Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями Неймана

Н. Н. Дерюгина

2022

Актуальные проблемы математической физики, посвященная памяти профессора В.Ф. Бутузова

Постановка задачи

$$\begin{cases} \mathcal{N}_u(u) := \varepsilon^4 \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0,\ x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ \mathcal{N}_v(v) := \varepsilon^2 \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0,\ x = (x_1, x_2) \in D, t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), v(x, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, \varepsilon),\ (x) \in \bar{D}, \\ \varepsilon^2 \left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = h(x),\ x \in \partial D, \\ \varepsilon \left. \dfrac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = q(x),\ x \in \partial D. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ определены при $(u, v, x) \in G \equiv I_u \times I_v \times D$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 – положительная константа. Производная в граничном условии берется по внутренней нормали к ∂D.

Эллиптическая краевая задача

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}_u(u) := \varepsilon^4 \Delta u - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \; x = (x_1, x_2) \in D, \\
\mathcal{L}_v(v) := \varepsilon^2 \Delta v - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \; x = (x_1, x_2) \in D, \\
\varepsilon^2 \left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = h(x), \; x \in \partial D, \\
\varepsilon \left. \dfrac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial D} = q(x), \; x \in \partial D.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Условия

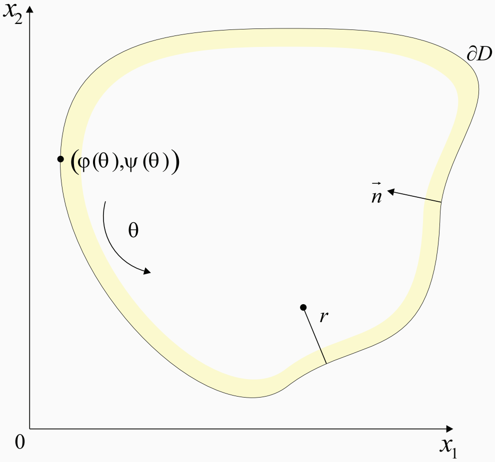
(A0) $f(u,v,x,\varepsilon)$, $g(u,v,x,\varepsilon)$, $h(x)$ и $q(x)$ достаточно гладкие функции.
(A1) Вырожденное уравнение $f(u,v,x,0)=0$ имеет корень $u=\varphi(v,x)$ такой, что $f_u(\varphi(v,x),v,x,0)>0, \quad v\in I_v \quad, x\in\bar{D}$.
(A2) Уравнение $p(v,x):=g(\varphi(v,x),v,x,0)=0$ имеет корень $v=v_0(x)$:

$$p_v(v_0,x)=g_v(\varphi(v_0,x),v_0,x,0)>0, \quad x\in\bar{D}.$$

(A3) Квазимонотонное невозрастание правых частей:

$$f_v(u,v,x,0)\le 0, g_u(u,v,x,0)\le 0, \ \ (u,v,x)\in I_u\times I_v\times\bar{D}.$$

Локальные координаты



$$\begin{cases} x_1 = \varphi(\theta) - r\dfrac{\psi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}, \\ x_2 = \psi(\theta) + r\dfrac{\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}}. \end{cases}$$

Локальные координаты

Введем растянутые переменные двух масштабов $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$ и $\eta = \frac{r}{\varepsilon^2}$. Получим выражения для дифференциальных операторов в растянутых переменных:

$$\Delta_{\xi,\theta} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} L_i,$$

$$\Delta_{\eta,\theta} = \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\psi_\theta^2 + \varphi_\theta^2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-2} L_i,$$

Формальная асимптотика

$$u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + Pu(\xi,\theta,\varepsilon) + Ru(\eta,\theta,\varepsilon),$$
$$v(x,\varepsilon) = \bar{v}(x,\varepsilon) + Pv(\xi,\theta,\varepsilon) + Rv(\eta,\theta,\varepsilon).$$

Все слагаемые асимптотики (6) представляются в виде рядов по степеням ε:

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_1(x) + \ldots,$$
$$Pu(\xi,\theta,\varepsilon) = P_0u(\xi,\theta) + \varepsilon P_1u(\xi,\theta) + \ldots,$$
$$Ru(\eta,\theta,\varepsilon) = R_0u(\eta,\theta) + \varepsilon R_1u(\eta,\theta) + \ldots.$$

Формальная асимптотика. Регулярная часть

Главные члены регулярной части асимптотики $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$ определяются из вырожденной системы (2):

$$\begin{cases} f(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0, \\ g(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0) = 0. \end{cases}$$

С учетом условиям (A1) и (A2) эта система имеет решение

$$\begin{cases} \bar{u}_0(x) = \varphi(v_0, x), \\ \bar{v}_0(x) = v_0(x). \end{cases}$$

Функции регулярной части порядка $k \geq 1$ определяются из системы вида:

$$\begin{cases} \bar{f}_u(x)\bar{u}_k + \bar{f}_v(x)\bar{v}_k = F_k(x), \\ \bar{g}_u(x)\bar{g}_k + \bar{g}_v(x)\bar{v}_k = G_k(x), \end{cases} \tag{3}$$

