МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

«Локальная разрешимость одного неклассического псевдопараболического уравнения и разрушение его решения»

И.К.Каташева, М.О.Корпусов, А.А.Панин

Введение

Исследуется вопрос о локальной и глобальной разрешимости, а также о разрушении за конечное время задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Уравнение (1) существенно выделяется среди модельных уравнений соболевского типа:

$$\text{фундаментальное решение (1)} \quad \mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^{3/2}}\frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\mu^2\right) J_0\left(2^{3/2}|x|^{1/2}t^{1/4}\sqrt{\mu}\right) d\mu \tag{3}$$

при $x \neq (0,0,0)$ имеет особенности при дифференцировании:

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c_0 \begin{cases} t^{-1/2}, & \text{если} \quad t \in (0,\delta), \\ |x|^{-3/4}\, t^{-7/8}, & \text{если} \quad t \geqslant \delta, \delta > 0, \end{cases} \tag{4}$$

Этим фактом мотивируется построение теории потенциала для уравнения (1) с последующим исследованием задачи Коши.

Основные методы

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T], \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{6}$$

Методом функций Грина получены

- третья формула для ограниченной области $(x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0, T]$, $\Omega \in \mathbb{R}^3$,
- третья формула Грина во всем пространстве $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$.

Исследованы свойства потенциалов для интегрального уравнения

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau)|u(y,\tau)|^q dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_0(y) dy. \tag{7}$$

Методом сжимающих отображений получены результаты о разрешимости (7) в классе $\mathbb{C}\left([0, T]; \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3)\right)$.

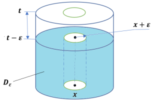
Получены:

- результаты о локальной/глобальной разрешимости в смысле слабых решений,
- условия глобальной неразрешимости в смысле слабых решений.

Метод функций Грина

$$M_{y,\tau} := \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\Delta_y u(y,\tau)\right) - u(y,\tau),\; N_{y,\tau}[u](y,\tau) := \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y},$$

2-я и 3-я формула Грина в области D_ε :



$$\int\limits_0^{t-\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Big[v(y,\tau)M_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)M^T_{y,\tau}[v](y,\tau)\Big]\,dyd\tau = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v(y,\tau)\Delta u(y,\tau)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t-\varepsilon} dy-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y,\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t-\varepsilon} dS_y + \int\limits_0^{t-\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big[v(y,\tau)N_{y,\tau}[u](y,\tau) - u(y,\tau)N^T_{y,\tau}[v](y,\tau)\Big]\,dS_y d\tau. \quad (8)$$

С учетом предельных соотношений для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{2+1}(\overline{\Omega}\otimes[0,T])$ справедливо:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \mathscr{E}(x-y,t-\tau)M_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau + \int\limits_\Omega \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_0(y)dy - \int\limits_{\partial\Omega} u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}dS_y + \int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\Big[u(y,\tau)N^T_{y,\tau}[\mathscr{E}](x-y,t-\tau) - \mathscr{E}(x-y,t-\tau)N_{y,\tau}[u](y,\tau)\Big]\,dS_y d\tau. \quad (9)$$

Третья формула Грина для $\mathbb{R}^3 \otimes (0, T]$

При $\Omega \to \mathbb{R}^3$ существенными являются полученные оценки интегралов:

Лемма 1

При $q > 3$ и $\gamma \in (0,3)$ справедлива:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^\gamma} \frac{1}{(1+|y|^2)^{q/2}} dy \leqslant \frac{M_1}{(1+|x|^2)^{\gamma/2}} \qquad (10)$$

Лемма 2

При $\alpha_1 > 1$ и $\gamma_1 \in [0,1)$ верно неравенство:

$$\int_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{\alpha_1}} \frac{1}{(t-\tau)^{\gamma_1}} d\tau \leqslant \frac{M_2}{(1+t)^{\gamma_1}} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \qquad (11)$$

Теорема 1

Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{2+1}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, T])$ принадлежит классам H_2^∞, P_2^∞ и N_2^∞, а начальная функция $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ принадлежит классам IN_1^∞ и IN_2^∞.
Тогда для каждого $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0, T]$ справедливо равенство:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) M_{y,\tau}[u](y,\tau) dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta u_0(y) dy \qquad (12)$$

