную точке M_0 относительно окружности радиуса a с центром в начале координат. Тогда

$$v(M) = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MO}}.$$

Следовательно, функция Грина задачи Неймана для оператора Лапласа вне круга радиуса a имеет вид

$$G(M, M_0) = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r_{MO}}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите распределение температуры в пространстве, создаваемое точечным источником тепла мощности q, помещенным в точку M_0 вне теплоизолированного шара радиуса R.
2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа в шаровом слое $a < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Дирихле, а на границе $r = b$ задано условие Неймана.
3. Постройте функцию Грина оператора Лапласа в кольце $a < < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Неймана, а на границе $r = b$ задано условие Дирихле.
4. Постройте функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа вне шара радиуса a.
5. С помощью функции Грина вне шара запишите решение задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \theta \in (0, \pi), \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta, \psi), \\ u \rightrightarrows 0, \ r \to +\infty \end{cases}$$

в квадратурах.
6. С помощью функции Грина для круга запишите решение задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \in (0, a), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\psi), \\ |u|\big|_{r=0} < \infty \end{cases}$$

в квадратурах.
7. С помощью функции Грина вне круга запишите решение задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\psi), \\ |u| < \infty \end{cases}$$

в квадратурах.
8. Найдите распределение температуры, создаваемое бесконечной цилиндрической поверхностью кругового сечения, поток тепла через которую равен

$$V = \frac{\sin\psi - \cos\psi}{(2 + \cos\psi + \sin\psi)^2}.$$

Совет. Воспользуйтесь функцией Грина для круга. Проинтегрируйте по частям полученное выражение, а затем используйте замену переменных $z = e^{i\psi}$. При этом интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ перейдет в интеграл по единичной окружности $|z| = 1$. Его удобно найти при помощи вычетов.

5.3. Разложение функции Грина по собственным функциям.

Получим разложение функции Грина $G(Q, M)$ задачи Неймана для оператора Лапласа в ограниченной области D трехмерного или двумерного пространства с замкнутой границей S в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta v_k(M) = -\lambda_k v_k(M), \quad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial v_k}{\partial n}\right|_S = 0. \end{cases} \tag{3.5.17}$$

Рассмотрим подробно трехмерный случай (в двумерном случае справедливы аналогичные выкладки, если объемные интегралы заменить на соответствующие интегралы по площади области D, а поверхностные — на криволинейные по границе области D). Задача (3.5.17), как известно [14, 15], равносильна интегральному уравнению

$$v_k(M) = \lambda_k \int\limits_D G(Q, M) v_k(Q) dV_Q + \frac{1}{S_0} \int\limits_S v_k(P) dS_P, \tag{3.5.18}$$

где S_0 — площадь поверхности S.

Система $\{v_n\}_0^\infty$ собственных функций задачи (3.5.17) является полной ортогональной системой в пространстве $L_2(D)$. Далее будем считать, что система собственных функций нормирована на единицу. Заметим, что задача (3.5.17) имеет нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует нормированная собственная функция $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{V_0}}$, где V_0 — объем области D.

Согласно теореме 2.3.1, поскольку $\|G(Q, M)\| < \infty$ (см. §3.2 и §6.2), для любой функции $f \in L_2(D)$ справедливо равенство

$$\int\limits_D G(Q, M) f(Q) dV_Q = \int\limits_D \sum_{n,k=0}^{\infty} g_{nk} v_n(M) v_k(Q) f(Q) dV_Q, \tag{3.5.19}$$

где

$$g_{nk} = \int\limits_{D\times D} G(Q', M') v_n(M') v_k(Q') dV_{Q'} dV_{M'}.$$

Равенство (3.5.19) понимается в смысле равенства двух элементов пространства $L_2(D)$.

Упростим выражения для коэффициентов g_{nk}, пользуясь ортогональностью собственных функций и равенством (3.5.18). Если $k \neq 0$, то

$$\int\limits_D G(Q', M')v_k(Q')dV_{Q'} = \frac{1}{\lambda_k}v_k(M') - \frac{1}{S_0\lambda_k}\int\limits_S v_k(P)dS_P. \quad (3.5.20)$$

Следовательно, в силу ортогональности собственных функций при $k \neq 0$ получаем

$$g_{nk} = \frac{1}{\lambda_k}\underbrace{\int\limits_D v_k(M')v_n(M')dV_{M'}}_{\delta_{n,k}} - \frac{1}{S_0\lambda_k}\underbrace{\int\limits_D v_n(M')dV_{M'}}_{0 \text{ при } n\neq 0}\int\limits_S v_k(P)dS_P,$$

то есть

$$g_{nk} = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{nk}, \quad n \neq 0;$$
$$g_{0k} = -\frac{\sqrt{V_0}}{S_0\lambda_k}\int\limits_S v_k(P)dS_P.$$

Если же $k = 0$, то

$$\int\limits_D G(Q', M')v_0(Q')dV_{Q'} = \frac{1}{\sqrt{V_0}}\int\limits_D G(Q', M')dV_{Q'}.$$

Следовательно,

$$g_{n0} = \frac{1}{\sqrt{V_0}}\int\limits_{D\times D} G(Q', M')v_n(M')dV_{Q'}dV_{M'}.$$

Если $n \neq 0$, то из (3.5.20) получаем

$$g_{n0} = \frac{1}{\sqrt{V_0}\,\lambda_n}\int\limits_D v_n(Q')dV_{Q'} - \frac{1}{\sqrt{V_0}\,\lambda_n S_0}\int\limits_D\left(\int\limits_S v_n(P)dS_P\right)dV_{Q'} =$$
$$= -\frac{\sqrt{V_0}}{S_0\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P.$$

При $n = 0$

$$g_{00} = \frac{1}{V_0} \int\limits_{D\times D} G(Q', M') dV_{Q'} dV_{M'} = const.$$

Подставляя найденные значения для коэффициентов g_{nk} в равенство (3.5.19), находим

$$G(Q, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q) v_n(M)}{\lambda_n} - \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) + v_n(Q)}{\lambda_n} \int\limits_S v_n(P) dS_P + C, \tag{3.5.21}$$

где C — постоянная. Ряд (3.5.21) сходится по норме пространства $L_2(D \times D)$. Равенство (3.5.21) следует понимать как равенство двух элементов пространства $L_2(D \times D)$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), \quad P \in S. \end{cases} \tag{3.5.22}$$

Напомним, что условие ее разрешимости имеет вид

$$-\int\limits_D F(M) dV_M = \int\limits_S f(P) dS_P.$$

Покажем, что в интегральном выражении для решения этой задачи основную роль играет только первое слагаемое функции Грина (3.5.21), которое обозначим $\widehat{G}(Q, M)$:

$$\widehat{G}(Q, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q) v_n(M)}{\lambda_n}, \tag{3.5.23}$$

а остальные слагаемые после преобразования дадут аддитивную постоянную. В самом деле, подставляя функцию Грина (3.5.21) в выражение

$$u(M) = \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dV_Q + \int\limits_S G(P', M) f(P') dS_{P'} + A_0,$$

где P' — обозначение для точки на поверхности S, получаем

$$u(M) = \int\limits_D F(Q)\Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q)v_n(M)}{\lambda_n} - \\ -\frac{1}{S_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(Q)+v_n(M)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P + C\Bigg\}dV_Q + \\ +\int\limits_S f(P')\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(P')v_n(M)}{\lambda_n} - \\ -\frac{1}{S_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(P')+v_n(M)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P + C\Bigg\}dS_{P'} + A_0.$$

Часть слагаемых в выражении для $u(M)$ равна константе, так как подынтегральные выражения не зависят от параметра M:

$$\frac{1}{S_0}\int\limits_S f(P')\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(P')}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P dS_{P'} + \\ +C\Bigg\{\int\limits_D F(Q)dV_Q + \int\limits_S f(P')dS_{P'}\Bigg\} + \\ +\frac{1}{S_0}\int\limits_D F(Q)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(Q)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P dV_Q = const,$$

а еще часть обращается в нуль силу условий разрешимости задачи (3.5.22) (которые предполагаются выполненными):

$$\frac{1}{S_0}\int\limits_S f(P')\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(M)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P\Bigg\}dS_{P'} + \\ +\frac{1}{S_0}\int\limits_D F(Q)\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(M)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P\Bigg\}dV_Q =$$

$$= \frac{1}{S_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(M)}{\lambda_n}\int\limits_S v_n(P)dS_P\underbrace{\left(\int\limits_S f(P')dP' + \int\limits_D F(Q)dV_Q\right)}_{=0} = 0.$$

Итак, для решения задачи (3.5.22) получаем выражение

$$u(M) = \int\limits_D \widehat{G}(Q, M) F(Q) dV_Q + \int\limits_S \widehat{G}(P', M) f(P') dS_{P'} + \widetilde{A}_0, \tag{3.5.24}$$

где $\widetilde{A}_0$ — произвольная аддитивная постоянная.

Пример 3.5.7. *Решите краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x \in (0, a), \ y \in (0, b), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = a, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = b, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, проверим условия разрешимости задачи, которые в данном случае, поскольку $F(M) \equiv 0$, принимают вид:

$$\int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0,$$

где L — граница рассматриваемого прямоугольника. Так как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = a,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -b, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=b} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

то

$$\int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int\limits_0^b a dy - \int\limits_0^a b dx = 0,$$

то есть условия разрешимости рассматриваемой задачи выполнены.