Формальная асимптотика. Погранслой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} Ru + \varepsilon^2 \dfrac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \dfrac{\partial}{\partial \eta} Ru + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+2} L_i Ru = Rf, \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} Rv + \dfrac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \dfrac{\partial}{\partial \eta} Rv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i} L_i Rv = Rg, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pu + \varepsilon^3 \dfrac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \dfrac{\partial}{\partial \xi} Pu + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+3} L_i Pu = Pf, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} Pv + \varepsilon \dfrac{\varphi_{\theta\theta}\psi_\theta - \psi_{\theta\theta}\varphi_\theta}{\sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2}} \dfrac{\partial}{\partial \xi} Pv + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} L_i Rv = Pg. \end{cases}$$

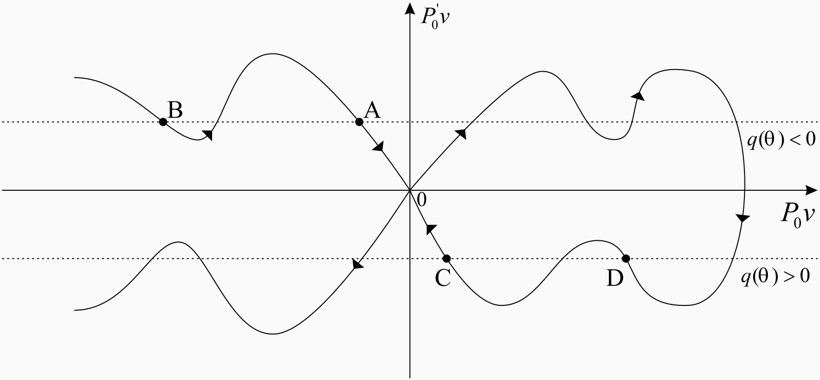
Формальная асимптотика. Погранслой

$R_0 v(\eta,\theta) = 0,\ R_1 v(\eta,\theta) = 0.$

$$\begin{cases} P_0 u = \varphi(\bar{v}_0 + P_0 v, 0, \theta) - \bar{u}_0(0,\theta), \\ \dfrac{\partial^2 P_0 v}{\partial \xi^2} = p(\bar{v}_0(0,\theta) + P_0 v, 0, \theta), \\ \left.\dfrac{\partial P_0 v}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = q(0,\theta), \\ P_0 v(\infty,\theta) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Формальная асимптотика. Погранслой

Точка $(0,0)$ – точка покоя типа седла. Задача (4) имеет решение, если прямая $P_0 v' = q(0,\theta)$ пересекает сепаратриссу, идущую в точку $(0,0)$.



Формальная асимптотика. Погранслой

(A4) Уравнение

$$\pm\left(2\int\limits_0^s p(v_0(0,\theta)+\sigma,0,\theta)d\sigma\right)^{1/2} = q(0,\theta)$$ для каждого фиксированного θ имеет корень $s(\theta)$ такой, что $p(v_0(0,\theta)+s,0,\theta)>0$ при $s(\theta)>0$ и $p(v_0(0,\theta)+s,0,\theta)<0$ при $s(\theta)<0$.

Функция $R_0 u(\eta, \theta)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 R_0 u}{\partial \eta^2} = f(\bar{u}_0(0,\theta) + P_0 u(\varepsilon\eta, \theta) + R_0 u, \bar{v}_0(0,\theta) + P_0 v(\varepsilon\eta,\theta), 0, \theta), \\ \dfrac{\partial R_0 u}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = h(0,\theta), \\ R_0 u(\infty) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

(A5) Уравнение

$$\pm\left(2\int\limits_0^s f(\bar{u}_0 + P_0 u + \sigma, \bar{v}_0 + P_0 v, 0, \theta) d\sigma\right)^{1/2} = h(\theta) \text{ для}$$

каждого фиксированного θ имеет корень $s(\theta)$ такой, что
$f(\bar{u}_0 + P_0 u + s, \bar{v}_0 + P_0 v, 0, \theta) > 0$ при $s(\theta) > 0$ и
$f(\bar{u}_0 + P_0 u + s, \bar{v}_0 + P_0 v, 0, \theta) < 0$ при $s(\theta) < 0$.

Формальная асимптотика

Используя предложенную схему, можно построить асимптотику порядка $k \geq 0$

$$\begin{cases} U_k = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i (\bar{u}_i(x) + Pu_i(\xi, \theta) + Ru_i(\eta, \theta)), \\ V_k = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i (\bar{v}_i(x) + Pv_i(\xi, \theta) + Rv_i(\eta, \theta)). \end{cases}$$

Обоснование асимптотики

(u_α, v_α) и (u_β, v_β) – верхнее и нижнее решение задачи (2).

