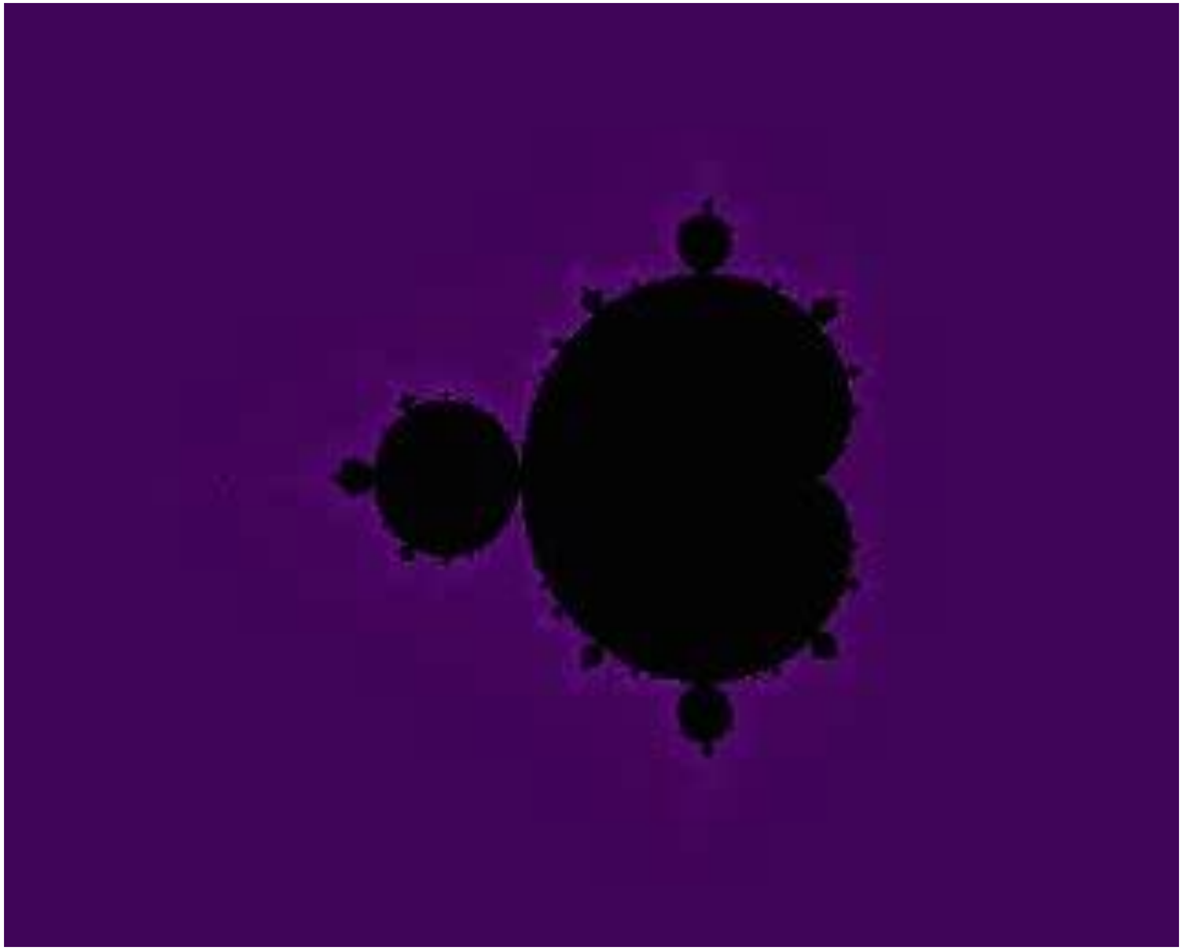
Глава 5. Некоторые объекты и методы математического моделирования

1. Фракталы и фрактальные структуры

ФРАКТАЛ –

это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба

На спинках блох блошата есть,
Кусают блох они там,
Блошонков у блошат не счесть,
И так indefinite…



Даниель Дефо

В прошлом математики основное внимание уделяли функциям и множествам, которые могут быть исследованы методами классического анализа.

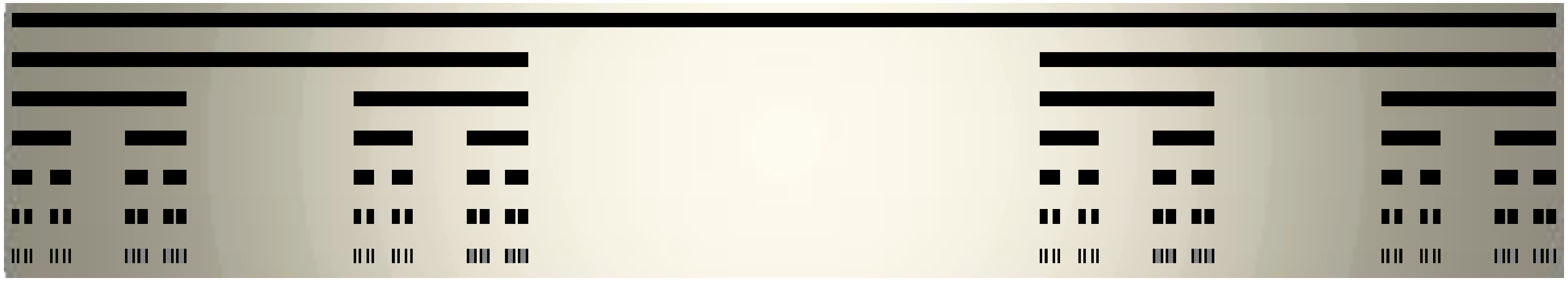
Те функции, которые не являлись достаточно гладкими или регулярными, как правило, не исследовались как не достойные внимания патологические объекты.

Однако еще в конце девятнадцатого века были построены математические объекты, которые вызвали значительный интерес у математиков.

Георг Кантор

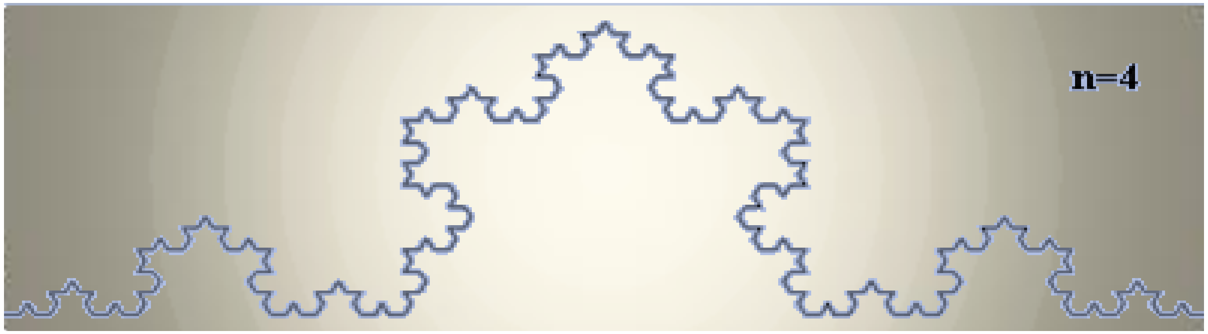
Канторово множество есть один из простейших фракталов, подмножество единичного отрезка вещественной прямой, которое является классическим примером «плохого множества» в математическом анализе.

Георг Кантор описал это множество, которое теперь называют множество Кантора или пыль Кантора, в 1883 году. Это множество имеет мощность континуума, но мера его равна нулю. Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит как множество в целом, то есть оно является самоподобным.



В 1886 году Карл Вейерштрасс построил функцию, не имевшую производной ни в одной точке. График этой функции – бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок кривой выглядит подобно всей кривой.

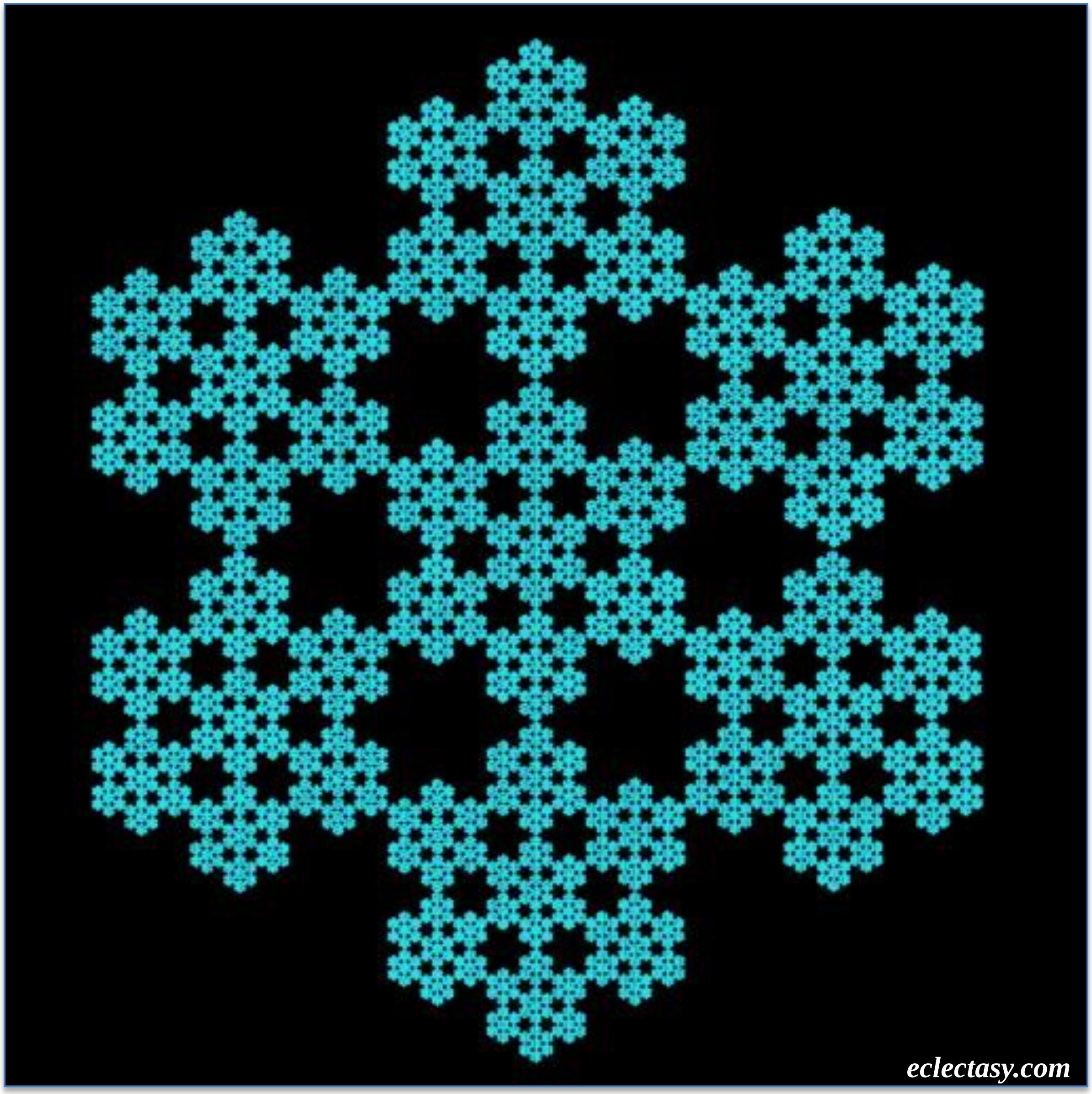
В 1904 году Хелге фон Кох построил пример непрерывной кривой, которая нигде не имеет касательной. Можно построить снежинку или остров Коха, если в качестве начального объекта взять равносторонний треугольник, а не единичный отрезок. Снежинка или остров Коха будут иметь бесконечный периметр, но при этом будут ограничивать конечную область.



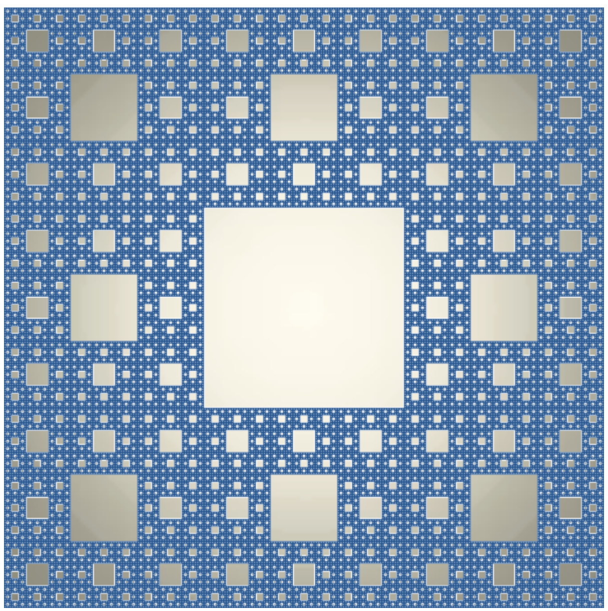
Хельге фон Кох

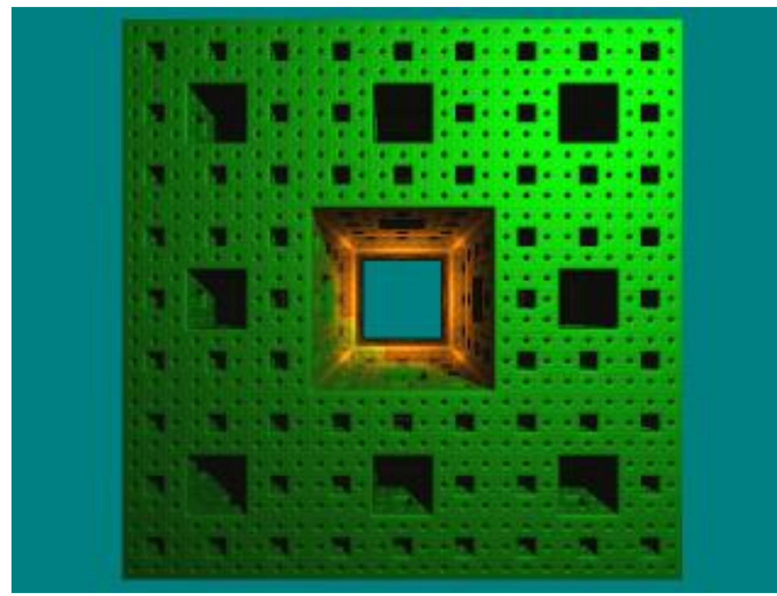
Кривая Коха — фрактальная кривая описанная шведским математиком Хельге фон Кохом(1870-1924). Кривая Коха примечательна тем, что нигде не имеет касательной, т. е. *нигде не дифференцируема*, хотя всюду непрерывна.