Воспользуемся формулой (3.5.24). Для этого найдем функцию $\widehat{G}(Q, M)$, где точка M имеет координаты (x, y), а точка

Q координаты (x', y'). Для рассматриваемого прямоугольника получаем:

$$\widehat{G}(x', y'; x, y) = \frac{2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi m x}{a} \cos\dfrac{\pi m x'}{a}}{\left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2} + \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n y}{b} \cos\dfrac{\pi n y'}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2} +$$

$$+ \frac{4}{ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi m x}{a} \cos\dfrac{\pi n y}{b} \cos\dfrac{\pi m x'}{a} \cos\dfrac{\pi n y'}{b}}{\left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2}.$$

Подставляя $\widehat{G}(x', y'; x, y)$ в формулу (3.5.24), учитывая граничные условия задачи и ортогональность собственных функций, получим

$$u(x, y) = -\int\limits_0^a b\widehat{G}(x', 0; x, y)dx' + \int\limits_0^b a\widehat{G}(a, y'; x, y)dy' + \widetilde{A}_0 =$$

$$= -b \cdot \frac{2}{ab} \int\limits_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n y}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2} dx' + a \cdot \frac{2}{ab} \int\limits_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos\dfrac{\pi m x}{a}}{\left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2} dy' + \widetilde{A}_0 =$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n y}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos\dfrac{\pi m x}{a}}{\left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2} + \widetilde{A}_0.$$

В прямоугольнике $x \in [\delta_1, a]$, $y \in [\delta_2, b]$, где $0 < \delta_1 < a$, $0 < \delta_2 < b$ — произвольные числа, полученные ряды можно просуммировать. [1] В результате получаем

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + by + \widetilde{A}_0.$$

---

[1] Покажем, как вычисляется сумма ряда

$$I(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n y}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2}. \tag{3.5.25}$$

Выберем произвольное $\delta > 0$. Рассмотрим ряд

$$I'(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi n y}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)} \tag{3.5.26}$$

на отрезке $y \in [\delta; b]$, где он сходится равномерно [20]. Он получается формальным почленным дифференцированием ряда (3.5.25). Из равномерной сходимо-

Полученная функция непрерывно примыкает к граничным условиям задачи.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Постройте функцию Грина задачи Неймана в круговом секторе радиуса a с углом α.
2. Постройте функцию Грина задачи Неймана в круговом цилиндре радиуса a высоты h.
3. Постройте в интегральном виде решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r \in (0,a), \, \varphi \in (0,\alpha), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = f(r), \ r \in [0,a], \\ u|_{\varphi=\alpha} = u|_{r=a} = 0, \\ |u||_{r=0} < \infty. \end{cases}$$

4. Постройте в интегральном виде решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ (x,y) \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{L} = f(x,y), \ (x,y) \in L, \\ |u||_{x=0,\, y=0} < \infty, \end{cases}$$

где область D имеет вид $y > 0, \ x^2 + y^2 < a^2$, L — граница области D, а $f(x,y) = x^3 - a^2 x$ при $y = 0$ и $f(x,y) = 0$ при $x^2 + y^2 = a^2$.

сти следует, что его можно интегрировать почленно:

$$I(y) = \int I'(y)dy, \ y \in [\delta; b].$$

Просуммируем ряд (3.5.26):

$$I'(y) = -\frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi n y}{b}}}{n} = \frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\ln\left(1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right) =$$

$$= \frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\left(\ln\left|1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right| + i\arg\left(1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right)\right) = -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{1-\cos\frac{\pi y}{b}} =$$

$$= -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\frac{\pi y}{2b}}{\sin\frac{\pi y}{2b}} = -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2b}\right) = -\frac{b}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2b}\right) = \frac{1}{2}(y-b).$$

Следовательно

$$I(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - by\right) + const$$

Глава 4

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

§ 1. Внутренние задачи

Пусть D — конечная область, ограниченная поверхностью Ляпунова S в трехмерном случае или замкнутой кривой Ляпунова L в двумерном случае. Рассмотрим задачу с граничными условиями третьего рода, также иногда называемыми в литературе условиями Робена, для уравнения Пуассона в области D:

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + hu(P)\Big|_P = f(P), \quad P \in S, \quad (P \in L), \quad h > 0, \tag{4.1.2}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области D нормали к поверхности S (кривой L в двумерном случее).

Определение 4.1.1 *Будем называть классическим решением задачи* (4.1.1) - (4.1.2) *функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению* (4.1.1) *в области D и граничному условию* (4.1.2).

Утверждение 4.1.1 *Если функция $F(M)$ является непрерывной в области $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемой в области D, а функция $f(P)$ является непрерывной на границе S (либо L в двумерном случае) области D, то задача* (4.1.1) - (4.1.2) *имеет единственное классическое решение $u(M)$* [5].

Решение задачи (4.1.1) - (4.1.2), как и в случае рассмотренных ранее задач с условиями Дирихле и Неймана, в трехмерном случае удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} u(M) = &\int_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P - \\ &- \int_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

где

$$G(Q,M)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{QM}}+v(Q),\quad \Delta v(Q)=0,\quad Q\in D,$$

а в двумерном случае равенству

$$\begin{aligned}u(M)=\int\limits_L\Big(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\Big)\,dl_P-\\ -\int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q)dS_Q,\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

где

$$G(Q,M)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}}+v(Q),\quad \Delta v(Q)=0,\quad Q\in D.$$

Выберем гармоническую функцию v так, чтобы функция $G(Q,M)$ удовлетворяла граничному условию

$$\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}+hG(P,M)=0,\quad P\in S\ \ (P\in L\text{ в двумерном случае}).$$

При этом для любой точки P, принадлежащей границе области D, справедливо равенство

$$\begin{aligned}G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}=\\ =G(P,M)\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}+hu(P)\right)=G(P,M)f(P).\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

Учитывая равенство (4.1.5) и подставляя в (4.1.3) значение $\Delta u(Q)=-F(Q)$, получаем

$$u(M)=\int\limits_S G(P,M)f(P)dS_P+\int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q\tag{4.1.6}$$

в трехмерном случае, и

$$u(M)=\int\limits_L G(P,M)f(P)dl_P+\int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q\tag{4.1.7}$$

в двумерном.

Определение 4.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Робена для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v(Q,M),\ Q \in \overline{D},\ M \in D,$$

и в двумерном случае — функцию

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{QM}}} + v(Q,M),\ Q \in \overline{D},\ M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in \in D$, непрерывно дифференцируемая в области $\overline{D}$ для каждой фиксированной точки $M \in D$;
2) $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0$ для каждой точки $M \in D$, где $P \in S$ в трехмерном случае и $P \in L$ в двумерном.

Из определения функции Грина $G(Q,M)$ следует, что она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0, \quad P \in S\ (P \in L),\ M \in D. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Утверждение 4.1.2 *Функция Грина задачи Дирихле существует и единственна* [5].

Функция Грина симметрична относительно перестановки точек Q и M:

$$G(Q,M) = G(M,Q).$$

§ 2. Внешние задачи

Пусть D_e — область, внешняя по отношению к конечной области D, ограниченной поверхностью Ляпунова S (кривой Ляпунова L в двумерном случае). Рассмотрим внешнюю краевую задачу

$$\Delta u(M) = -F(M), \quad M \in D_e, \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + hu(P)\Big|_P = f(P), \quad P \in S \quad (P \in L), \quad h > 0, \tag{4.2.2}$$

$u(M)$ регулярна на бесконечности, (4.2.3) где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области D_e нормали к поверхности S (кривой L).

Определение 4.2.1 *Будем называть классическим решением задачи (4.2.1) - (4.2.3) регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e и один раз непрерывно дифференцируемую в замкнутой области $\overline{D_e}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (4.2.1) в области D_e и граничному условию (4.2.2).*

Утверждение 4.2.1 *Если функция $F(M)$ финитна, непрерывна в области $\overline{D_e}$ и непрерывно дифференцируема в D_e, а функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S (кривой L), то существует единственное классическое решение задачи (4.2.1) - (4.2.3).*

Аналогично случаю внутренней задачи, решение задачи (4.2.1) - (4.2.3) можно получить с помощью функции Грина $G(M,Q)$:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D_e, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0, \quad P \in S \ \ (P \in L), \ \ M \in D_e, \\ G(Q,M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Определение 4.2.2 *Функцией Грина внешней задачи Робена для оператора Лапласа будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v(Q,M),\ Q \in \overline{D_e},\ M \in D_e,$$

в трехмерном случае,

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{_{QM}}} + v(Q,M),\ Q \in \overline{D_e},\ M \in D_e,$$

в двумерном случае,

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in \in D_e$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$;
2) $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0$ для каждой точки $M \in D_e$, где $P \in S$ в трехмерном случае и $P \in L$ в двумерном,
3)$G(Q,M)$ — регулярна на бесконечности.

Для любой точки $M \in D_e$ получаем

$$u(M) = \int_S G(P,M)f(P)dS_P + \int_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q \qquad (4.2.5)$$

в трехмерном случае и

$$u(M) = \int_L G(P,M)f(P)dl_P + \int_{D_e} G(Q,M)F(Q)dS_Q. \qquad (4.2.6)$$

В случае внешней трехмерной задачи функция $v(Q,M)$ регулярна на бесконечности, а в случае двумерной задачи эта функция имеет логарифмическую особенность на бесконечности.