(B1): $u_\alpha(x,\varepsilon) \le u_\beta(x,\varepsilon)$ и $v_\alpha(x,\varepsilon) \le v_\beta(x,\varepsilon)$ для $x \in \bar{D}$.

(B2):

$$\mathcal{L}_u(u_\beta) \le 0 \le \mathcal{L}_u(u_\alpha), v_\alpha \le v \le v_\beta, x \in \bar{D},$$

$$\mathcal{L}_v(v_\beta) \le 0 \le \mathcal{L}_v(v_\alpha), u_\alpha \le u \le u_\beta, x \in \bar{D}.$$

(B3):

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial n}\Big|_{\partial D} \le h(x) \le \frac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big|_{\partial D},$$
$$\frac{\partial v_\beta}{\partial n}\Big|_{\partial D} \le q(x) \le \frac{\partial v_\alpha}{\partial n}\Big|_{\partial D}.$$

Верхнее и нижнее решение

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию n-го порядка построенной асимптотики:

$$\begin{cases} u_\alpha(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \gamma_u(x) + \varepsilon^n P_\alpha u(\xi,\theta) + \varepsilon^n R_\alpha u(\eta,\theta), \\ v_\alpha(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \gamma_v(x) + \varepsilon^n P_\alpha v(\xi,\theta), \\ u_\beta(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \gamma_u(x) + \varepsilon^n P_\beta u(\xi,\theta) + \varepsilon^n R_\beta u(\eta,\theta), \\ v_\beta(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \gamma_v(x) + \varepsilon^n P_\beta v(\xi,\theta). \end{cases} \tag{6}$$

Верхнее и нижнее решение

Функции γ_u и γ_v построим как решение системы:

$$\begin{cases} \bar{f}_u \cdot \gamma_u(x) + \bar{f}_v \cdot \gamma_v(x) = A, \\ \bar{g}_u \cdot \gamma_u(x) + \bar{g}_v \cdot \gamma_v(x) = B, \end{cases} \tag{7}$$

Из условий (A2)-(A3) следует, что $\gamma_u(x) > 0$ и $\gamma_v(x) > 0$.

Верхнее и нижнее решение

$$
\begin{cases}
P_\alpha u = -\dfrac{\bar{\bar{f}}_v}{\bar{\bar{f}}_u} P_\alpha v(\xi,\theta), \\
\dfrac{\partial^2 P_\alpha v}{\partial \xi^2} - \bar{p}_v P_\alpha u(\xi,\theta) = \gamma_v(x)(\tilde{g}_v(\xi,\theta) - \bar{g}_v(x)) - C_1 e^{-\kappa\xi}, \\
\dfrac{\partial P_\alpha v}{\partial \xi}\Big|_{\eta=0} = \varepsilon \dfrac{\partial \gamma_v}{\partial r}\Big|_{r=0} + \delta, \\
P_\alpha v(\infty) = 0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 R_\alpha u}{\partial \eta^2} - \bar{f}_u R_\alpha u = \gamma_u(\hat{f}_u(\xi,\theta) - \tilde{f}_u(x)) - C_2 e^{-\kappa\xi}, \\
\dfrac{\partial R_\alpha u}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = \varepsilon^2 \dfrac{\partial \gamma_u}{\partial r}\Big|_{r=0} + \delta, \\
R_\alpha u(\infty) = 0.
\end{cases}
$$

$\delta > 0$.

Существование решения

Согласно работам по теоремам сравнения из условий (B1)-(B3) следует, что существует решение задачи (2), для которого выполняются неравенства:

$$\begin{cases} u_\alpha(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le u_\beta(x,\varepsilon), \ x \in \bar{D}, \\ v_\alpha(x,\varepsilon) \le v(x,\varepsilon) \le v_\beta(x,\varepsilon), \ x \in \bar{D}. \end{cases}$$

Причем $u_\alpha(x,\varepsilon) - u_\beta(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$, $v_\alpha(x,\varepsilon) - v_\beta(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A0)-(A5). Тогда при достаточно малом ε, существует решение $u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon)$ задачи (2) с пограничным слоем вблизи ∂D, для которого функции $U_{n-1}(x,\varepsilon), V_{n-1}(x,\varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью ε^{n-1} при $x \in \bar{D}$.

Асимптотическая устойчивость стационарного решения

Для доказательства асимптотической устойчивости используются верхнее и нижнее решение системы (1) специальной структуры:

$$U_\alpha(x,t) = u(x) + (u_\alpha(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon))e^{-\kappa t},$$

$$U_\beta(x,t) = u(x) + (u_\beta(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon))e^{-\kappa t}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (A0)-(A5). Тогда при достаточно малом ε, стационарное решение $u_\alpha(x,\varepsilon)$, $v_\alpha(x,\varepsilon)$ задачи (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область притяжения не менее $(U_\alpha(x,\varepsilon), V_\alpha(x,\varepsilon)) \times (U_\beta(x,\varepsilon), V_\beta(x,\varepsilon))$. Это решение также локально единственно как решение задачи (2) в этой области.