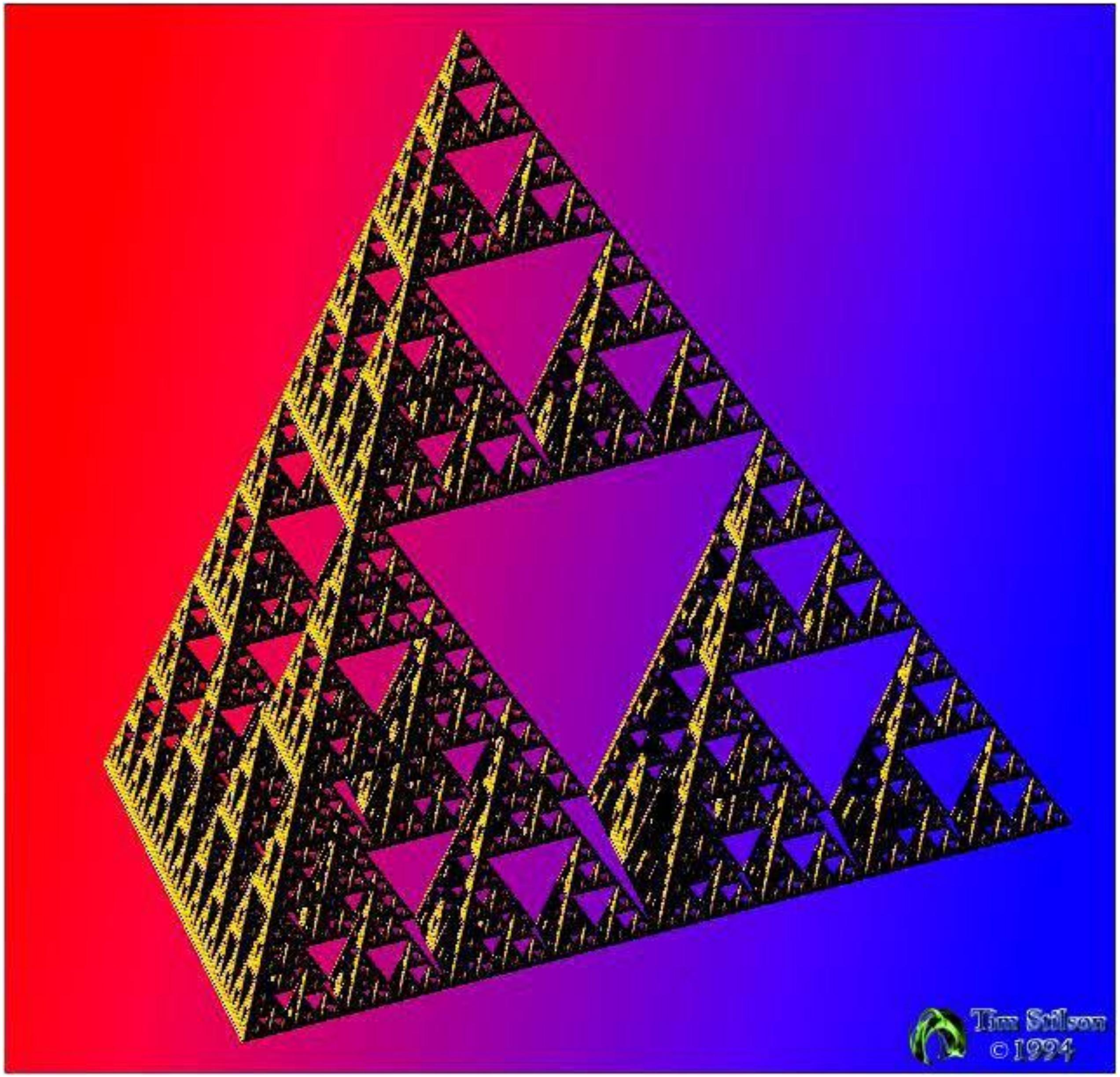
Три копии кривой Коха, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую снежинкой Коха.


eclectasy.com

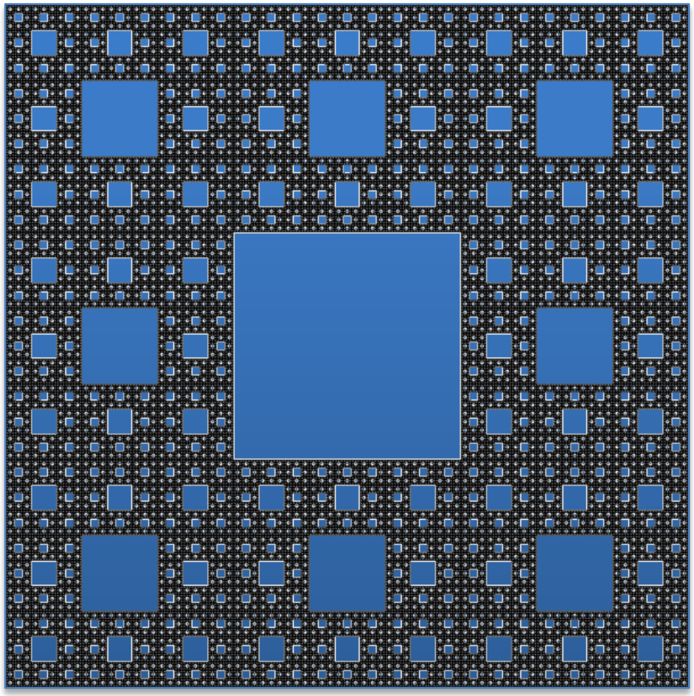
В 1915 году Вацлав Серпинский построил ряд конструкций, в частности, **салфетку Серпинского и ковер Серпинского.** Можно построить трехмерные аналоги этих объектов. Их называют **губками.**





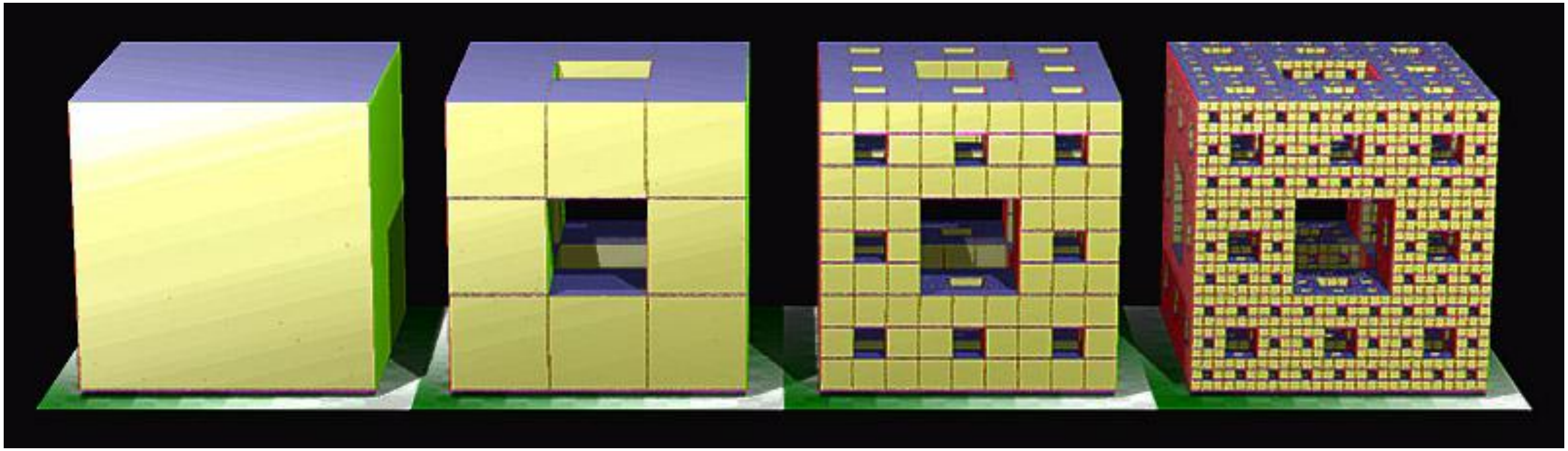

Tim Stilson
©1994

Ковер Серпинского. Берётся сплошной квадрат, разрезается на 9 равных квадратов и удаляется внутренность центрального квадрата. На втором шаге удаляется 8 центральных квадратов из 8 оставшихся квадратов и т. д. После бесконечного повторения этой процедуры, от сплошного квадрата остается замкнутое подмножество — **ковер (квадрат) Серпинского**.



Губка Менгера

Губка Менгера — геометрический фрактал, трёхмерный аналог ковра Серпинского.



Рассмотренные объекты называют конструктивными фракталами. **Они получаются в результате простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований).** **Именно изучение таких объектов составляет основное содержание фрактальной геометрии.**

Своей популярностью в последние десятилетия фракталы в значительной степени обязаны появлением в 1983 году книги сотрудника исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM франко-американского математика Бенуа Мальденброта «Фрактальная геометрия природы». Мальденброт ввел в 1975 году термин «фрактал» от латинского слова fractus – изломанный, дробный.

Бенуа Мандельброт *(фр.Benoît Mandelbrot)*
математик, родился 20 ноября 1924 в Польше. С 1958 проживал в США.
Является основателем фрактальной геометрии.

В его работах использованы результаты других учёных, работавших в той же области (Пуанкаре, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф).

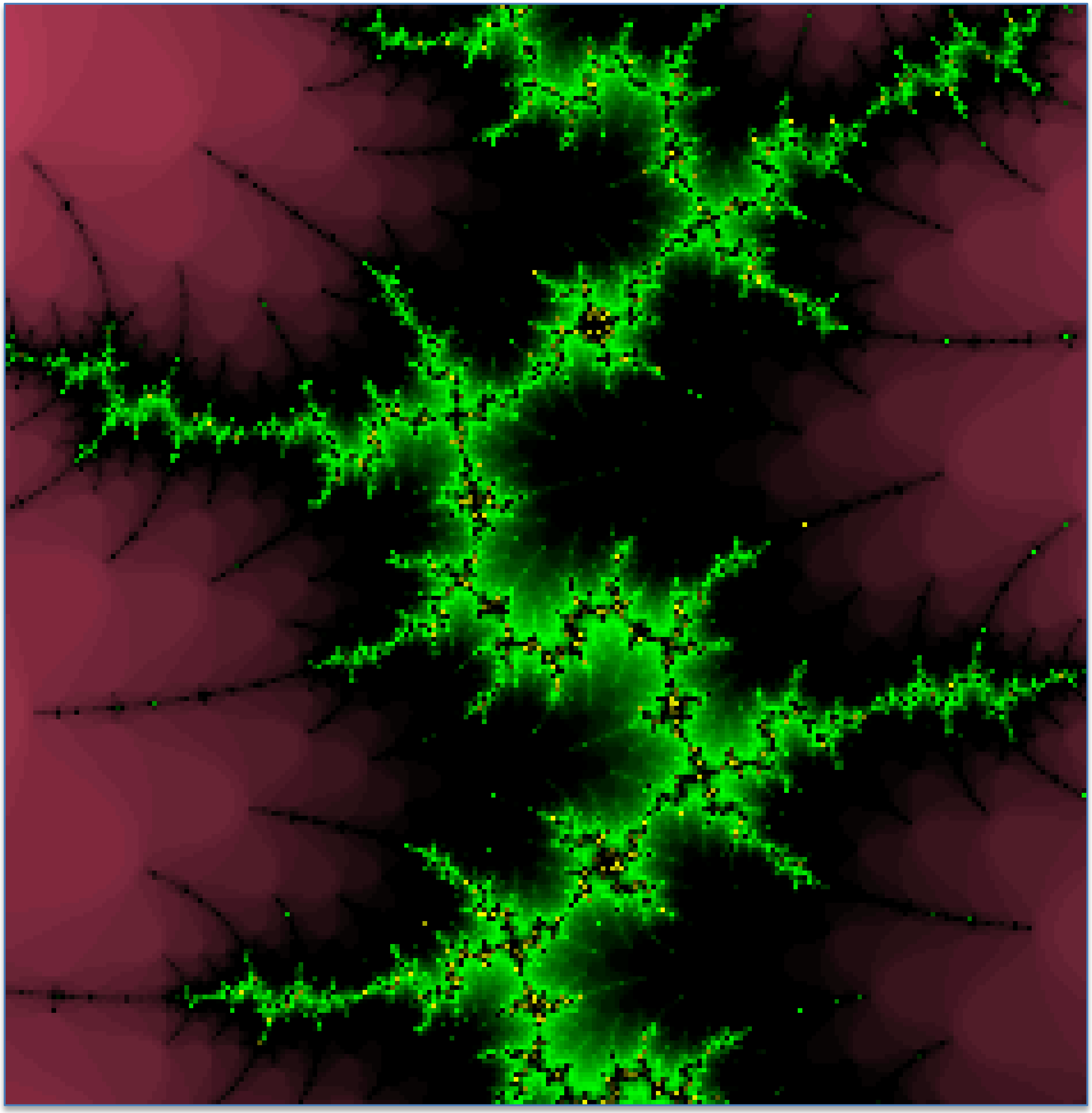
Большой интерес к фракталам, как и вообще к нерегулярным функциям и множествам объясняется прежде всего тем, что они гораздо лучше обеспечивают представление многих природных явлений нежели объекты классической геометрии. В этом плане интересно сравнить два высказывания, которые разделяет в 350 лет.

«Философия природы написана в величайшей книге – я разумею Вселенную… А написана эта книга на языке математики, и письмена ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры».

Галилео Галилей, 1623 год.

«Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, горы – это не конусы, линия берега – это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой… Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно».

Бенуа Мандельброт, 1973 год.



Фрагмент множества Мандельброта, лежащий в районе его границы

Широчайшее распространение фрактальных структур объясняется их разномасштабностью: и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон роста. Это геометрическое подобие и есть основной принцип роста всего живого, который называют также **иерархическим принципом организации.** Законы ветвления самой тонкой веточки дерева абсолютно те же, что и для всех его ветвей, и для всего живого в целом.