§ 3. Примеры решения задач

Пример 4.3.1. *Найдите распределение температуры в верхнем полупространстве, заполненном однородным веществом, создаваемое точечным источником тепла мощности q, помещенным в точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $z_0>0$, если на границе $z=0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру.*

Решение. Искомая температура $u(M)$, где $M(x,y,z)$, является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -q\cdot\delta(M,M_0),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ z>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - hu\Big|_{z=0} = 0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ u \rightrightarrows 0,\quad \text{при } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to+\infty, \end{cases}$$

где $h=\dfrac{\lambda}{k}>0$, λ — коэффициент теплообмена на границе, k — коэффициент теплопроводности вещества в области $z\geqslant 0$.

Будем искать функцию $u(M)$ в виде

$$u(M) = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} +$$

$$+\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} + w(x-x_0,y-y_0,z+z_0),$$

где w — гармоническая функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности. Подставляя $u(M)$ в граничные условия, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial z} - hw\Big|_{z=0} = \frac{2qh}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}. \tag{4.3.1}$$

Фиксируем переменные x и y и рассмотрим функцию

$$g(z_0) = w(x-x_0, y-y_0, z_0),$$

которая будет представлять собой решение уравнения

$$g'(z_0) - hg(z_0) = \frac{2qh}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}, \text{ где } \rho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$g(z_0) = C_0 e^{hz_0} + 2qh\int\limits_{z_0^*}^{z_0} \frac{e^{h(z_0-\alpha)}}{\sqrt{\rho^2+\alpha^2}}\,d\alpha.$$

Итак, функция

$$w(x-x_0, y-y_0, z+z_0) = C_0 e^{h(z+z_0)} + \\ +2qh\int\limits_{z_0^*}^{z+z_0} \frac{e^{h(z+z_0-\alpha)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\alpha^2}}\,d\alpha$$

удовлетворяет краевому условию (4.3.1) при $z=0$. Так как функция w должна равномерно стремиться к нулю при $z \to +\infty$, то положим $C_0 = 0$, $z_0^* = +\infty$. Остается показать, что функция

$$w(x-x_0, y-y_0, z+z_0) = -2qh\int\limits_{z+z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z+z_0-\alpha)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\alpha^2}}\,d\alpha =$$

$$= -2qh\int\limits_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z_0-\eta)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\eta)^2}}\,d\eta$$

является гармонической в области $z > 0$. Так как интегралы, получаемые формальным двукратным дифференцированием подынтегрального выражения в w по переменным x, y и z, сходятся равномерно, то функция w является дважды непрерывно дифференцируемой, причем

$$\Delta w = -2qh \int\limits_{z_0}^{+\infty} e^{h(z_0-\eta)} \Delta \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\eta)^2}} d\eta = 0,$$

так как при всех $\eta \geqslant z_0$ функция

$$\frac{1}{r_{MM'}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\eta)^2}},$$

где $M'(x_0, y_0, -\eta)$, является гармонической функцией $M(x, y, z)$.

Итак, гармоническая функция w, удовлетворяющая граничному условию (4.3.1) при $z = 0$ и равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, построена. Поскольку в силу теоремы единственности решения третьей краевой задачи при $h > 0$ других таких функций нет, то окончательно получаем

$$u(M) = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \\ + \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} - \\ -2qh \int\limits_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z_0-\eta)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\eta)^2}} d\eta. \qquad (4.3.2)$$

Если положить $q = \dfrac{1}{4\pi}$, то выражение (4.3.2) будет представлять собой функцию Грина оператора Лапласа третьей краевой задачи в верхнем полупространстве.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите распределение температуры в шаре радиуса R, создаваемое точечным источником тепла мощности q, помещенным в точку M_0 внутри шара, если на его поверхности происходит конвективный обмен теплом по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру.

2. Постройте функцию Грина оператора Лапласа в шаровом слое $a < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Дирихле, а на границе $r = b$ задано условие третьего рода $\left.\dfrac{\partial G}{\partial r} + hG\right|_{r=b} = 0$, $h > 0$.
3. Постройте функцию Грина оператора Лапласа в круге радиуса a, если на границе $r = a$ задано условие третьего рода $\left.\dfrac{\partial G}{\partial r} + hG\right|_{r=a} = 0$, $h > 0$.
4. Постройте функцию Грина оператора Лапласа в верхней полуплоскости, если на границе $y = 0$ задано условие третьего рода $\left.\dfrac{\partial G}{\partial y} - hG\right|_{y=0} = 0$, $h > 0$.

Глава 5

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОСНОВНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. Трехмерные области

В разделах 1.1-1.3 считается $M = M(x, y, z)$, $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1.1. Верхнее полупространство.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, +\infty), \\ G(M, M_0)|_{z=0} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}} \right). \tag{5.1.2}$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, +\infty), \\ u|_{z=0} = f(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{5.1.3}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)F(x',y',z')dx'dy'\right]dz'+$$
$$+\frac{z}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x',y')dx'dy'}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2\right)^{3/2}},\quad z>0.$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0),\ x,y\in(-\infty,+\infty),\ z\in(0,+\infty), \\ \dfrac{\partial G}{\partial z}(M,M_0)\Big|_{z=0} = 0, \quad x,y\in(-\infty,+\infty), \\ G(M,M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{5.1.4}$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right). \tag{5.1.5}$$

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M),\ x,y\in\mathbb{R}^2,\ z\in(0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -f(x,y), \quad x,y\in\mathbb{R}^2, \\ u \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)F(x',y',z')dx'dy'\right]dz'+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x',y')dx'dy'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}},\quad z>0.$$

Условия Робена (условия третьего рода). Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\quad x,y\in(-\infty,+\infty),\ z\in(0,+\infty),\\ \dfrac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}+hG(M,M_0)\Big|_{z=0}=0,\quad x,y\in(-\infty,+\infty),\\ G(M,M_0)\ \text{регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)- \tag{5.1.6}$$
$$-\frac{h}{2\pi}\int\limits_{z_0}^{+\infty}\frac{e^{h(z_0-\eta)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+\eta)^2}}d\eta.$$

Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина:

$$u(M)=\int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x',y',z',x,y,z)F(x',y',z')dx'dy'\right]dz'+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x',y',0,x,y,z)f(x',y')dx'dy'.$$

1.2. Полоса между двумя параллельными плоскостями.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, l), \\ G(M, M_0)|_{z=0} = 0, \ G(M, M_0)|_{z=l} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}} \right).$$

Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, +\infty), \\ u|_{z=0} = f_1(x, y), \ u|_{z=l} = f_2(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$u(M) = \int_0^l \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x', y', z', x, y, z) F(x', y', z') dx' dy' \right] dz' -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z'} G(x', y', 0, x, y, z) f_1(x', y') dx' dy' +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z'} G(x', y', l, x, y, z) f_2(x', y') dx' dy'.$$

Условия Дирихле при $z = 0$ и Неймана при $z = l$. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x, y \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, l), \\ G(M, M_0)|_{z=0} = 0, \ \dfrac{\partial}{\partial z} G(M, M_0)|_{z=l} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-(2ln+z_0))^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-(2ln-z_0))^2}}\right).$$

Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ x,y\in\mathbb{R}^2,\ z\in(0,+\infty),\\ u|_{z=0}=f_1(x,y),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l}=f_2(x,y),\quad x,y\in\mathbb{R}^2,\\ u(M)\ \text{регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

$$u(M)=\int_0^l\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x',y',z',x,y,z)F(x',y',z')dx'dy'\right]dz'-$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z'}G(x',y',0,x,y,z)f_1(x',y')dx'dy'+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x',y',l,x,y,z)f_2(x',y')dx'dy'.$$

1.3. Прямоугольный параллелепипед.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\\ x,x_0\in(0,a),\ y,y_0\in(0,b),\ z,z_0\in(0,c),\\ G|_{x=0}=G|_{x=a}=G|_{y=0}=G|_{y=b}=G|_{z=0}=G|_{z=c}=0.\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=$$
$$=\frac{8}{abc}\sum_{k,m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi nx}{a}\cdot\sin\frac{\pi nx_0}{a}\cdot\sin\frac{\pi my}{b}\cdot\sin\frac{\pi my_0}{b}\cdot\sin\frac{\pi kz}{c}\cdot\sin\frac{\pi kz_0}{c}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ x\in(0,a),\ y\in(0,b),\ z\in(0,c),\\ u|_{z=0}=f_1(x,y),\ u|_{z=c}=f_2(x,y),\quad x\in[0,a],\ y\in[0,b],\\ u|_{y=0}=f_3(z,x),\ u|_{y=b}=f_4(x,y),\quad z\in[0,c],\ x\in[0,a],\\ u|_{x=0}=f_5(y,z),\ u|_{x=a}=f_6(y,z),\quad y\in[0,b],\ z\in[0,c],\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(M) = \int_0^a\int_0^b\int_0^c G(x',y',z',x,y,z)F(x',y',z')dz'dy'dx' -$$

$$- \int_0^a\int_0^b \frac{\partial}{\partial z'}G(x',y',0,x,y,z)f_1(x',y')dy'dx' +$$

$$+ \int_0^a\int_0^b \frac{\partial}{\partial z'}G(x',y',c,x,y,z)f_2(x',y')dy'dx' -$$

$$- \int_0^a\int_0^c \frac{\partial}{\partial y'}G(x',0,z',x,y,z)f_3(z',x')dz'dx' +$$

$$+ \int_0^a\int_0^c \frac{\partial}{\partial y'}G(x',b,z',x,y,z)f_4(z',x')dz'dx' -$$

$$- \int_0^b\int_0^c \frac{\partial}{\partial x'}G(0,y',z',x,y,z)f_5(y',z')dz'dy' +$$

$$+ \int_0^b\int_0^c \frac{\partial}{\partial x'}G(a,y',z',x,y,z)f_6(y',z')dz'dy'.$$

1.4. Двугранный угол величины π/n, где $n \in \mathbb{N}$. Условия Дирихле. Здесь точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ,z), а точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0,z_0) в цилиндрической системе координат, ось Oz которой расположена вдоль ребра двугранного угла, одна из составляющих угол плоскостей соответствует $\psi = 0$, а другая соответствует $\psi = \dfrac{\pi}{n}$.

Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \ \psi \in \left(0, \dfrac{\pi}{n}\right), \\ G(M,M_0)|_{\psi=0} = G(M,M_0)|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0. \\ G(M,M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{R^+_{MM_k}} - \frac{1}{R^-_{MM_k}}\right),$$

где

$$R^{+}_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2}\,,$$

$$R^{-}_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2}\,.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M),\ r \in (0, +\infty),\ \psi \in \left(0, \dfrac{\pi}{n}\right),\ z \in (-\infty, +\infty), \\ u|_{\psi=0} = f_1(r, z),\ u|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = f_2(r, z),\quad r \in (0, +\infty),\ z \in (-\infty, +\infty), \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(M) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} G(r', \psi', z', r, \psi, z) F(r', \psi', z') r' dr' d\psi'\right] dz' -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \psi'} G\left(r', 0, z', r, \psi, z\right) f_1(r', z') dr' dz' +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \psi'} G\left(r', \frac{\pi}{n}, z', r, \psi, z\right) f_2(r', z') dr' dz'.$$

1.5. Шар радиуса a.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \in K(O, a), \\ G|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

где $K(O, a)$ — шар радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r, θ, ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0, θ_0, ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0}, \theta_0, \psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно сферы радиуса a.

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(r,\theta,\psi), \ r\in(0,a), \ \theta\in(0,\pi), \ \psi\in[0,2\pi], \\ u(a,\theta,\psi)|_{r=a} = f(\theta,\psi), \\ |u|\big|_{r=0} < \infty \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^a r'^2 dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\pi} F(r',\theta',\psi') \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} - \right.$$
$$\left. -\frac{a}{\sqrt{r'^2r^2+a^4-2rr'a^2\cos\gamma}}\right)\sin\theta' d\theta' +$$
$$+\frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\pi} \frac{f\left(\theta',\psi'\right)\left(a^2-r^2\right)}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta',$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\psi-\psi'\right)$,

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad M,M_0\in K(O,a), \\ \dfrac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\dfrac{1}{4\pi a^2}, \end{cases}$$

где $K(O,a)$ — шар радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,θ,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,θ_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\theta_0,\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно сферы радиуса a.

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}} + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - rr_0\cos\gamma + r_0 r_{_{MM_1}}}\right) + A(M_0),$$

где γ — угол между лучами OM и OM_0,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0),$$

$A(M_0)$ — произвольная функция точки M_0, не зависящая от точки M.

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(r,\theta,\psi), \; r \in (0,a), \; \theta \in (0,\pi), \; \psi \in [0,2\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,\psi)\Big|_{r=a} = f(\theta,\psi), \\ |u|\big|_{r=0} < \infty \end{cases}$$

при условии разрешимости

$$-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} F(r,\theta,\psi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta,\psi)\sin\theta d\theta d\psi$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^a r'^2 dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\pi} F(r',\theta',\psi') \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} + \right.$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{r'^2 r^2 + a^4 - 2rr'a^2\cos\gamma}} +$$

$$\left. + \frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - rr'\cos\gamma + r'\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} \right) \sin\theta' d\theta' +$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a}\ln\left(a - r\cos\gamma + \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma} \right) \right) f(\theta',\psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' + C.$$

1.6. Область вне шара радиуса a.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad M, M_0 \text{ вне шара } K(O,a), \\ G|_{r=a} = 0, \\ G \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

где $K(O,a)$ — шар радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,θ,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,θ_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\theta_0,\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно сферы радиуса a.

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}} \right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(r,\theta,\psi), \ r \in (a,+\infty), \ \theta \in (0,\pi), \ \psi \in [0,2\pi], \\ u(a,\theta,\psi)|_{r=a} = f(\theta,\psi), \\ u \text{ регулярна на бесконечности} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_a^{+\infty} r'^2 dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\pi} F(r',\theta',\psi')\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{\sqrt{r'^2 r^2 + a^4 - 2rr'a^2\cos\gamma}}\right)\sin\theta' d\theta' +$$

$$+\frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\pi} \frac{f(\theta',\psi')\left(r^2-a^2\right)}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\gamma\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta',$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')$,

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad M, M_0 \text{ вне шара } K(O,a), \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ G \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

где $K(O,a)$ — шар радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,θ,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,θ_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\theta_0,\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно сферы радиуса a.

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{a}\ln\frac{rr_0(1-\cos\gamma)}{a^2 - 2rr_0\cos\gamma + r_0 r_{MM_1}}\right),$$

Проверить 2 в знаменателе!!!

где γ — угол между лучами OM и OM_0,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0),$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(r,\theta,\psi), \ r \in (a,+\infty), \ \theta \in (0,\pi), \ \psi \in [0,2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}(r,\theta,\psi)\right|_{r=a} = -f(\theta,\psi), \\ u \text{ регулярна на бесконечности} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\theta,\psi)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_a^{+\infty} r'^2dr'\int\limits_0^{2\pi}d\psi'\int\limits_0^{\pi}F(r',\theta',\psi')\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}+\right.$$
$$+\frac{a}{\sqrt{r'^2r^2+a^4-2rr'a^2\cos\gamma}}+$$
$$\left.+\frac{1}{a}\ln\frac{rr'(1-\cos\gamma)}{a^2-2rr'\cos\gamma+r'\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}\right)\sin\theta' d\theta'+$$
$$+\frac{a^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\gamma}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a}\ln\frac{r(1-\cos\gamma)}{a-2r\cos\gamma+\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma}}\right)f(\theta',\psi')\sin\theta' d\theta' d\psi'+C.$$

1.7. Половина шара, ограниченная полусферой радиуса a при $z\geqslant 0$ и плоскостью $z=0$. Условия Дирихле.

Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\ r,r_0\in(0,a),\\ \qquad\qquad \theta,\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\ \psi,\psi_0\in[0,2\pi],\\ G|_{r=a}=0,\quad \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \psi\in[0,2\pi],\\ G|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\ r\in[0,a],\ \psi\in[0,2\pi].\end{cases}$$

Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,θ,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,θ_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\theta_0,\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно сферы радиуса a, $M_2\,(r_0,\pi-\theta_0,\psi_0)$ — симметричная точке M_0 относительно плоскости $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ точка, $M_3\left(\dfrac{a^2}{r_0},\pi-\theta_0,\psi_0\right)$ — сопряженная точке M_2 относительно сферы радиуса a точка.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{_{MM_2}}}-\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_3}}}\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M),\ r \in (0,a),\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right),\ \psi \in [0, 2\pi], \\ u|_{r=a} = f_1(\theta,\psi), \quad \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \psi \in [0,2\pi], \\ u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = f_2(r,\psi),\ r \in [0,a],\ \psi \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\theta,\psi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^a r'^2 dr' \int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F(r',\theta',\psi') \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} - \right.$$
$$- \frac{a}{\sqrt{r'^2 r^2 + a^4 - 2rr'a^2\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\beta}} +$$
$$\left. + \frac{a}{\sqrt{r'^2 r^2 + a^4 - 2rr'a^2\cos\beta}} \right) \sin\theta' d\theta' +$$
$$+ \frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_1(\theta',\psi')\left(a^2 - r^2\right)}{\left(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma\right)^{3/2}} \sin\theta' d\theta' -$$
$$- \frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_1(\theta',\psi')\left(a^2 - r^2\right)}{\left(a^2 + r^2 - 2ar\cos\beta\right)^{3/2}} \sin\theta' d\theta' +$$
$$+ \frac{r\cos\theta}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\psi' \int\limits_0^{a} \frac{f_2(r',\psi') r' dr'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\psi' - \psi)\right)^{3/2}}$$

Проверить три последних слагаемых!!! где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$
$$\cos\beta = -\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

1.8. Цилиндр радиуса a высоты h.

В разделах 1.8–1.9 считается $M = M(r,\psi,z)$, $M_0 = M_0(r_0,\psi_0,z_0)$.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \\ r, r_0 \in (0,a),\ \psi,\psi_0 \in (0,2\pi),\ z, z_0 \in (0,h), \\ G(M,M_0)|_{r=a} = 0, \quad \psi \in [0,2\pi],\ z \in [0,h], \\ G(M,M_0)|_{z=0} = G(M,M_0)|_{z=h} = 0,\ r \in [0,a],\ \psi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m}{h}z}{\left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2\right]J'^2_n\left(\mu_k^{(n)}\right)(1+\delta_{n0})}\times$$
$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{array}\right\}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r_0\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi_0\\ \sin n\psi_0\end{array}\right\},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n(\mu)=0$.
Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ r\in(0,a),\ \psi\in(0,2\pi),\ z\in\mathbb{R},\\ u|_{r=a}=f(\psi,z),\quad \psi\in(0,2\pi),\ z\in\mathbb{R},\\ u|_{z=0}=f_1(r,\psi),\ u|_{z=h}=f_2(r,\psi).\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h}G(r',\psi',z',r,\psi,z)F(r',\psi',z')dz'r'dr'd\psi'+$$
$$+a\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{\partial G}{\partial r'}(a,\psi',z',r,\psi,z)f(\psi',z')dz'd\psi'-$$
$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\partial G}{\partial z'}(r',\psi',0,r,\psi,z)f_1(r',\psi')rdr'd\psi'+$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\partial G}{\partial z'}(r',\psi',0,r,\psi,z)f_2(r',\psi')rdr'd\psi'.$$

1.9. Бесконечный цилиндр радиуса a.