Свойства потенциалов $U(x,t)$, $U_0(x,t)$, $V(x,t)$, $V_0(x,t)$

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)M_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau+\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_0(y)dy=\boxed{U_0[\rho_0]}+\boxed{V_0[\mu_0]}. \qquad (13)$$

$$\boxed{U[\rho](x,t)}=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}_{=G_\beta(x,y,t-\tau)}\rho(y,\tau)dyd\tau;\quad \boxed{V[\mu](x,t)}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy, \qquad (14)$$

- Свойство гладкости

	$G_\beta(x,y,t,\tau)$	**Условия на** $\rho(x,t),\mu(x)$	**Гладкость**
U	$\frac{(1+\lvert x\rvert^2)^{3/8}}{(1+\lvert y\rvert^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)$	$\rho(x,t)\in\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)\right)$	$\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)\right)$
V	$\frac{(1+\lvert x\rvert^2)^{3/8}}{(1+\lvert y\rvert^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t)$	$\mu(x)\in\mathbb{C}_b\left(\mathbb{R}^3\right)$	$\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$
U_0	$\mathscr{E}(x-y,t-\tau)$	$\rho_0(x,t)\in\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}_b\left((1+\lvert x\rvert^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3\right)\right)$	$\mathbb{C}^{(1)}\left([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}\left((1+\lvert x\rvert^2)^{3/8};\mathbb{R}^3\right.\right.$
V_0	$\mathscr{E}(x-y,t)$	$\mu_0(x)\in\mathbb{C}_b\left((1+\lvert x\rvert^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3\right)$	$\mathbb{C}\left([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}\left((1+\lvert x\rvert^2)^{3/8};\mathbb{R}^3\right)\right.$

Свойства потенциалов $U(x,t), U_0(x,t), V(x,t), V_0(x,t)$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) M_{y,\tau}[u](y,\tau)\,dy d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_0(y)\,dy = U_0[\rho_0] + V_0[\mu_0]. \qquad (15)$$

Локальная разрешимость во времени в классе $\mathbb{C}\left([0,\mathrm{T}];\mathbb{C}_\mathrm{b}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$.

Теорема 2. Для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2};\mathbb{R}^3\right), \beta > 3$, и $q > 4$ существует такое $T_0\left(u_0\right)$, что для всех $T \in [0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (15),

$$\text{причем при} \quad T_0 < +\infty : \quad \lim_{T\uparrow T_0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} \left(1+|x|^2\right)^{3/8}(1+t)^{1/8}|u(x,t)| = +\infty. \qquad (16)$$

Глобальная разрешимость

Теорема 3. При выполнении всех условий **теоремы 2** и условии **q>8** время существования решения (15) $T = +\infty$.

Слабые решения задачи Коши

Определение 1. Локальным во времени слабым решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{17}$$

называется такая функция $u(x,t) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, что для любой $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T])$ и $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$:

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi(x,t) + \phi(x,t) \right] dxdt - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta\phi(x,0)dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt. \tag{18}$$

Теорема 4.

Для любых $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}\left((1+|x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^3\right), \beta > 3, q > 4$ существует такое $T_0(u_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное слабое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T]; \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3)\right)$,

$$\text{причем при} \quad T_0 < +\infty: \quad \lim_{T \uparrow T_0} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]} \left(1+|x|^2\right)^{3/8} (1+t)^{1/8} |u(x,t)| = +\infty \tag{19}$$

Определение 2. Глобальным во времени слабым решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{20}$$

называется такая функция $u(x,t) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,+\infty))$, что для любой $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^4_+)$ и $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ выполнено

$$-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi(x,t) + \phi(x,t)\right] dxdt - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta\phi(x,0)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt \tag{21}$$

Теорема 5. ***О глобальной неразрешимости задачи Коши в смысле слабого решения***

Для любого фиксированного T_0 $(0 < T_0 < +\infty)$ найдутся такие допустимые *начальные данные* $u_0(x)$, для которых *глобальное слабое решение не существует*.

(метод пробных функций)

$$\frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta\phi'(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}dxdt + \frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)dxdt - \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta\phi(x,0)dx < 0$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \phi(x,t) \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T_0)\right) \geq 0 \tag{22}$$

Спасибо за внимание!