Задать фрактальную структуру-это значить задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы.

Как правило, алгоритмы построения формы гораздо проще, чем полученная с его помощью форма. **Фрактал даёт компактный описания самых замысловатых форм.**

Фракталы подразделяются на конструктивные и динамические. Конструктивный фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба. Они строятся путем применения простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований). Конструктивный фрактал – это множество, получающееся в результате линейных (аффинных) сжимающих отображений подобия. Результирующее сжимающее отображение обладает устойчивой неподвижной точкой – «фракталом». Задать фрактальную структуру – значит задать не застывшую, неизменную форму, а принцип роста, закон изменения формы.

Динамические фракталы, как правило задаются с помощью некоторого отображения. **Одним из первых описал динамические фракталы в 1918 году французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Если в отображении**

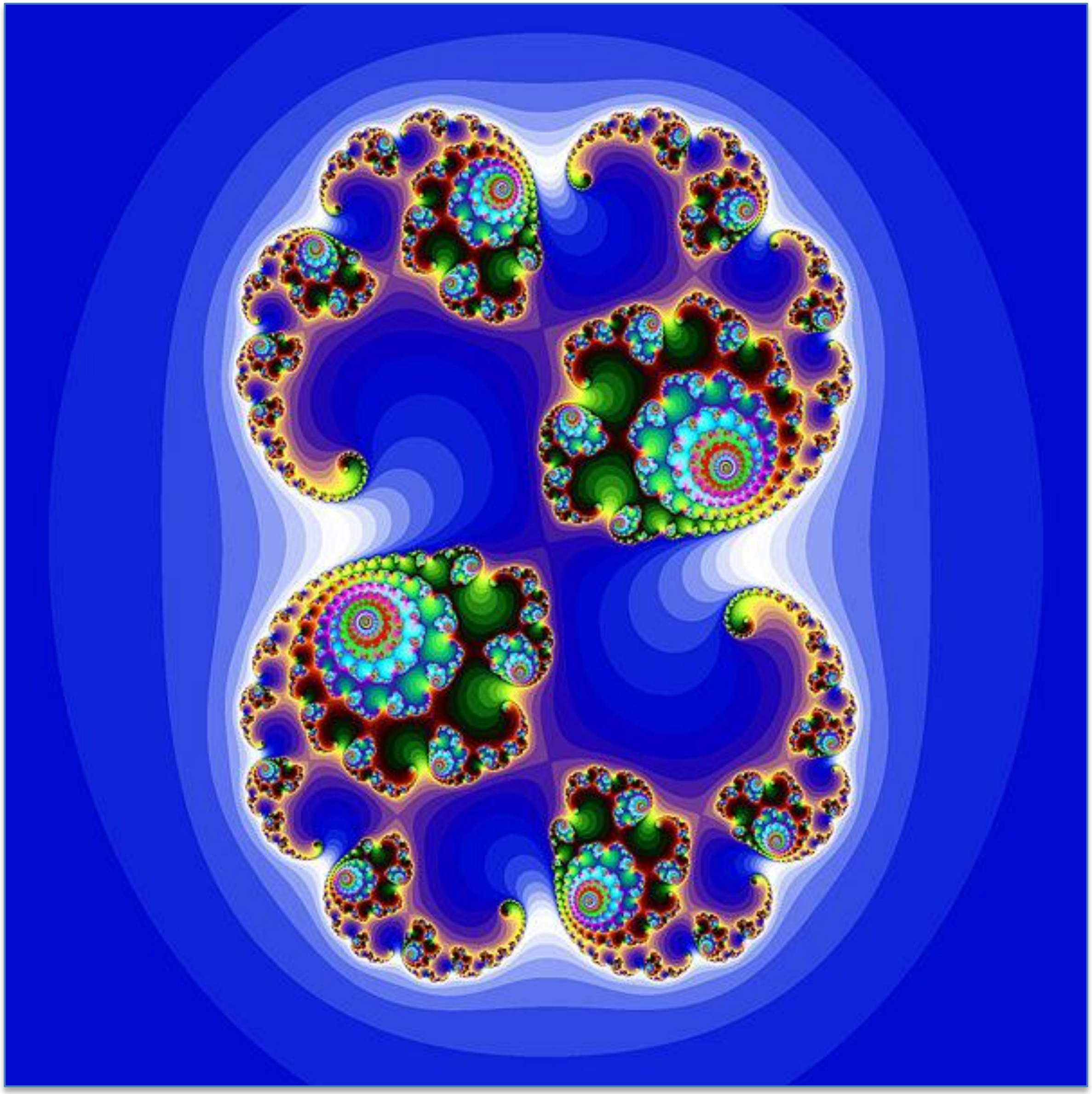
$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

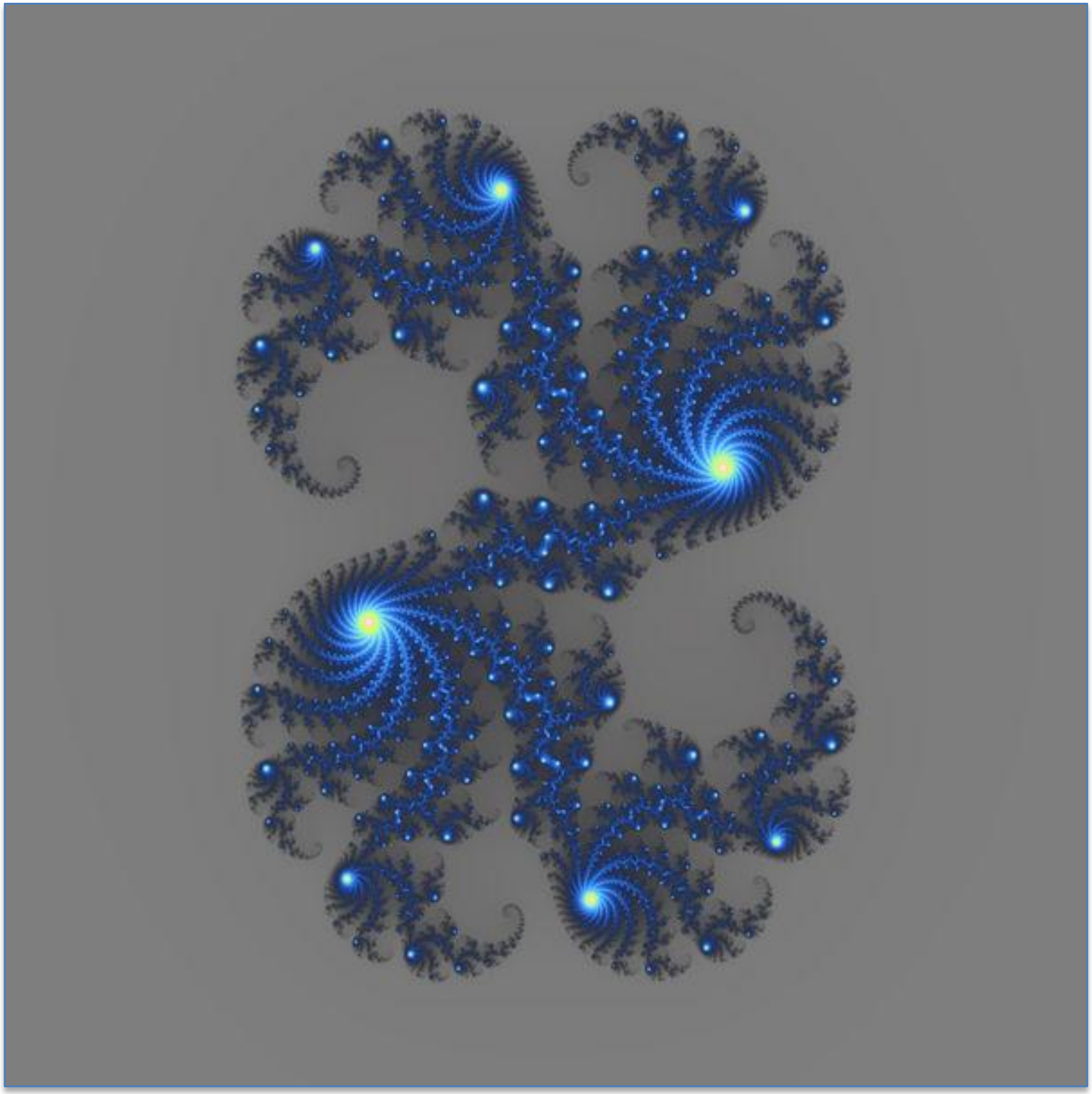
на комплексной плоскости фиксировать значение постоянной C, то в зависимости от выбора начального приближения пределом последовательности будут либо ноль, который является аттрактором, (зоной влияния, множеством притяжения), либо бесконечность (также аттрактор).

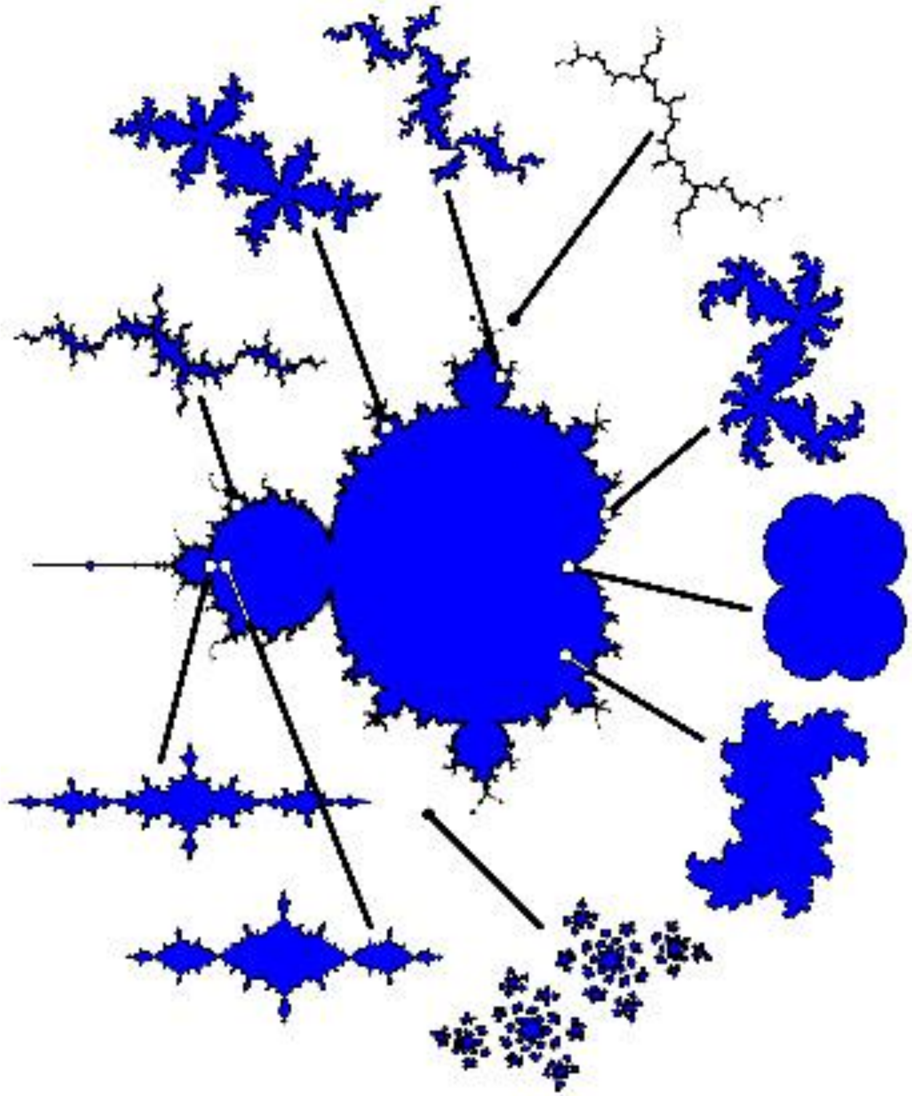
Граница, разделяющая области притяжения этих двух аттракторов бесконечно изрезана и является фракталом - множеством Жюлиа.

Одной из характерных особенностей такой линии является самоподобие: если взглянуть на любой ее поворот, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры.

Жюлиа и Фату установили, что эту границу, являющуюся множеством Жюлиа, можно восстановить по любой произвольной ее части. Заметим, что аттрактор, граница которого является фракталом, называется странным аттрактором.