В разделе 1.9 считается $M=M(r,\psi,z)$, $M_0=M_0(r_0,\psi_0,z_0)$.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\\ r,r_0\in(0,a),\ \psi,\psi_0\in(0,2\pi),\ z,z_0\in(-\infty,\infty),\\ G(M,M_0)|_{r=a}=0,\\ G(M,M_0)\ \text{регулярна на бесконечности}\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2|z-z_0|}}{\left(\mu_k^{(n)}\right)^2 J'^2_n\left(\mu_k^{(n)}\right)(1+\delta_{n0})}\times$$
$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{array}\right\}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r_0\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi_0\\ \sin n\psi_0\end{array}\right\},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n(\mu)=0$.
Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ r\in(0,a),\ \psi\in(0,2\pi),\ z\in\mathbb{R},\\ u|_{r=a}=f(\psi,z),\quad \psi\in[0,2\pi],\ z\in\mathbb{R},\\ u(M)\ \text{регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{-\infty}^{+\infty}G(r',\psi',z',r,\psi,z)F(r',\psi',z')dz'r'dr'd\psi'+$$
$$+a\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial r'}(a,\psi',z',r,\psi,z)f(\psi',z')dz'd\psi'.$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\\ r,r_0\in(0,a),\ \psi,\psi_0\in(0,2\pi),\ z,z_0\in(-\infty,\infty),\\ \dfrac{\partial G}{\partial r}(M,M_0)\Big|_{r=a}=0,\quad \psi\in[0,2\pi],\ z\in\mathbb{R},\\ G(M,M_0)\ \text{регулярна на бесконечности}\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2|z-z_0|}}{\left(\mu_k^{(n)}\right)^2 J'^2_n\left(\mu_k^{(n)}\right)(1+\delta_{n0})}\times$$
$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi\\ \sin n\psi\end{array}\right\}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r_0\right)\left\{\begin{array}{c}\cos n\psi_0\\ \sin n\psi_0\end{array}\right\},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_n'(\mu) = 0$.
Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ r \in (0, a), \ \psi \in (0, 2\pi), \ z \in \mathbb{R}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\psi, z), \quad \psi \in [0, 2\pi], \ z \in \mathbb{R}, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r, \psi, z) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(r', \psi', z', r, \psi, z) F(r', \psi', z') dz' r' dr' d\psi' +$$
$$+ a \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(a, \psi', z', r, \psi, z) f(\psi', z') dz' d\psi'.$$

§ 2. Двумерные области

В разделе 2.1 считается $M = M(x, y)$, $M_0 = M_0(x_0, y_0)$.

2.1. Полуплоскость.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, +\infty), \\ G(M, M_0)|_{y=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \ln \frac{1}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, +\infty), \\ u|_{y=0} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}-\right.$$

$$\left.-\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'+y)^2}\right)F(x',y')dx'dy'+\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x')dx'}{(x'-x)^2+y^2}.$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0,+\infty),\\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(M,M_0)\Big|_{y=0}=0,\quad x\in\mathbb{R},\\ G(M,M_0)\text{ регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\ln\frac{1}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0,+\infty),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=f(x),\quad x\in\mathbb{R},\\ u(M)\text{ регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'+y)^2}\right)F(x',y')dx'dy'+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{1}{(x'-x)^2+y^2}f(x')dx'.$$

2.2. Прямоугольник.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\\ x,x_0\in(0,a),\ y,y_0\in(0,b),\\ G|_{x=0}=G|_{x=a}=G|_{y=0}=G|_{y=b}=0.\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{4}{ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi n x}{a}\cdot\sin\dfrac{\pi n x_0}{a}\cdot\sin\dfrac{\pi m y}{b}\cdot\sin\dfrac{\pi m y_0}{b}}{\left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2}.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ x\in(0,a),\ y\in(0,b),\\ u|_{y=0}=f_1(x),\ u|_{y=b}=f_2(x),\quad x\in[0,a],\\ u|_{x=0}=f_3(y),\ u|_{x=a}=f_4(y),\quad y\in[0,b]\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(M)=\int_0^a\int_0^b G(x',y',x,y)F(x',y')dy'dx'-$$
$$-\int_0^a\frac{\partial}{\partial y'}G(x',0,x,y)f_1(x')dx'+\int_0^a\frac{\partial}{\partial y'}G(x',b,x,y)f_2(x')dx'-$$
$$-\int_0^b\frac{\partial}{\partial x'}G(0,y',x,y)f_3(y')dy'+\int_0^b\frac{\partial}{\partial x'}G(a,y',x,y)f_4(y')dy.$$

2.3. Круг радиуса a.

В разделе 2.3 считается $M=M(r,\psi)$, $M_0=M_0(r_0,\psi_0)$.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0),\quad M,M_0\in U(O,a),\\ G(M,M_0)|_{r=a}=0,\end{cases}$$

где $U(O,a)$ — круг радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно окружности радиуса a.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}}-\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right)\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M),\quad r\in(0,a),\quad \psi\in[0,2\pi],\\ u|_{r=a}=f(\psi),\quad \psi\in[0,2\pi]\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\Bigg(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi-\psi')}}-$$

$$-\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi-\psi')}}\Bigg)F(r',\psi')r'dr'd\psi'+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\psi-\psi')}f(\psi')d\psi'.$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_{M}G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad r\in(0,a), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ \dfrac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=a}=-\dfrac{1}{2\pi a},\end{cases}$$

где $U(O,a)$ — круг радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно окружности радиуса a.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+\ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)+A_0(M_0), \qquad (5.2.1)$$

где A_0 — произвольная функция точки M_0, не зависящая от точки M. Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M), \quad r\in(0,a), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=f(\psi), \quad \psi\in[0,2\pi]\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi-\psi')}}+\right.$$
$$\left.+\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi-\psi')}}\right)r'dr'd\psi'+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{f(\psi')d\psi'}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos(\psi-\psi')}}.$$

2.4. Область вне круга.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad M,M_0 \text{ вне круга } U(O,a),\\ G(M,M_0)|_{r=a}=0,\\ G(M,M_0) \text{ регулярна на бесконечности,}\end{cases}$$

где $U(O,a)$ — круг радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно окружности радиуса a.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M), \quad r\in(a,+\infty), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ u|_{r=a}=f(\psi), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi-\psi')}}-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi-\psi')}}\right)F(r',\psi')r'dr'd\psi'+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\psi-\psi')}f(\psi')d\psi',$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad M,M_0 \text{ вне круга } U(O,a),\\ \dfrac{\partial G}{\partial r}(M,M_0)\Big|_{r=a}=0,\\ G(M,M_0) \text{ регулярна на бесконечности,}\end{cases}$$

где $U(O,a)$ — круг радиуса a с центром в точке O — начале координат. Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\dfrac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно окружности радиуса a.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}-\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r_{MO}}+A_0.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M), \quad r\in(a,+\infty), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=-f(\psi), \quad \psi\in[0,2\pi],\\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности}\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi-\psi')}}+\right.$$
$$\left.+\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi-\psi')}}-2\ln\frac{1}{r}\right)F(r',\psi')r'dr'd\psi'+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos(\psi-\psi')}}-\ln\frac{1}{r}\right)f(\psi')d\psi'.$$

2.5. Бесконечный сектор угла $\frac{\pi}{2}$.

В разделе 2.5 считается $M=M(x,y)$, $M_0=M_0(x_0,y_0)$.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad x,x_0,y,y_0\in(0,+\infty),\\ G|_{x=0}=0,\ y\in[0,\infty), \quad G|_{y=0}=0,\ x\in[0,\infty),\\ G(M,M_0)\ \text{регулярна на бесконечности,}\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-\ln\frac{1}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}+\right.$$
$$\left.+\ln\frac{1}{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}-\ln\frac{1}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u=-F(M),\ x,\ y\in(0,+\infty),\\ u|_{y=0}=f_1(x),\ x\in[0,+\infty),\ u|_{x=0}=f_2(y),\ y\in[0,+\infty),\\ u(M)\ \text{регулярна на бесконечности.}\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \left(\ln \frac{1}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} - \right.$$

$$- \ln \frac{1}{(x'-x)^2 + (y'+y)^2} + \ln \frac{1}{(x'+x)^2 + (y'+y)^2} -$$

$$\left. - \ln \frac{1}{(x'+x)^2 + (y'-y)^2} \right) F(x',y') dx' dy' +$$

$$+ \frac{y}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x'-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(x'+x)^2 + y^2} \right) f_1(x') dx' +$$

$$+ \frac{x}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + (y'-y)^2} - \frac{1}{x^2 + (y'-y)^2} \right) f_2(y') dy'.$$

Условия Неймана. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0), \quad x, x_0, y, y_0 \in (0,+\infty), \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ y \in [0,\infty), \quad \left.\dfrac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \ x \in [0,\infty), \\ G(M,M_0) \text{ регулярна на бесконечности,} \end{cases}$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \ln \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} + \right.$$
$$\left. + \ln \frac{1}{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2} + \ln \frac{1}{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x, \ y \in (0,+\infty), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f_1(x), \ x \in [0,+\infty), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = f_2(y), \ y \in [0,+\infty), \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}+\right.$$

$$+\ln\frac{1}{(x'-x)^2+(y'+y)^2}+\ln\frac{1}{(x'+x)^2+(y'+y)^2}+$$

$$\left.+\ln\frac{1}{(x'+x)^2+(y'-y)^2}\right)F(x',y')dx'dy'+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{(x'-x)^2+y^2}+\ln\frac{1}{(x'+x)^2+y^2}\right)f_1(x')dx'+$$

$$+\frac{x}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\ln\frac{1}{x^2+(y'-y)^2}+\ln\frac{1}{x^2+(y'-y)^2}\right)f_2(y')dy'.$$

2.6. Полукруг радиуса a.

В разделе 2.6 считается $M=M(r,\psi)$, $M_0=M_0(r_0,\psi_0)$.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad r,r_0\in(0,a),\ \psi,\psi_0\in(0,\pi),\\ G|_{r=a}=0,\ \psi\in(0,\pi),\ G|_{\psi=0}=G|_{\psi=\pi}=0,\ r\in[0,a].\end{cases}$$

Здесь и далее точка наблюдения M имеет координаты (r,ψ), точка истока M_0 — координаты (r_0,ψ_0), а точка M_1 с координатами $\left(\frac{a^2}{r_0},\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_0 относительно окружности радиуса a, точка $M_2(r_0,-\psi_0)$ является симметричной точке $M_0(r_0,\psi_0)$ относительно прямой $y=0$, точка $M_3\left(\frac{a^2}{r_0},-\psi_0\right)$ является сопряженной точке M_2 относительно окружности радиуса a и симметричной точке $M_1(r_0,\psi_0)$ относительно прямой $y=0$.

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}}-\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right)-\ln\frac{1}{r_{_{MM_2}}}+\ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_3}}}\right)\right).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M), \quad r\in(0,a), \quad \psi\in(0,\pi),\\ u|_{r=a}=f(\psi), \quad \psi\in[0,\pi],\\ u|_{\psi=0}=f_1(r),\ r\in[0,a], \quad u|_{\psi=\pi}=f_2(r),\ r\in[0,a]\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^a\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi-\psi')}}-\right.$$
$$-\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi-\psi')}}-\ln\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\psi+\psi')}}+$$
$$\left.+\ln\frac{a}{\sqrt{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos(\psi+\psi')}}\right)F(r',\psi')r'dr'd\psi'+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\left(\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\psi-\psi')}-\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\psi+\psi')}\right)f(\psi')d\psi'+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a\left(\frac{rr'\sin\psi}{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}-\frac{a^2rr'\sin\psi}{r^2r'^2+a^4-2a^2rr'\cos\psi}\right)f_1(r')dr'+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^a\left(\frac{rr'\sin\psi}{r^2+r'^2+2rr'\cos\psi}-\frac{a^2rr'\sin\psi}{r^2r'^2+a^4+2a^2rr'\cos\psi}\right)f_2(r')dr'$$

2.7. Кольцо $a<r<b$.

Условия Дирихле.

Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad r,r_0\in(a,b),\ \psi,\psi_0\in[0,2\pi),\\ G|_{r=a}=G|_{r=b}=0,\ \psi\in[0,2\pi]\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\ln b\ln(r/a)+\ln r_0\ln(b/r)}{\ln(b/a)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\frac{r^{2n}-a^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}+\left(\frac{a^2}{r_0r}\right)^n\frac{b^{2n}-r^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}\right\}\cos n(\psi-\psi_0).$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=F(M), \quad r\in(0,a), \quad \psi\in[0,2\pi),\\ u|_{r=a}=f_1(\psi), \quad u|_{r=b}=f_2(\psi),\ \psi\in[0,2\pi],\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^b G(M',M)F(M')r'dr'd\psi'-$$

$$-a\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r'}\Big|_{r'=a}f_1(\psi')d\psi'+b\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r'}\Big|_{r'=b}f_2(\psi')d\psi'$$

2.8. Сектор произвольного угла α радиуса a.

Условия Дирихле. Задача для функции Грина:

$$\begin{cases}\Delta_M G(M,M_0)=-\delta(M,M_0), \quad r,r_0\in(0,a),\ \psi,\psi_0\in(0,\alpha),\\ G|_{r=a}=0,\ \psi\in[0,\alpha], \quad G|_{\psi=0}=G|_{\psi=\alpha}=0,\ r\in[0,a]\end{cases}$$

$$G(M,M_0)=\frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right)J_{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r_0\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0}{\left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2\right]J'^2_{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(\mu_k^{(n)}\right)},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень уравнения $J_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu)=0$.
Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta u=-F(M),\ r\in(0,a),\ \psi\in(0,\alpha),\\ u|_{r=a}=f(\psi), \quad \psi\in(0,\alpha),\\ u|_{\psi=0}=f_1(r), \quad u|_{\psi=\alpha}=f_2(r), \quad r\in(0,a)\end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(r,\psi,z)=\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_0^{a}G(r',\psi',r,\psi,z)F(r',\psi')r'dr'd\psi'+$$

$$+a\int\limits_0^{\alpha}\frac{\partial G}{\partial r'}(a,\psi',r,\psi)f(\psi')d\psi'-\int\limits_0^{a}\frac{1}{r'}\frac{\partial G}{\partial\psi'}(r',0,r,\psi)f_1(r')dr'+$$

$$+\int\limits_0^{a}\frac{1}{r'}\frac{\partial G}{\partial\psi'}(r',\alpha,r,\psi)f_2(r')dr'.$$

2.9. Полоса $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, \pi]$.
В разделе 2.9 считается $M = M(x, y)$, $M_0 = M_0(x_0, y_0)$.

Условия Дирихле.
Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, \pi), \\ G(M, M_0)|_{y=0} = G(M, M_0)|_{y=\pi} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, \pi), \\ u|_{y=0} = f_1(x), \ u|_{y=\pi} = f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x' - x) - \cos(y' + y)}{\operatorname{ch}(x' - x) - \cos(y' - y)} \cdot F(x', y') dx' dy' -$$
$$- \frac{\sin y}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(x') dx'}{\operatorname{ch}(x' - x) - \cos y} + \frac{\sin y}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(x') dx'}{\operatorname{ch}(x' - x) + \cos y}.$$

Условия Неймана.
Задача для функции Грина:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, \pi), \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(M, M_0)\Big|_{y=0} = \dfrac{\partial G}{\partial y} G(M, M_0)\Big|_{y=\pi} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \Big\{ \ln\left[\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)\right] +$$
$$+ \ln\left[\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)\right] \Big\}.$$

Представление решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0,\pi), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = f_1(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\pi} = f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases}$$

с помощью функции Грина:

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\Big\{\ln\left[\operatorname{ch}(x'-x) - \cos(y'+y)\right] +$$

$$+ \ln\left[\operatorname{ch}(x'-x) - \cos(y'-y)\right]\Big\} \cdot F(x',y')dx'dy' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\operatorname{ch}(x'-x) - \cos y\right] f_1(x')dx' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\operatorname{ch}(x'-x) + \cos y\right] f_2(x')dx'.$$

Приложение А

ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§ 1. Трехмерный случай. Внутренние области.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — конечная область, ограниченная достаточно гладкой замкнутой поверхностью S. Как известно [20], для любого вектора $\vec{A}$, компоненты которого непрерывно дифференцируемы внутри области D, справедлива формула Остроградского:

$$\int\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_D \operatorname{div} \vec{A} dV$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области D нормали к поверхности S.

Из формулы Остроградского может быть получена первая формула Грина для оператора Лапласа в ограниченной области D. Возьмем в качестве вектора A следующее выражение:

$$\vec{A} = v \nabla u,$$

где ∇ — оператор Гамильтона, а функции v и u удовлетворяют следующим условиям:

$$v \in C(\overline{D}) \cap C^{(1)}(D), \quad u \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D).$$

При этом, учитывая, что

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \, (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u,$$

где $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ – оператор Лапласа, и

$$\vec{n} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n},$$

получаем *первую формулу Грина*:

$$\int\limits_D v \Delta u dV = \int\limits_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_D \nabla v \cdot \nabla u dV. \qquad (A.1.1)$$

Вторая формула Грина получается из первой, если взять

$$u, v \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D)$$

и рассмотреть разность интегралов по области D от выражений $v\Delta u$ и $u\Delta v$:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \qquad \text{(A.1.2)}$$

Если область D ограничена несколькими замкнутыми поверхностями, то интеграл в левой части равенств (A.1.1) и (A.1.2) превращается в сумму интегралов по соответствующим поверхностям. При этом все нормали обязаны быть внешними по отношению к области D (см. рис. A.1.1).

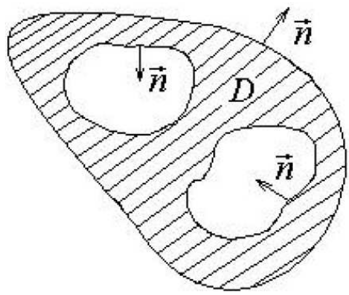

Рис. A.1.1.