Во второй половине XX века при измерении длины береговой линии Великобритании английский физик и метеоролог Льюис Ричардсон заменил истинную береговую линию ломаной, состоящей из отрезков, длины которых затем устремлялись к нулю. **Однако береговая линия, в отличие от линий, описываемых гладкими функциями, оказалась настолько изрезанной вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением длины звеньев длина всей линии не стремилась к конечному пределу, а становилась бесконечно большой.**

Основным свойством фрактала является самоподобие, или масштабная инвариантность, а фундаментальной характеристикой его является фрактальная размерность или размерность самоподобия. **Рассмотрим единичный отрезок, единичный квадрат и единичный куб:**

Единичный отрезок , N частей длины $\ell = \dfrac{1}{N} \Rightarrow 1 = N\ell$

Единичный квадрат, N квадратов со стороной $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \quad 1 = N\ell^2.$

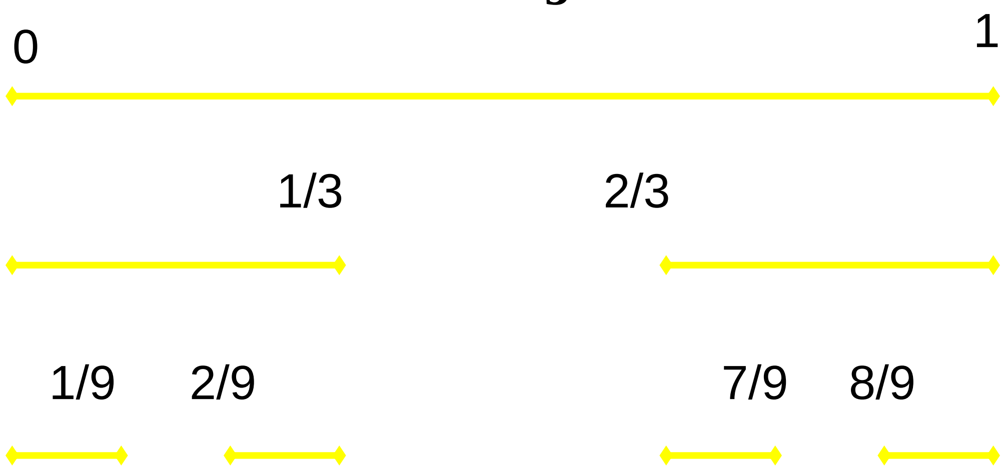
Единичный куб, N кубов со стороной $\ell = \dfrac{1}{\sqrt[3]{N}} \Rightarrow 1 = N\ell^3$

во всех этих случаях получаем $N\ell^d = 1,$ **где** ***d*** **–**

размерность самоподобия:

$$d = -\frac{\ell n N}{\ell n \,\ell}$$

Чтобы построить множество Кантора нужно взять два множества длины $\frac{1}{3}$.



$$\ell = 1, N = 1$$

$$\ell = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}, N = 2 = 2^1$$

$$\ell = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}, N = 4 = 2^2$$

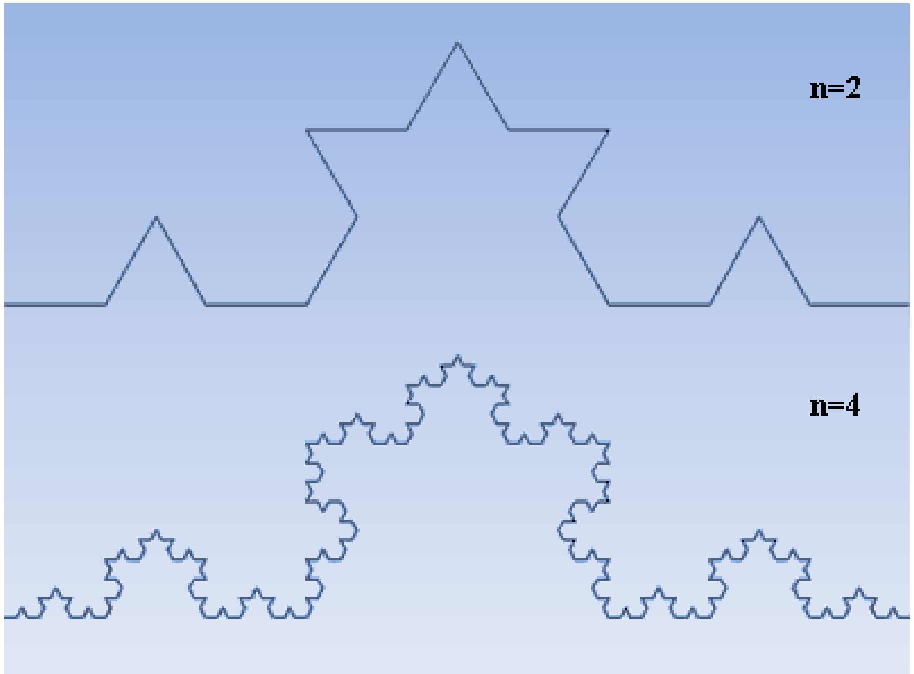
$$\ell = \frac{1}{3^n}, N = 2^n$$

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6308$$

Для кривой Коха требуется четыре отрезка длиной

$$\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$d = -\frac{\ell n 4}{\ell n \, 1/3} = \frac{\ell n 4}{\ell n 3} \approx 1{,}2616$$

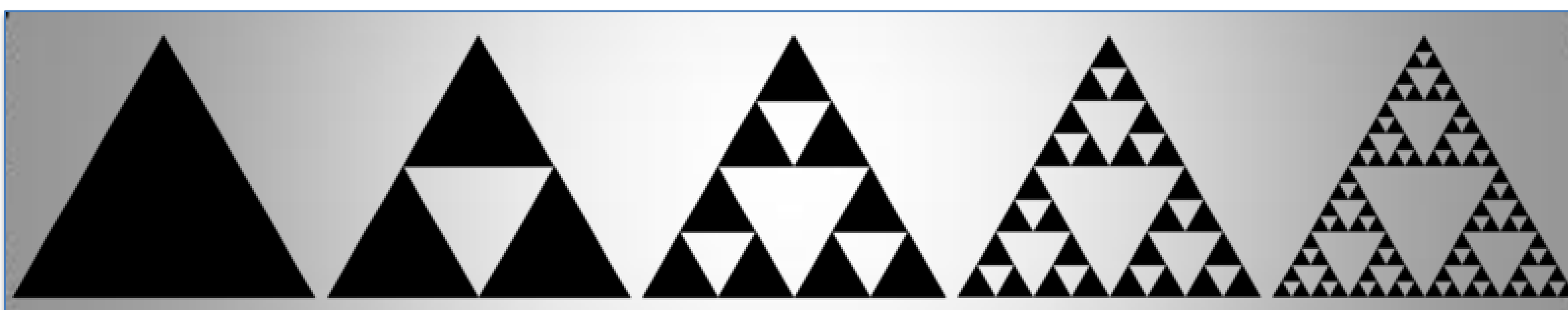


Еще не фигура но уже не отрезок.

Одна салфетка Серпинского состоит из трех салфеток с размером стороны $\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$d = -\frac{\ell n 3}{\ell n \, {}^{1}\!/_{2}} = \frac{\ell n 3}{\ell n 2} \approx 1,5850$$

Уже не фигура но еще не отрезок



Регулярные фракталы: **на каждом этапе масштабирования в точности повторяют объект в целом.**
Нерегулярные фракталы: **на каждом уровне масштаба структура фрактала подобна, но не идентична объекту в целом.**

Природные фракталы: **деревья, реки, облака, береговая линия.**
Человеческий организм: **структура дыхательной, кровеносной и нервной системы, губчатая структура костей, нейроны (нервные клетки), фронтальные ответвления и складки поверхности кишечника.**

Фрактальные кластеры: комплексные соединения, в основе молекулярной структуры которых лежит объемная ячейка из непосредственно связанных между собой атомов.

Образуются при:

а) ассоциации твердых аэрозолей в газе при их диффузном движении;

б) электролизе;

в) кристаллизация жидкости на подложке;

г) вытеснение жидкостью с меньшей плотностью жидкости с большей вязкостью (вода вытесняет нефть: «жидкие пальцы»);

д) течение в пористых средах.

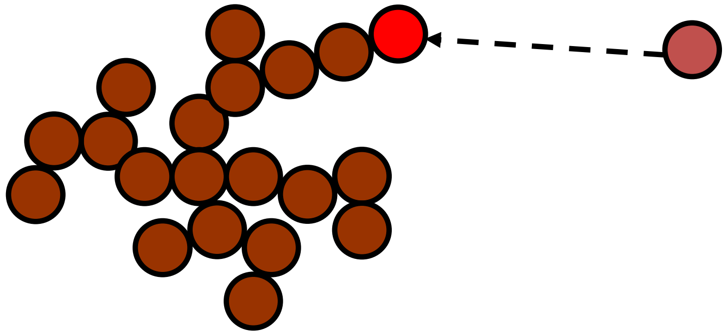
Дендриты (древоподобные фракталы): кристаллы, молния, трещины, разломы.

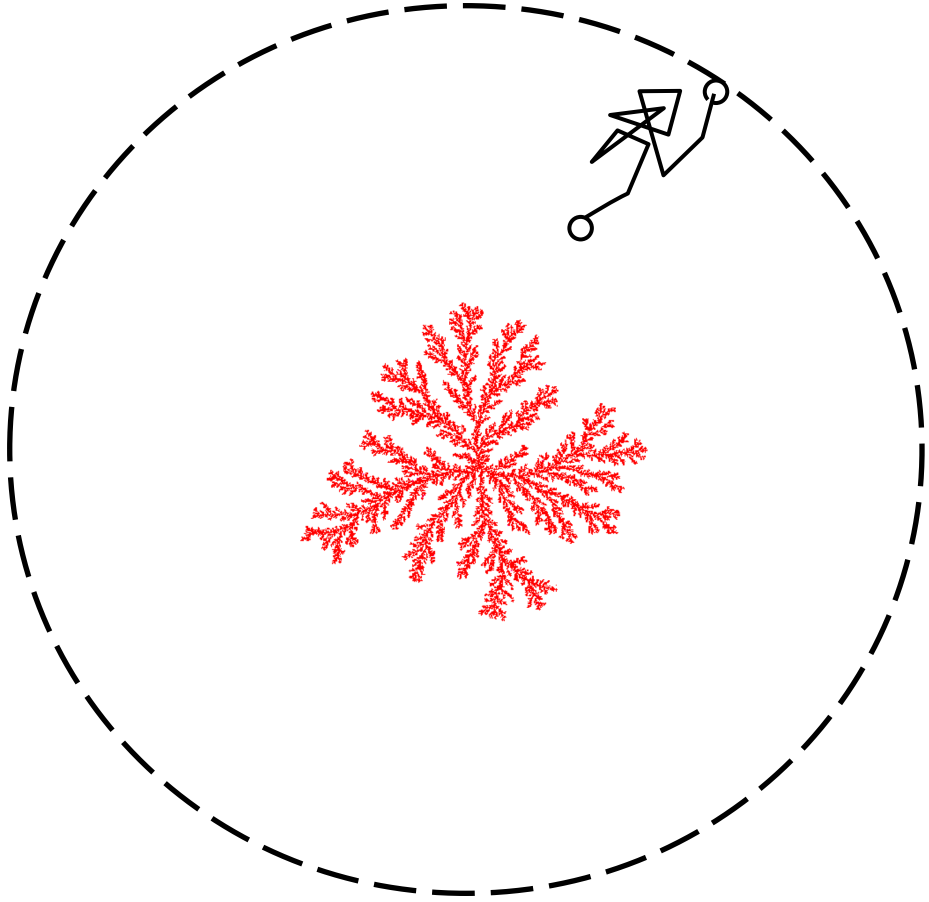
Одна из широко используемых моделей -модель ОДА - ограниченная диффузией агрегация: случайное движение молекул, которые могут слипаться, образуя кластер. Варианты:

а) случайная частица движется случайным образом с окружности круга, в центре которого расположена затравка, достигнув которой, частица сливается с ней. В результате получается «дендритный кристалл».

б) случайная частица движется случайным образом с верхней границы прямоугольника. При достижении боковых границ она упруго отражается, а при достижении нижней границы прилипает. В результате образуются «фрактальные водоросли».

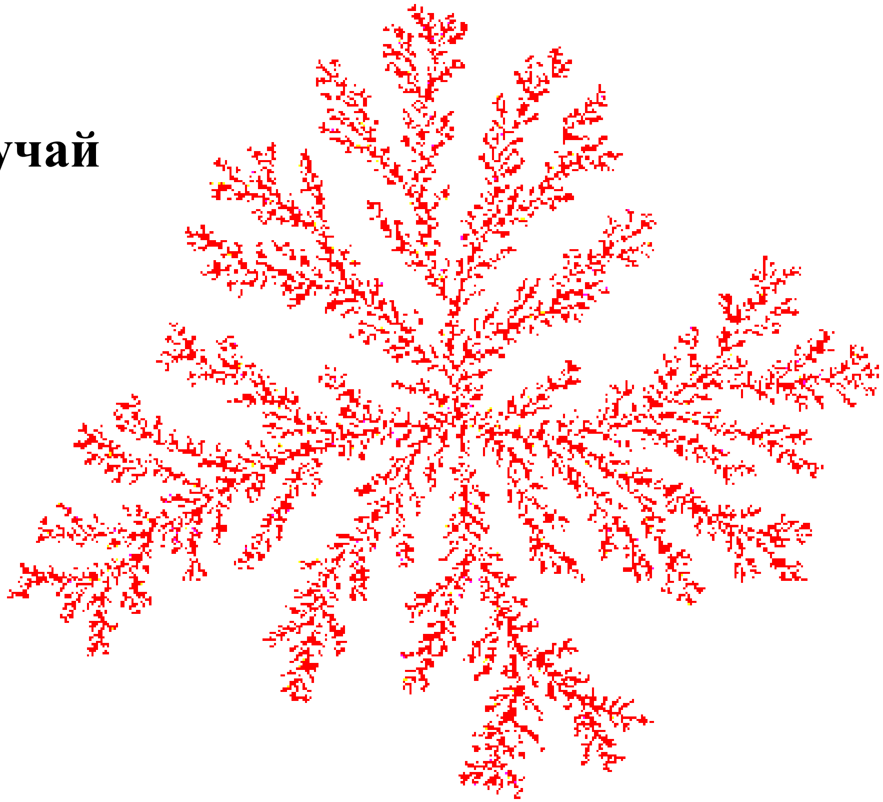
Агрегация:

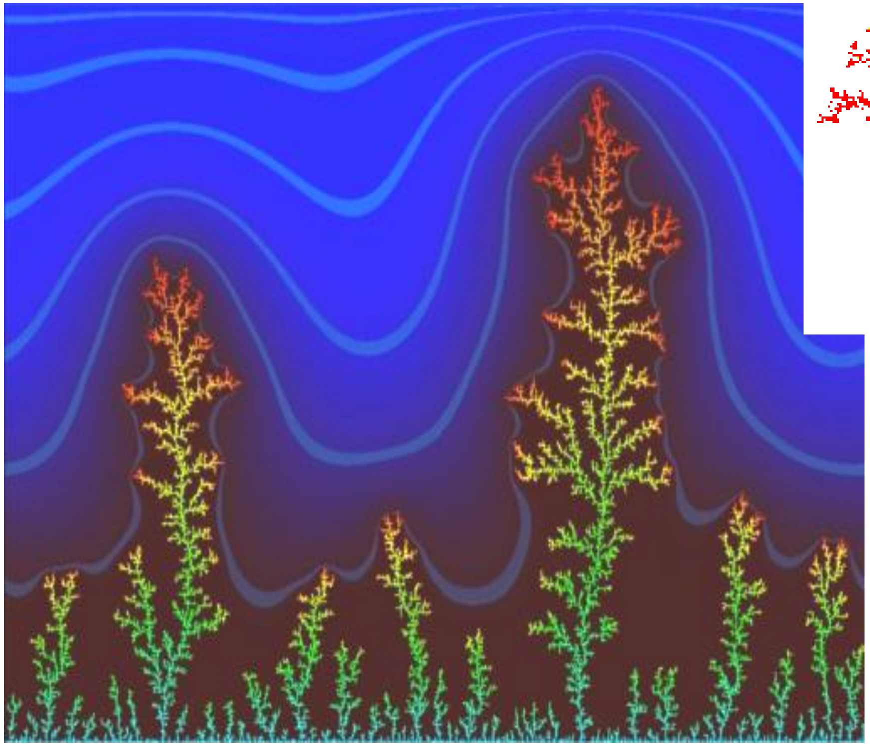




DLA – агрегация, протекающая в условиях случайного блуждания

Центрально симметричный случай

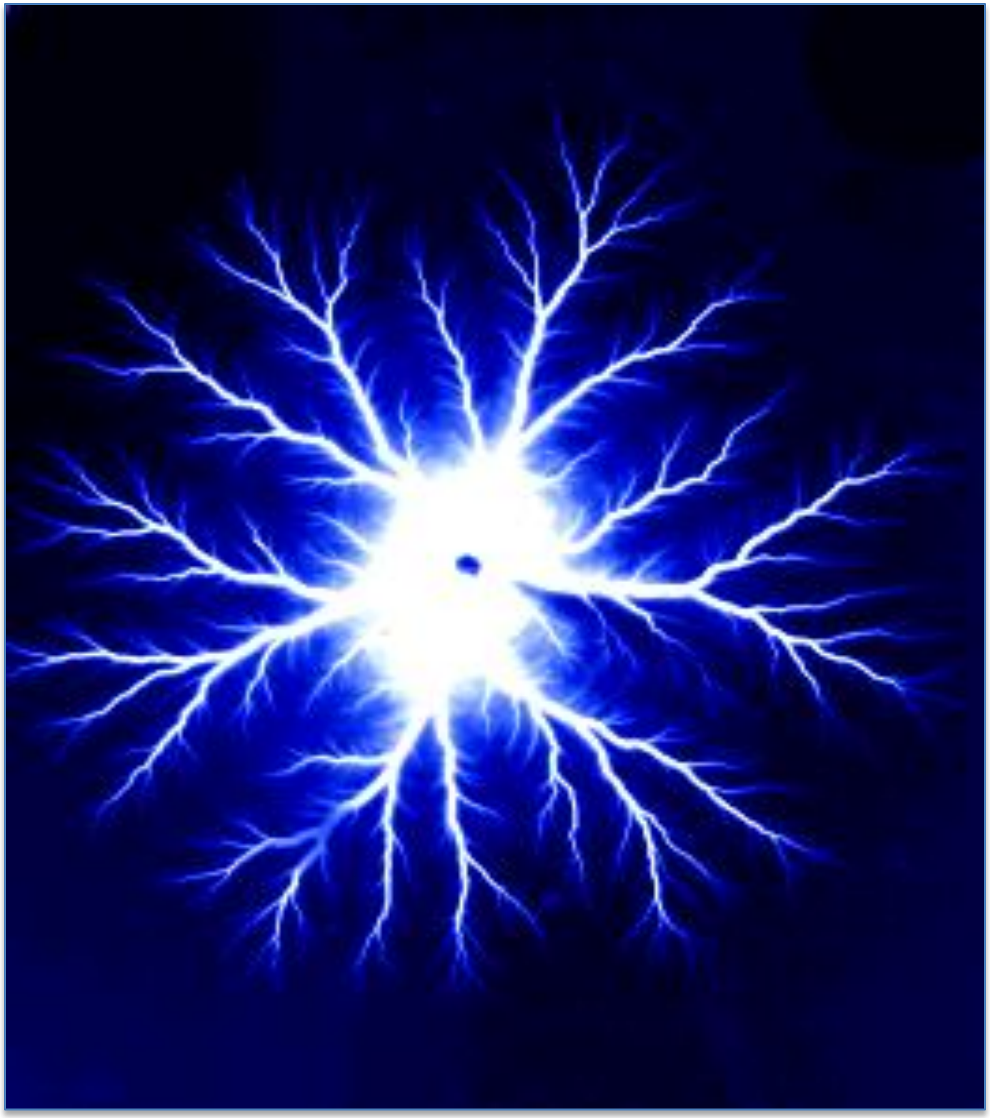




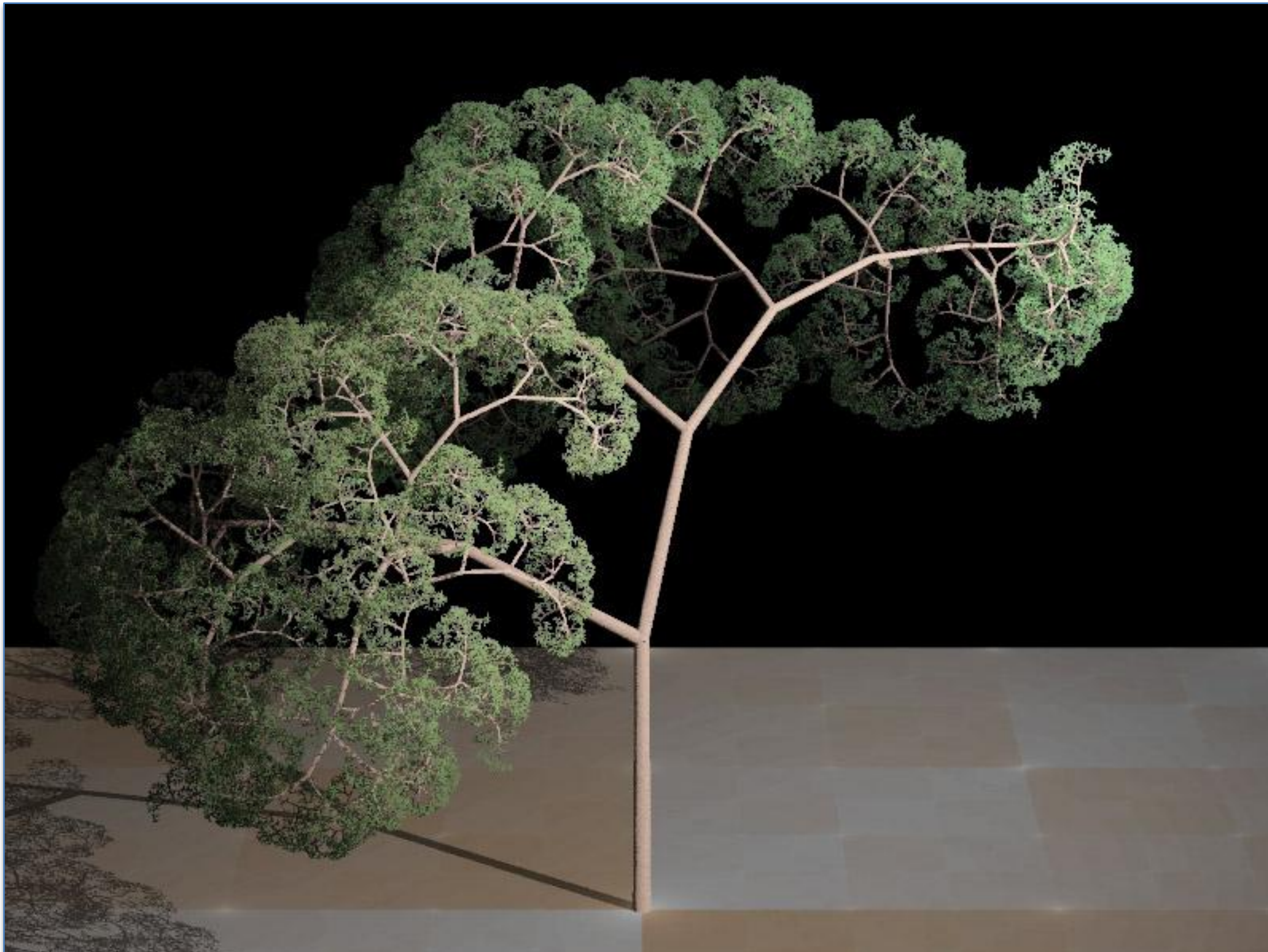
Прямоугольная ячейка

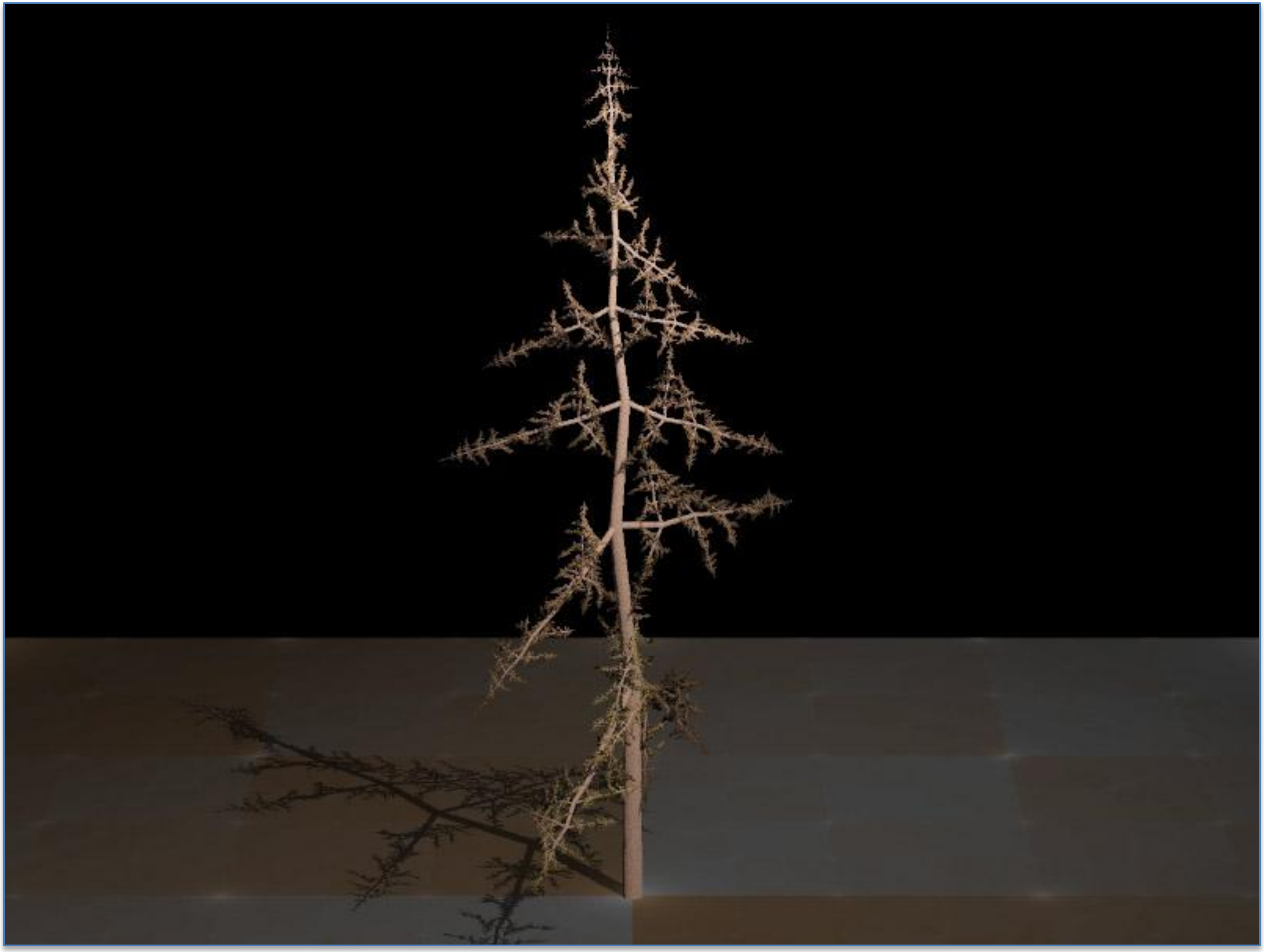
Пример разряда в 3D ячейке

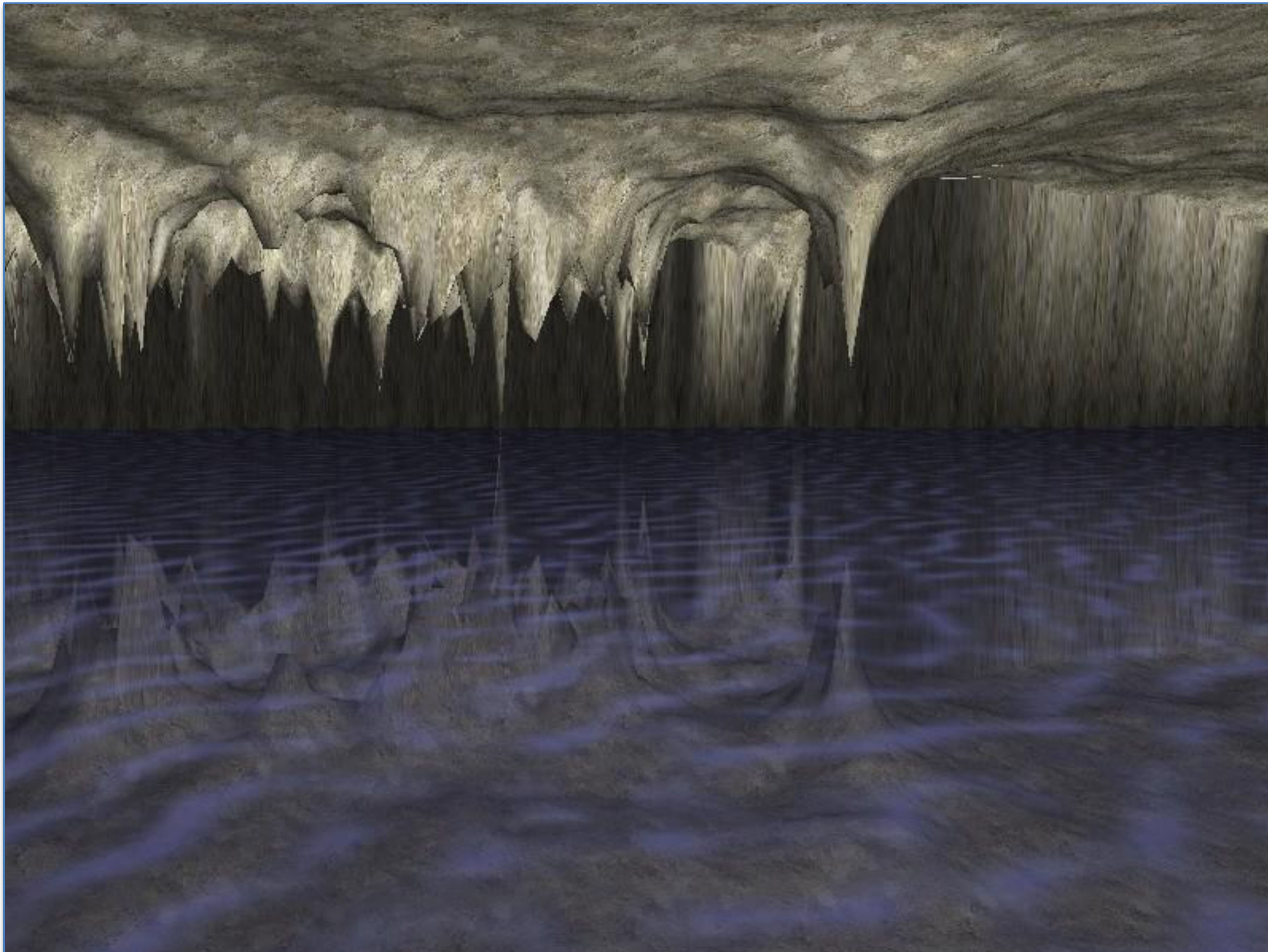
Природная молния

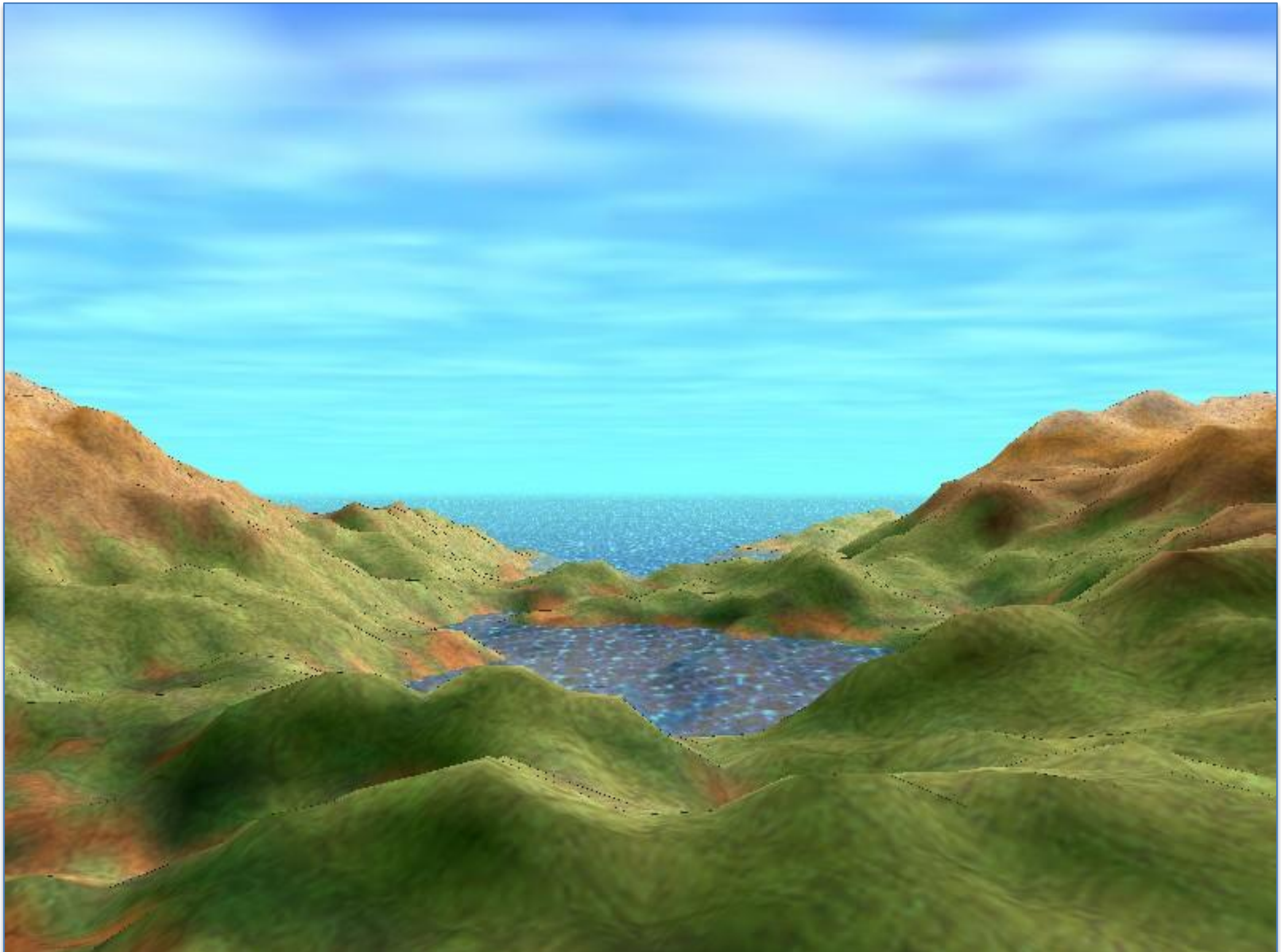


Фигура Лихтенберга







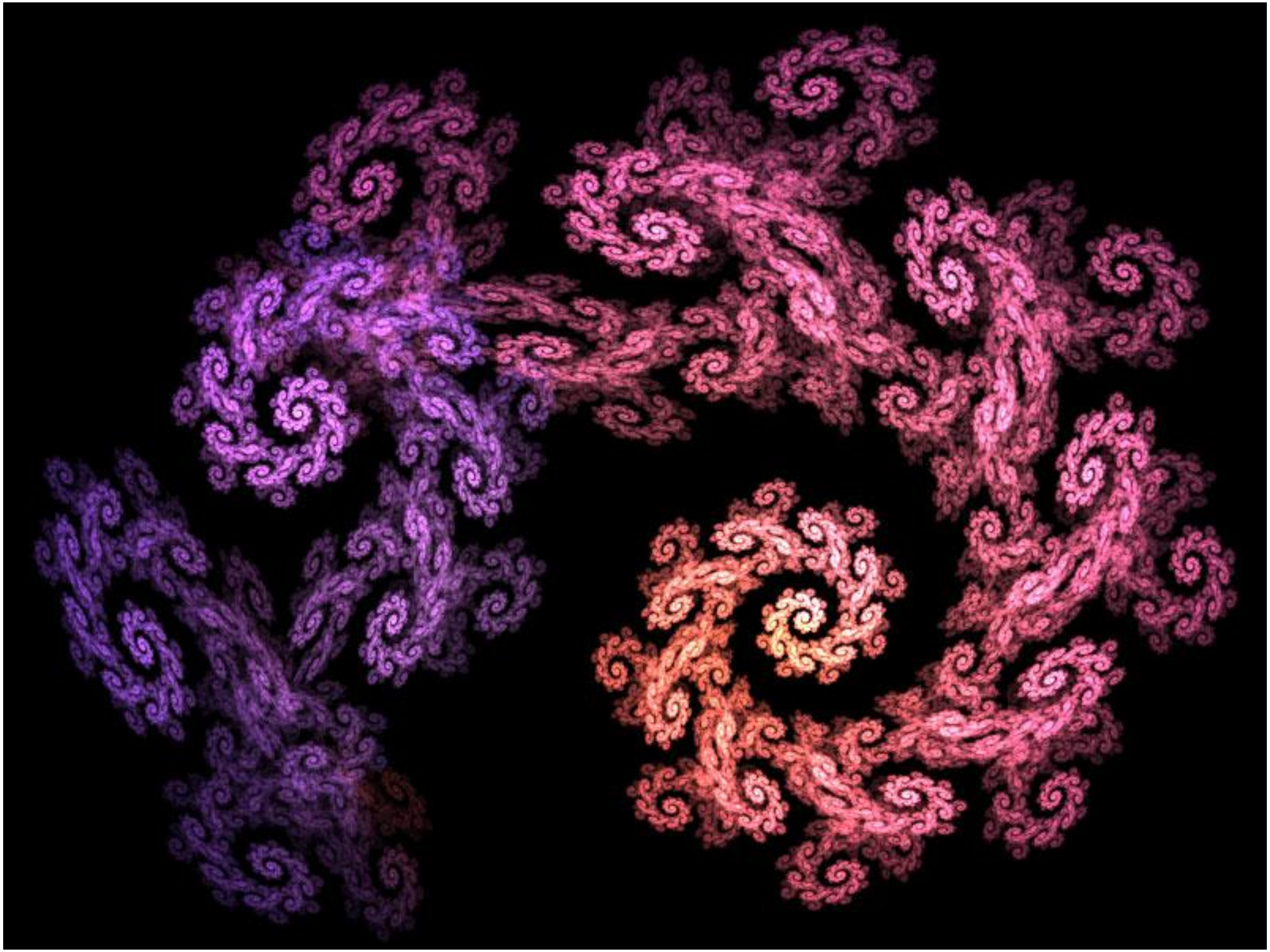


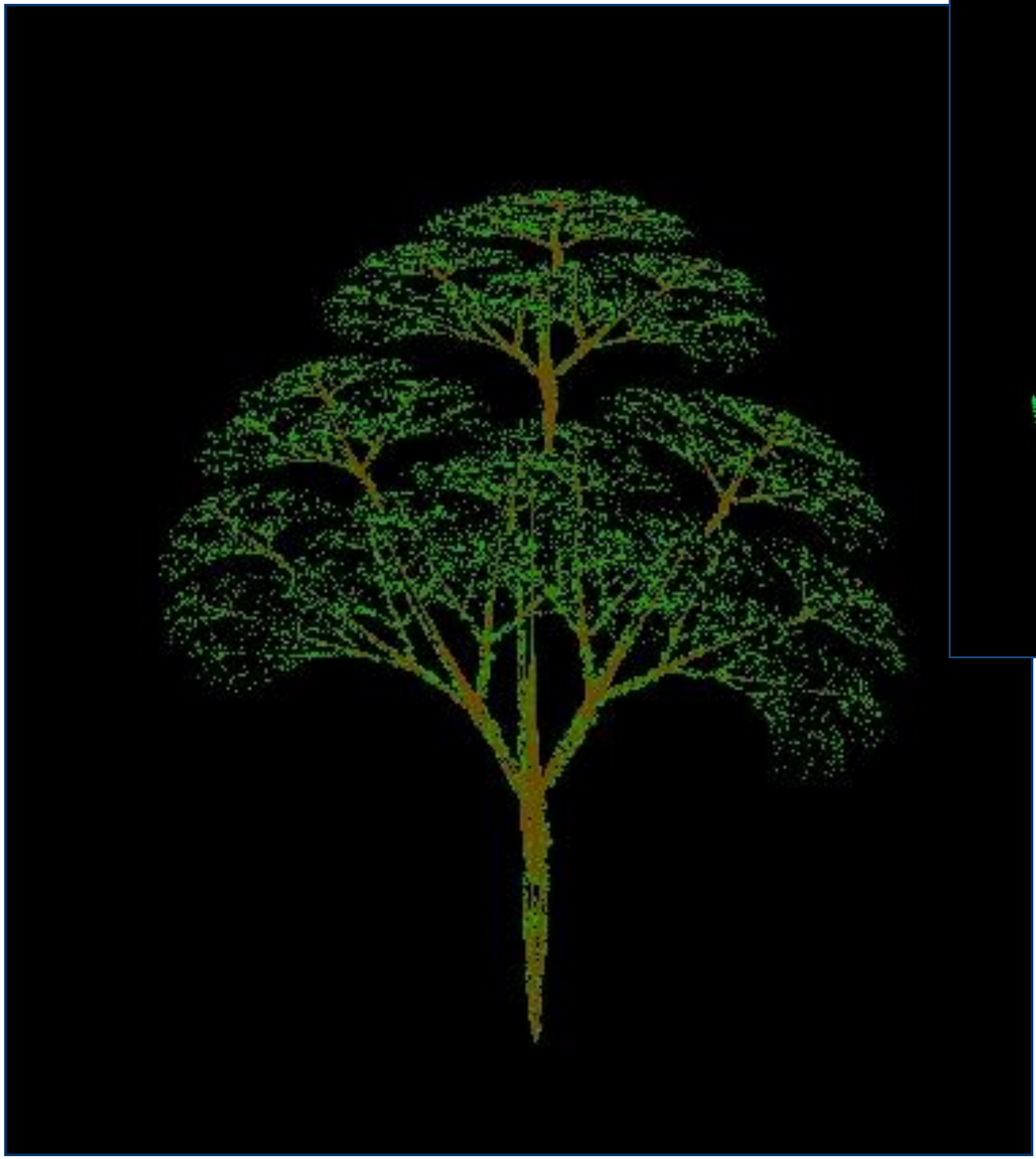
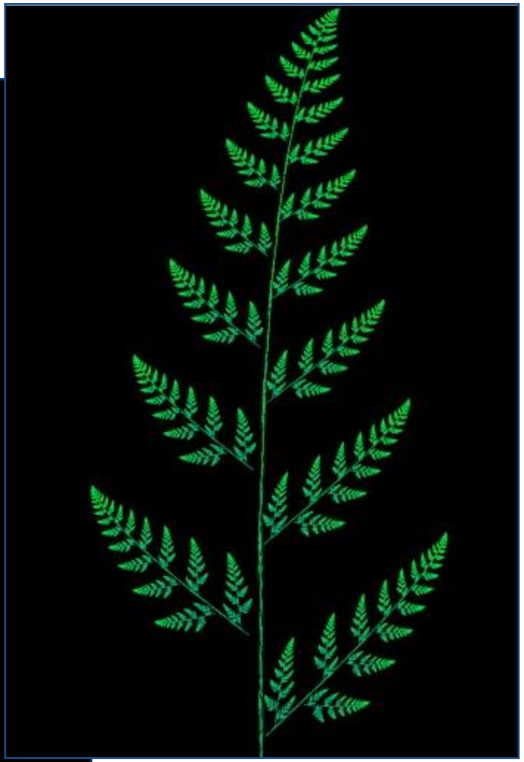
Применения фракталов.