Третья формула Грина может быть получена из второй, если в качестве функции v взять фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае:

$$v(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}},$$

где $r_{_{MM_0}}$ — расстояние между точками M и M_0. Так как для фиксированной точки M_0 фундаментальное решение является гармонической функцией координат точки M при $M \neq M_0$, то в случае, когда $M \in D$, а $M_0 \notin \overline{D}$, из второй формулы Грина (A.1.2) получаем:

$$0 = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{_{PM_0}}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{_{PM_0}}} \right) dS_P - \int\limits_D \frac{\Delta u}{r_{_{MM_0}}} dV_M. \qquad \text{(A.1.3)}$$

В равенстве (A.1.3) точка P пробегает границу S области D, $\vec{n}_P$ представляет собой единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке P, индекс P у элемента площади поверхности dS_P означает, что интегрирование производится по координатам точки P, а индекс M элемента объема dV_M, соответственно, означает, что интеграл берется по координатам точки M. Координаты точки M_0 играют роль параметров.

Если точка M_0 принадлежит области D, ее можно окружить сферой $\Sigma(M_0, \varepsilon)$ достаточно малого радиуса ε с центром в точке M_0 так, чтобы шар $K(M_0, \varepsilon)$ целиком лежал в области D. Рассмотрим вторую формулу Грина в области $D \setminus \overline{K(M_0, \varepsilon)}$. Так как в этой области функция $\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ является гармонической, получаем:

$$\int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P = \int\limits_{D\setminus\overline{K(M_0,\varepsilon)}} \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M. \tag{A.1.4}$$

Рассмотрим подробнее интеграл по сфере $\Sigma(M_0, \varepsilon)$:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P. \tag{A.1.5}$$

Так как единичная нормаль $\vec{n}_P$ является внешней по отношению к области $D \setminus \overline{K(M_0, \varepsilon)}$, то она направлена внутрь шара $K(M_0, \varepsilon)$. Перейдем к сферическим координатам с центром в точке M_0. Тогда вектор единичной нормали к поверхности $\Sigma(M_0, \varepsilon)$, направленный внутрь шара $K(M_0, \varepsilon)$, имеет вид $\vec{n}_P = -\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r$ — радиальный орт сферической системы координат. Следовательно, в рассматриваемой системе координат имеют место равенства:

$$\frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad dS_P = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\psi,$$

с учетом которых интеграл (А.1.5) принимает вид:

$$I(\varepsilon) = -\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial r} + u\right)\Big|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta d\psi.$$

В соответствии с теоремой о среднем на сфере $\Sigma(M_0,\varepsilon)$ найдется точка с угловыми координатами $\theta=\widetilde{\theta}$ и $\psi=\widetilde{\psi}$, такая что

$$I(\varepsilon)=-\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial r}+u\right)\Big|_{r=\varepsilon,\,\theta=\widetilde{\theta},\,\psi=\widetilde{\psi}}\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\psi}_{4\pi}.$$

Устремляя ε к нулю и учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ ограничено в окрестности $r=0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon)=-4\pi\lim_{\varepsilon\to 0}u(\varepsilon,\widetilde{\theta},\widetilde{\psi})=-4\pi u(M_0).$$

Следовательно, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ равенстве (А.1.4), получаем

$$4\pi u(M_0)=\int\limits_S\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P-\int\limits_D\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}dV_M. \tag{А.1.6}$$

Если точка M_0 принадлежит поверхности S области D, можно повторить все проведенные выше рассуждения с той лишь разницей, что теперь внутри D оказывается только часть шара $K(M_0,\varepsilon)$. Поверхность внутренней по отношению к области D части шара при малых ε близка к полусфере. Поэтому в формуле (А.1.6) нужно заменить множитель 4π на 2π. В итоге, мы получаем *третью формулу Грина*:

$$\begin{aligned}\Omega(M_0)u(M_0)=\int\limits_S\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P-&\\-\int\limits_D\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}dV_M,&\end{aligned} \tag{А.1.7}$$

где

$$\Omega(M_0)=\begin{cases}4\pi, & \text{если } M_0\in D\\ 2\pi, & \text{если } M_0\in S\\ 0, & \text{если } M_0\notin \overline{D}\end{cases}$$

§ 2. Трехмерный случай. Внешние области

Пусть D_e — дополнение конечной области D с достаточно гладкой замкнутой поверхностью S до всего пространства $\mathbb{R}^3$.

Для *регулярных* на бесконечности функций во внешней области D_e также можно получить три формулы Грина.

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось внутри области D. Окружим область D сферой $\Sigma(O,R)$ с центром в начале координат O и достаточно большим радиусом R. В конечной области $K(O,R)\setminus\overline{D}$, где $K(O,R)$ — шар с центром в начале координат и радиусом R, справедливы три формулы Грина.

1) Для любых $v\in C(\overline{D_e})\cap C^{(1)}(D_e)$ и $u\in C^{(1)}(\overline{D_e})\cap C^{(2)}(D_e)$

$$\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}} v\Delta u dV=\int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n_P}dS+I_1(R)-\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}}\nabla v\nabla u dV, \tag{A.2.1}$$

где $\vec{n}_P$ — вектор единичной внешней по отношению к области $K(O,R)\setminus\overline{D}$ нормали к поверхности S, а слагаемое $I_1(R)$ представляет собой интеграл по сфере $\Sigma(O,R)$ и в сферической системе координат с центром в точке O имеет вид:

$$I_1(R)=\int\limits_{\Sigma(O,R)} v\frac{\partial u}{\partial n}dS=R^2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}\sin\theta d\theta d\psi.$$

2) Для любых $v,u\in C^{(1)}(\overline{D_e})\cap C^{(2)}(D_e)$

$$\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}}(v\Delta u-u\Delta v)\,dV=\int\limits_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n_P}-u\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dS+I_2(R), \tag{A.2.2}$$

где слагаемое $I_2(R)$ имеет вид:

$$I_2(R)=\int\limits_{\Sigma(O,R)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=R^2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(v\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial v}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}\sin\theta d\theta d\psi.$$

3) Для любой функции $u\in C^{(1)}(\overline{D_e})\cap C^{(2)}(D_e)$

$$\Omega(M_0)u(M_0)=\int\limits_S\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P+$$

$$+I_3(R)-\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}}\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}dV_M, \tag{A.2.3}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 4\pi, \text{ если } M_0 \in K(O,R) \setminus \overline{D}, \\ 2\pi, \text{ если } M_0 \in S \text{ или } M_0 \in \Sigma(O,R), \\ 0, \text{ если } M_0 \notin \overline{K(O,R) \setminus \overline{D}}, \end{cases}$$

а слагаемое $I_3(R)$ имеет вид:

$$I_3(R) = \int\limits_{\Sigma(O,R)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}} \right) dS_P.$$

Преобразуем выражение для интеграла $I_3(R)$. Для этого учтем, что в сферических координатах

$$r_{PM_0}\Big|_{P\in\Sigma(O,R)} = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\Big|_{P\in\Sigma(O,R)} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}}\Bigg|_{r=R} =$$

$$= -\frac{R - r_0\cos\gamma}{\left(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma\right)^{3/2}},$$

где (r_0, θ_0, ψ_0) — координаты точки M_0, (R, θ, ψ) — координаты точки $P \in \Sigma(O,R)$, и

$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0)$ (см. параграф 3 главы 2).

Таким образом,

$$I_3(R) = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma}{\left(1 + \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma\right)^{3/2}} \cdot u|_{r=R} \right) \sin\theta d\theta d\psi.$$

В равенствах (A.2.1)-(A.2.3) нормаль $\vec{n}_P$ к поверхности S является внешней по отношению к области D_e, то есть она направлена внутрь D.

Если функции u и v являются регулярными на бесконечности (см. определение 2.2.1), то интегралы $I_1(R)$, $I_2(R)$, $I_3(R)$ по сфере $\Sigma(O,R)$ в равенствах (A.2.1)-(A.2.3) стремятся к нулю при $R\to+\infty$. В самом деле, для регулярных на бесконечности функций u и v существуют такие постоянные $A_1>0$ и $A_2>0$, что

$$|v|_{r=R}<\frac{A_1}{R},\quad \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R}<\frac{3A_1}{R^2},\quad |u|_{r=R}<\frac{A_2}{R},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}<\frac{3A_2}{R^2}.$$

Следовательно, для интеграла $I_1(R)$ в равенстве (A.2.1) получаем

$$|I_1(R)|=R^2\left|\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}v\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}\sin\theta d\theta d\psi\right|<4\pi\frac{3A_1A_2}{R}\to0 \text{ при } R\to+\infty.$$

Интегралы $I_2(R)$ и $I_3(R)$ в равенствах (A.2.2)-(A.2.3) оцениваются аналогичным образом.

Для регулярных на бесконечности функций также можно показать, пользуясь их поведением на бесконечности, что объемные интегралы в равенствах (A.2.1)-(A.2.3) при $R\to+\infty$ сходятся в смысле главного значения.