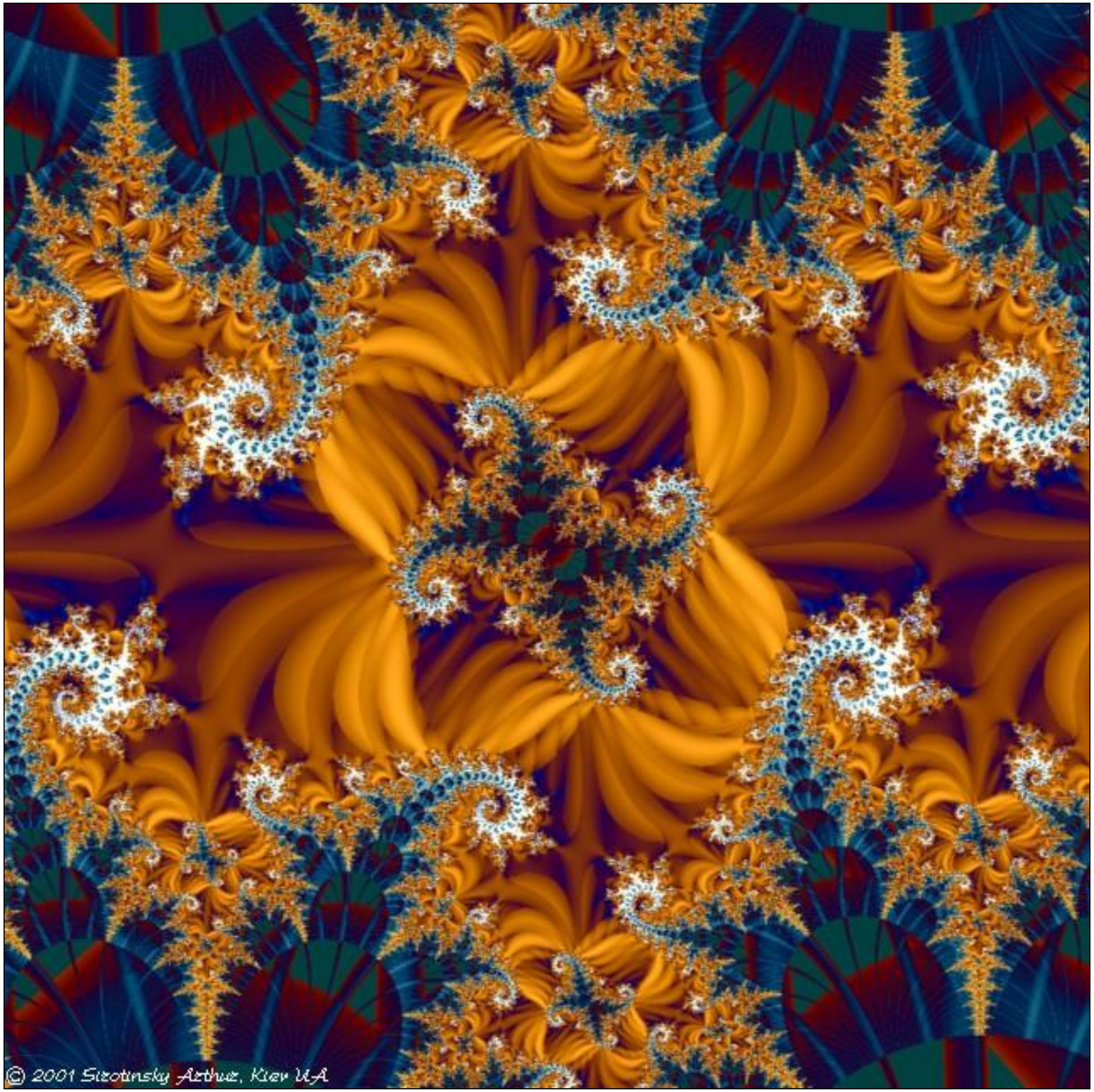
1. Теория турбулентных процессов (газодинамика, гидродинамика): связь с теорией масштабной инвариантности Колмогорова.
2. Вытеснение нефти водой в пористой среде и запирание нефти в водяных ловушках. Фронт вытеснения образует «вязкие пальцы», имеющие фрактальную структуру.
3. Исследование фазовых переходов: фрактальные границы раздела сред.
4. Исследование переходных процессов от упорядоченного состояния к хаосу, границы между которыми носят фрактальный характер.
5. Сжатие изображения: нахождение подобных областей и сохранение в файле только коэффициентов подобия.

6. **Задачи распознавания (радиолокация и т.д.).**
7. **Создание волноведущих систем с высокими эксплуатационными свойствами на основе фрактальных элементов.**
8. **Создание малогабаритных фрактальных антенн с высоким качеством диаграммы направленности.**
9. **Дифракция на фракталах: проектирование отражательных фазовых решеток с интенсивным рассеиванием фазовой энергии в широких частотных диапазонах.**
10. **Дифракция на фракталах: изучение агрегаций фрактальных кластеров частиц в коллоидах.**
11. **Дифракция на фракталах: изучение фрактального строения пористых структур.**

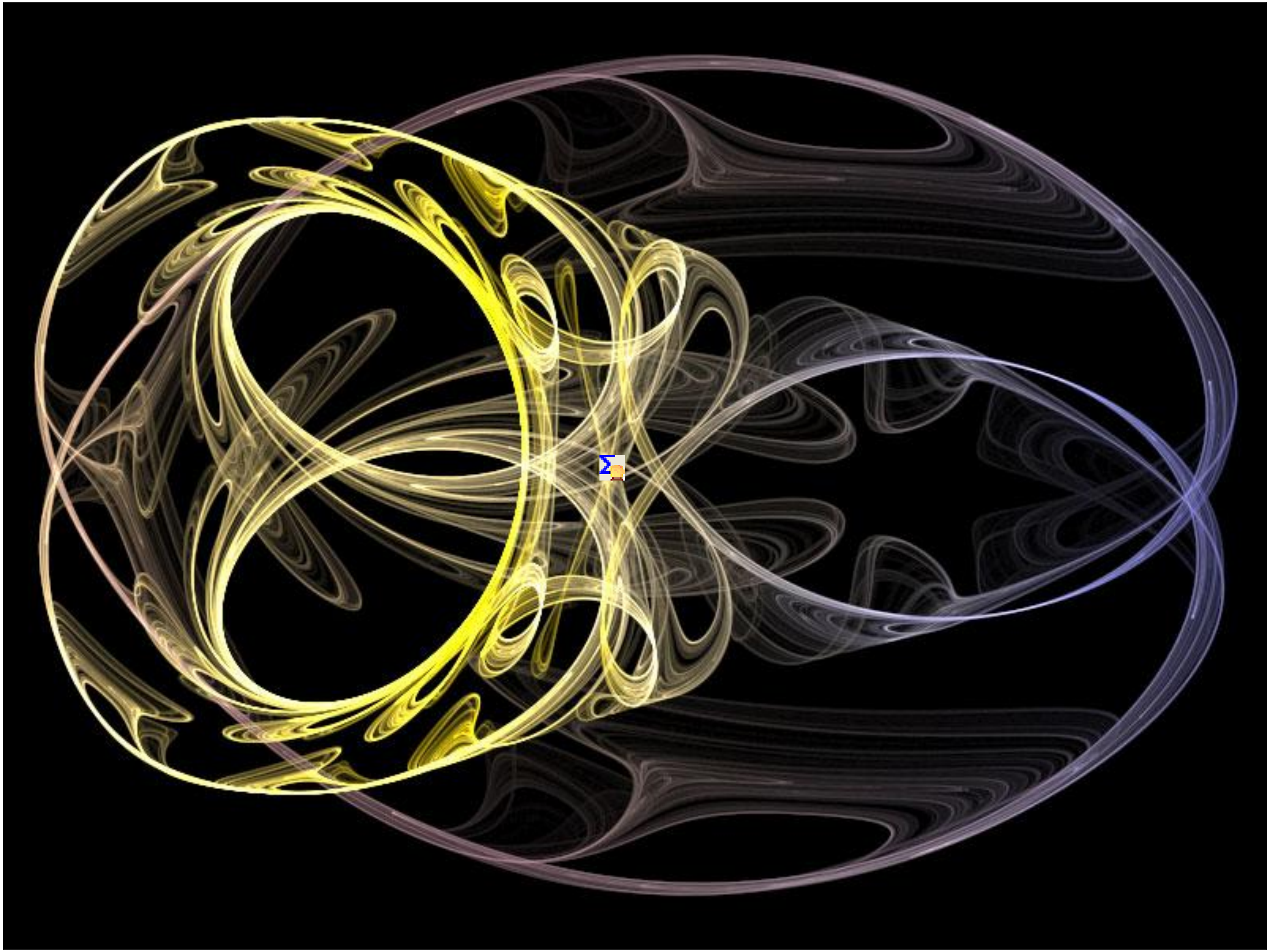
И, наконец, фракталы – это очень красивые математические объекты!

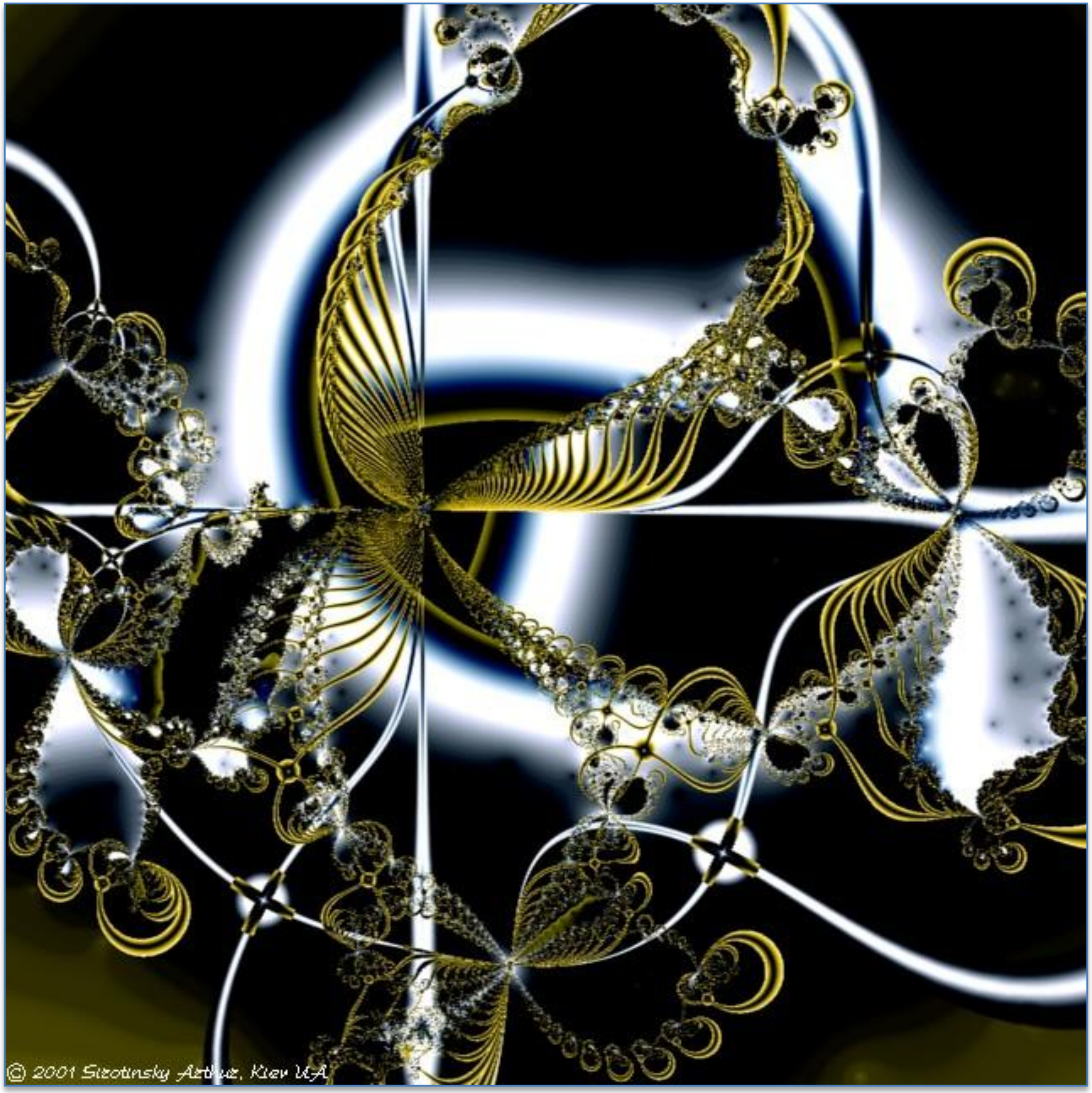


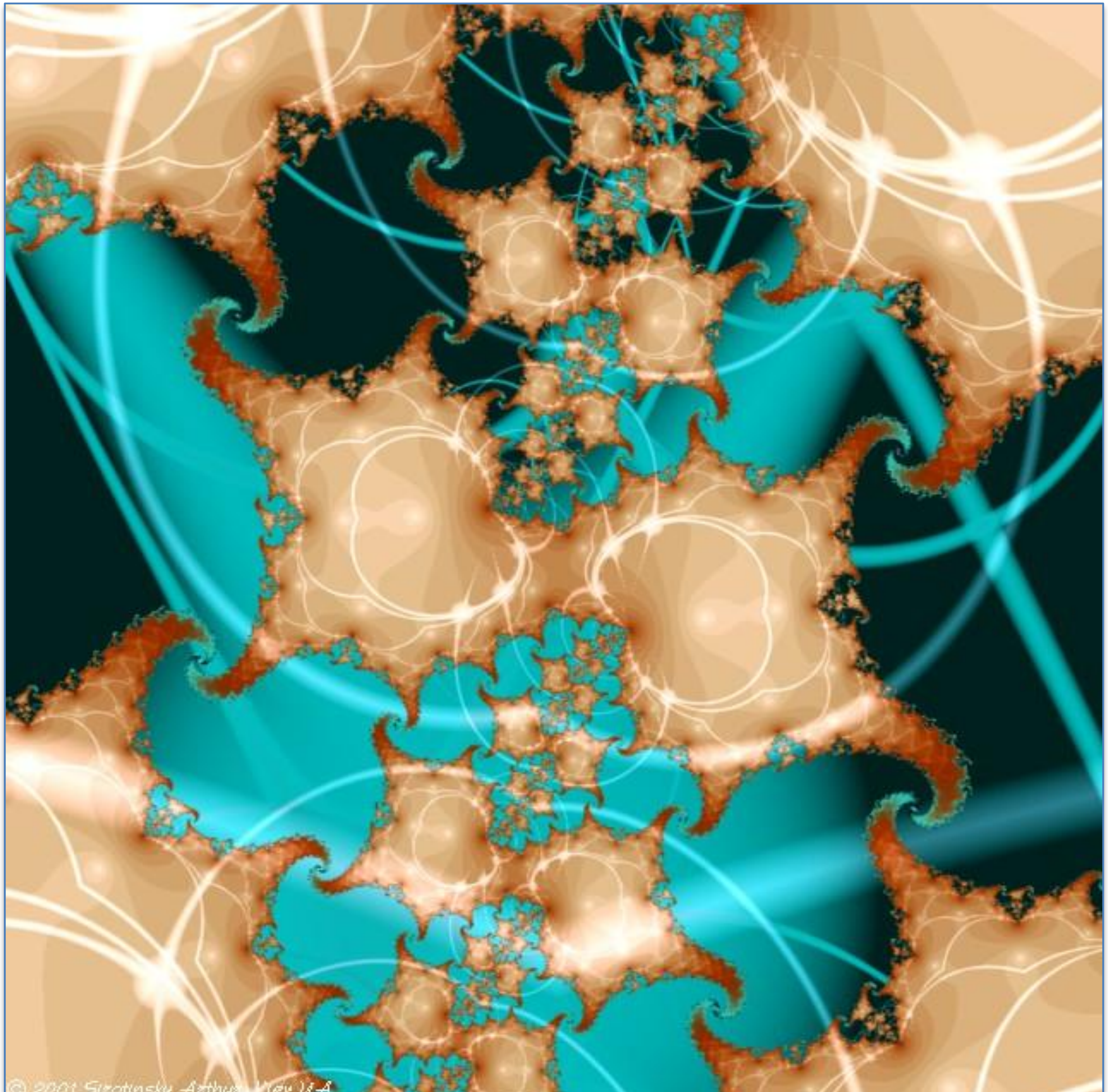



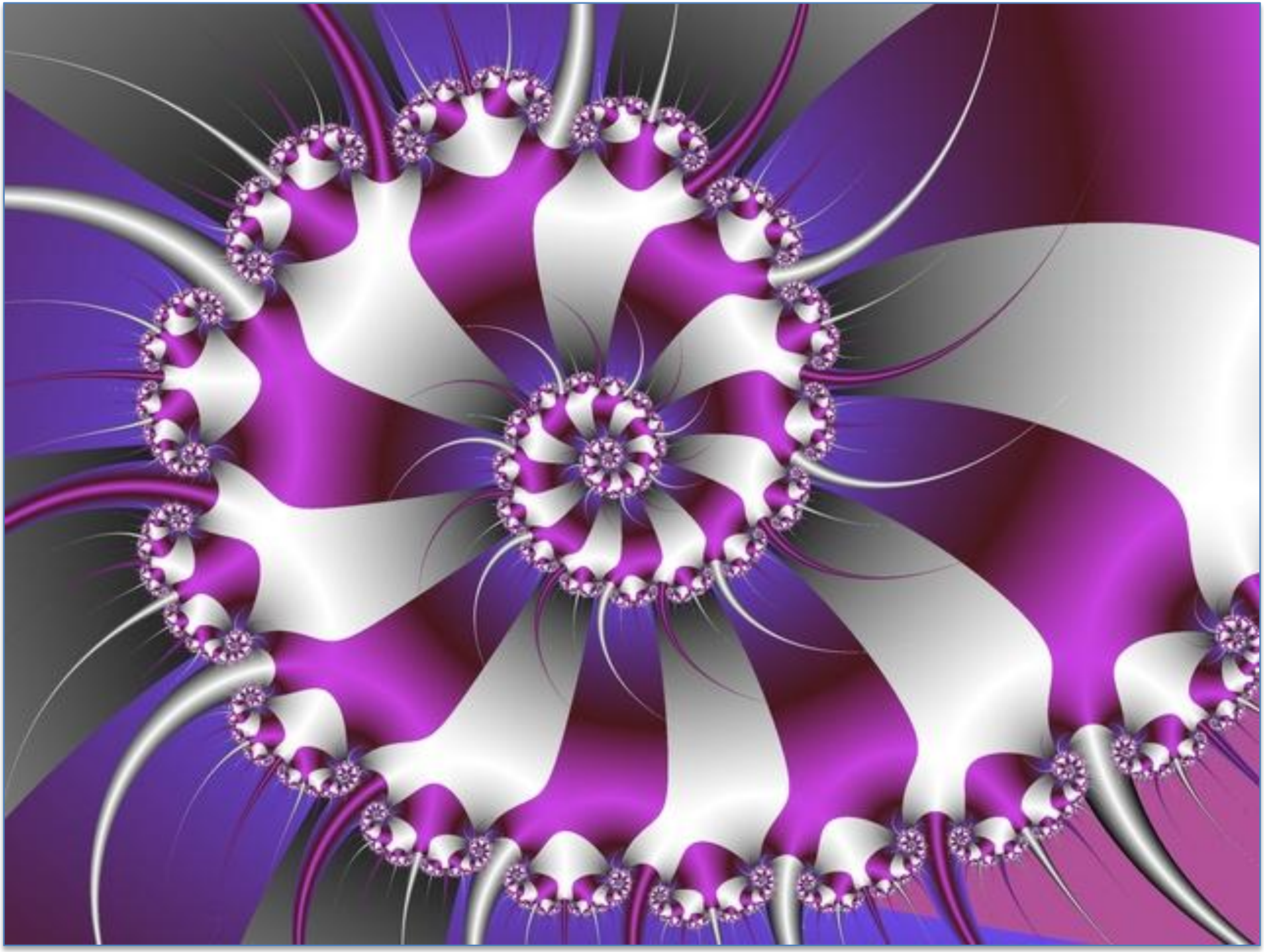

© 2001 Sirotinsky Arthur, Kiev UA

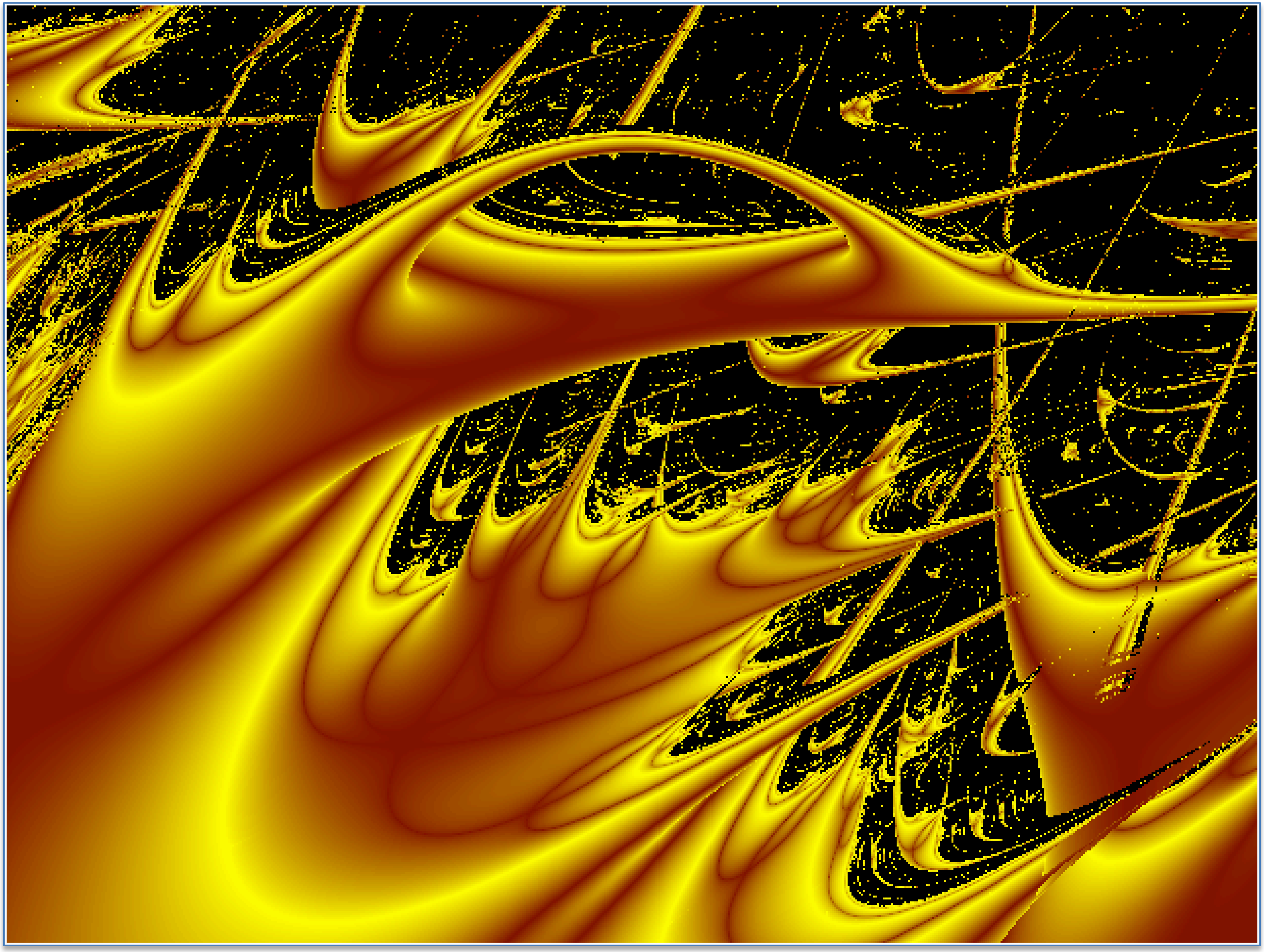

© 2001 Sizotinsky Azthuz, Kiev UA




© 2001 Sirotinsky Arthur, Kiev UA


© 2001 Sizotinsky Arthur



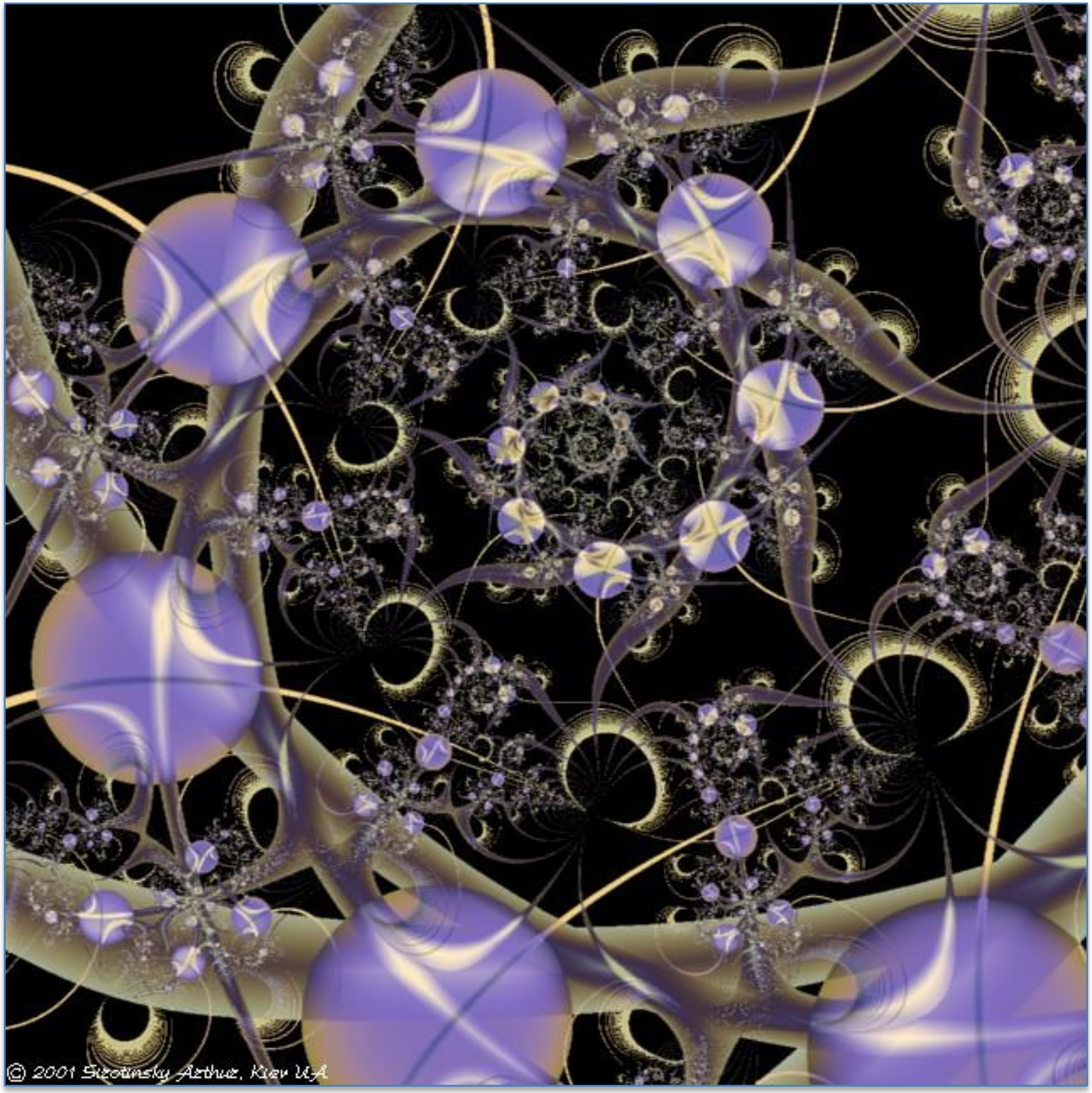



26th June 2001 Mitsutoshi Naruse


© 2001 Sirotinsky Arthur, Kiev


© 2001 Sirotinsky Arthur, Kiev UA


© 2001 Sizotinsky Arthur, Kiev UA


© 2001 Sizotinsky Arthur, Kiev UA