Итак, устремляя радиус R к бесконечности, для *регулярных на бесконечности функций* получаем три формулы Грина, аналогичные формулам для внутренних областей:

$$\int\limits_{D_e}v\Delta u dV_M=\int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n_P}dS_P-\int\limits_{D_e}\nabla v\nabla u dV_M, \tag{A.2.4}$$

$$\int\limits_{D_e}(v\Delta u-u\Delta v)\,dV_M=\int\limits_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n_P}-u\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dS_P, \tag{A.2.5}$$

$$\Omega(M_0)u(M_0)=\int\limits_S\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P-\int\limits_{D_e}\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}dV_M, \tag{A.2.6}$$

где

$$\Omega(M_0)=\begin{cases}4\pi, \text{ если } M_0\in D_e,\\ 2\pi, \text{ если } M_0\in S,\\ 0, \text{ если } M_0\notin\overline{D_e}.\end{cases}$$

§ 3. Двумерный случай. Внутренние области.

Пусть D — область на плоскости, ограниченная достаточно гладкой замкнутой кривой L.
Первая формула Грина в двумерном случае имеет вид

$$\int\limits_D v\Delta u dS = \int\limits_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \int\limits_D \nabla v\cdot\nabla u dS \qquad \text{(A.3.1)}$$

для всех

$$v\in C(\overline{D})\cap C^{(1)}(D),\quad u\in C^{(1)}(\overline{D})\cap C^{(2)}(D).$$

Вторая формула Грина:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\,dS = \int\limits_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl \qquad \text{(A.3.2)}$$

для всех

$$u,v\in C^{(1)}(\overline{D})\cap C^{(2)}(D)$$

Третья формула Грина:

$$\begin{gathered}\Omega(M_0)u(M_0) = \int\limits_L \left(\ln\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dl_P - \\ - \int\limits_D \Delta u(M)\ln\frac{1}{r_{MM_0}}dS_M,\end{gathered} \qquad \text{(A.3.3)}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, \text{ если } M_0\in D \\ \pi, \text{ если } M_0\in L \\ 0, \text{ если } M_0\notin \overline{D}\end{cases}$$

Доказываются эти формулы полностью аналогично тому, как это сделано в трехмерном случае.

§ 4. Двумерный случай. Внешние области.

Пусть D_e — дополнение конечной области D с достаточно гладкой замкнутой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Для *регулярных на бесконечности гармонических вне некоторой ограниченной области* функций могут быть получены три формулы Грина в области D_e. В двумерном случае, в отличие от трехмерного, необходимо помимо регулярности (которая в двумерном случае означает ограниченность на бесконечности) требовать еще и гармоничности функций потому, что при этом условии их производные убывают на бесконечности как $\frac{1}{r^2}$ [9].

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось внутри области D. Окружим область D окружностью C_R с центром в начале координат и таким радиусом R, чтобы область D полностью принадлежала кругу U_R. Тогда в конечной области D_e^R, ограниченной кривой L и окружностью C_R, справедливы три формулы Грина.

Рассмотрим первую формулу Грина:

$$\int\limits_{D_e^R} v\Delta u dS = \int\limits_{L} v\frac{\partial u}{\partial n}dl + \int\limits_{C_R} v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \int\limits_{D_e^R} \nabla v \nabla u dS, \qquad (\text{A.4.1})$$

для любых $v \in C(\overline{D_e}) \cap C^{(1)}(D_e)$, $u \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области D_e^R.

В полярных координатах интеграл по окружности C_R имеет вид:

$$I_1(R) = \int\limits_{C_R} v\frac{\partial u}{\partial n}dl = R\int\limits_0^{2\pi} v\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} d\psi.$$

Если функции u и v являются регулярными на бесконечности и гармоническими вне некоторой ограниченной области $D_0 \subset D_e$, то найдутся такие $A_1, A_2 > 0$, что

$$|u| < A_1, \quad |\nabla u| < \frac{2A_1}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| < \frac{2A_1}{r^2}, \qquad (\text{A.4.2})$$

$$|v| < A_2, \quad |\nabla v| < \frac{2A_2}{r^2} \qquad (\text{A.4.3})$$

при достаточно больших r [1]. Следовательно,

$$|I_1(R)| = R\left|\int\limits_0^{2\pi} v\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} d\psi\right| < \frac{4\pi A_1 A_2}{R} \to 0 \text{ при } R \to +\infty.$$

В силу оценок (А.4.2)-(А.4.3) интеграл

$$\int\limits_{D_e^R} \nabla v \nabla u dS$$

по области D_e^R в выражении (А.4.1) сходится при $R \to +\infty$. Таким образом, при $R \to +\infty$ получаем *первую формулу Грина* во внешней двумерной области D_e:

$$\int\limits_{D_e} v\Delta u dS = \int\limits_{L} v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \int\limits_{D_e} \nabla v \nabla u dS. \qquad \text{(A.4.4)}$$

Вторая формула Грина

$$\int\limits_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \int\limits_{L} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dl \qquad \text{(A.4.5)}$$

получается из первой для любых гармонических вне некоторой ограниченной области $D_0 \subset D_e$ регулярных функций u и v, таких что $u, v \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$.

Получим третью формулу Грина в области D_e. В конечной области D_e^R верна формула:

$$\Omega(M_0)u(M_0) = \int\limits_{L} \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\right\} dl_P +$$
$$+ \int\limits_{C_R} \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\right\} dl_P -$$
$$- \int\limits_{D_e^R} \Delta u(M)\ln\frac{1}{r_{M_0M}} dS_M, \qquad \text{(A.4.6)}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in D_e^R, \\ \pi, & M_0 \in L \cup C_R, \\ 0, & M_0 \notin \overline{D_e^R}. \end{cases}$$

Нормаль $\vec{n}_P$ к границе области, образованной кривыми L и C_R, является внешней по отношению к области D_e^R.

Рассмотрим интеграл

$$I_2(R) = \int\limits_{C_R} \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\right\} dl_P$$

по окружности C_R в формуле (А.4.6) при $R \to +\infty$. Перейдем к полярным координатам (r, ψ). Пусть точка M_0 имеет координаты (r_0, ψ_0). Тогда

$$\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}} - \right.$$

$$\left. -u\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}} \right\}\Bigg|_{r=R} R d\psi =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ O\left(\frac{1}{R}\ln\frac{1}{R}\right) + u(R,\psi)\left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)\right\} d\psi = 2\pi u_\infty,$$

где $u_\infty = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int_{C_R} u dl$ — среднее значение функции u по окружности бесконечно большого радиуса. В результате предельного перехода получаем третью формулу Грина в области D_e:

$$\Omega(M_0)u(M_0) - 2\pi u_\infty = \int_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} \right\} dl_P - \tag{А.4.7}$$

$$- \int_{D_e} \Delta u(M) \ln \frac{1}{r_{M_0M}} dS_M,$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in D_e, \\ \pi, & M_0 \in L, \\ 0, & M_0 \notin \overline{D_e}. \end{cases}$$

Величина u_∞ для регулярной гармонической функции конечна и в общем случае не равна нулю. Заметим, что в трехмерном случае такого слагаемого в третьей формуле Грина нет.

Приложение Б

СУММИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ

1. Производящая функция полиномов Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\alpha}}, \quad |t|<1. \tag{Б.0.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x) = -\ln \frac{1-xt+\sqrt{t^2-2tx+1}}{2}, \quad |t|<1 \tag{Б.0.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} P_n(x) = \ln \frac{t-x+\sqrt{t^2-2tx+1}}{1-x}, \quad |t|<1 \tag{Б.0.10}$$

2. Суммирование некоторых тригонометрических рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\psi} = \frac{1}{1-te^{i\psi}} = \frac{1-te^{-i\psi}}{1+t^2-2t\cos\psi} \tag{Б.0.11}$$

Из (Б.0.11) получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\psi = \frac{1-t\cos\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}, \tag{Б.0.12}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin n\psi = \frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}. \tag{Б.0.13}$$

Интегрируя по переменной ψ соотношение (Б.0.13), приходим к равенству

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cos n\psi}{n} = \int \frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi} d\psi = \frac{1}{2}\ln(1+t^2-2t\cos\psi) + C.$$

Положив $t = 0$, находим постоянную интегрирования $C = 0$, и окончательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cos n\psi}{n} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\psi}}. \tag{Б.0.14}$$

Список литературы

1. А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов Лекции по математической физике. М: Изд-во Московского ун-та, 2004.
2. А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов Задачи по математической физике. М: Изд-во Московского ун-та, Изд-во «Наука», 1998.
3. Владимиров В.С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1986.
5. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов Уравнения в частных производных математической физики. М.: «Высшая школа», 1970.
6. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов, Сборник задач по математической физике, М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004
7. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М.: Изд-во МГУ, 1998
8. Н.Н. Миролюбов, М.В. Костенко, М.Л. Левинштейн, Н.Н. Тиходеев, Методы расчета электростатических полей, М.: «Высшая школа», 1963
9. Ф.М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т.1
10. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
11. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного переменного. Гостехиздат., 1951 г.
12. Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик, Уравнения математической физики. Сборник задач. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики. Москва, 2009 г.
13. С.Г. Калашников, Электричество. М.: Физматлит, 2003.
14. А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов Интегральные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
15. В.Т. Волков, А.Г. Ягола Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. — М.: КДУ, 2008.
16. И.Г. Петровский Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
17. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников Дифференциальные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
18. Г.А. Гринберг Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Издательство Академии Наук СССР, Москва, Ленинград, 1948.
19. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк Основы математического анализа. Часть 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
20. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк Основы математического анализа. Часть 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
21. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1965.
22. М.О. Корпусов, А.А. Панин Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том I. Общая теория. Часть I. Лекции. — М.: Физический факультет МГУ, 2016. 255 с.