Глава 19. Ряды и интегралы Фурье

19.1 Тригонометрический ряд Фурье

Во многих областях науки и техники (важную роль играют периодические процессы). Такие процессы описываются периодическими функциями.

Определение. Функция $f(x)$, определённая на всей числовой прямой, называется периодической, если $\exists$ число $T>0$, такое, что $\forall x: f(x+T)=f(x)$. Число T наз-ся периодом функции $f(x)$.

Заметим, что если число T - период ф-ции, то числа $2T, 3T, \ldots$ - также периоды этой функции. Обычно под периодом функции понимают наименьший период.

Простейшие примеры периодических функций (известные ещё из школьного курса математики) - это $\sin x$ и $\cos x$. Их период (наименьший) равен 2π.

В математике и её приложениях важную роль играет последовательность периодических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

Она наз-ся тригонометрической системой. Любая линейная комбинация функций тригоном. системы, в том числе и бесконечная (т.е. ряд, если он сходится) является периодической функцией с периодом 2π.

Мы будем в дальнейшем рассматривать тригонометрическую систему на сегменте $[-\pi,\pi]$. Она обладает на этом сегменте свойством ортогональности, которое состоит в следующем: для любых двух функций тригон. системы интеграл от их произведения по сегменту $[-\pi,\pi]$ равен нулю.

Например, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = 0$ для любых натуральных чисел n и m (убедитесь в этом, вычислив интеграл).

Такое название — ортогональность тригонометрической системы — связано с тем, что в пространстве функций, заданных и интегрируемых на (сегменте) $[-\pi, \pi]$, можно ввести скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ по формуле

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx .$$

Если $(f, g) = 0$, то функции f и g называются ортогональными.

Пусть $f(x)$ — данная периодическая функция с периодом 2π. Один из основных вопросов, которым мы будем заниматься в этой главе, — это вопрос о представлении функции $f(x)$ в виде линейной комбинации функций тригонометрической системы. Будут установлены достаточные условия, при выполнении которых функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx , \qquad (19.1)$$

где a_i, b_i — числа. Они называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. [Выведем формулы для вычисления коэффициентов Фурье, считая, что равенство (19.1) имеет место, и ряд в правой части р-ва можно интегрировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Интегрируя от $-\pi$ до π, получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx}_{=0} = a_0 \cdot \pi ,$$

откуда находим a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx . \qquad (19.2_0)$$

Умножим теперь равенство (19.1) на $\cos kx$, (где k — произвольное натуральное число,) и снова проинтегрируем по сегменту $[-\pi, \pi]$. В силу ортогональности тригонометрической системы в правой части равенства остается только одно слагаемое:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx = a_k \cdot \pi.$$

Отсюда находим a_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (19.2_k).$$

Заметим, что при $k = 0$ формула (19.2_k) переходит в формулу (19.2_0).

Аналогично, умножая равенство (19.1) на $\sin kx$ и интегрируя по сегменту $[-\pi, \pi]$, приходим к равенству

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (19.3_k).$$

Итак, если функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье (19.1), то коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (19.2_k) и (19.3_k).

1.16

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а не на всей прямой) и интегрируема на этом сегменте. Тогда по полученным формулам можно вычислить числа a_k, b_k и составить ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Возникают вопросы: 1) при каких условиях этот ряд сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$? 2) будет ли его сумма равна $f(x)$? Ответы на эти вопросы будут даны в следующих параграфах.

Рассмотрим примеры вычисления коэф. в Фурье для конкретных функций.

1) $f(x) = x, \quad -\pi \le x \le \pi$.

По формулам (19.2_k) и (19.3_k) находим:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$, $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$ (интеграл от нечётной функции в симметричных пределах равен нулю);

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d(\cos nx) = -\frac{2}{\pi n}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$
$$= -\frac{2}{\pi n}\pi\cos\pi n = -\frac{2}{n}(-1)^n = 2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Итак, ряд Фурье для функции $f(x)=x$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ имеет вид

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx. \qquad (19.4)$$

Знак $\sim$ означает, что найденный ряд Фурье соответствует на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$, но пока мы не можем ответить на вопрос: сходится ли этот ряд к $f(x)=x$ на $[-\pi,\pi]$? То, что он сходится, доказать не трудно: $\forall x\in(-\pi,\pi)$ это можно сделать с помощью признака Дирихле – Абеля (сделайте это), а для $x=-\pi$ и для $x=\pi$ все члены ряда равны нулю, поэтому и сумма ряда равна нулю. Вопрос состоит в том, будет ли сумма ряда равна x? Очевидно, что для $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда не равна x. Позднее будет доказано, что $\forall x\in(-\pi,\pi)$ сумма ряда равна x (т.е. $\forall x\in(-\pi,\pi)$ знак $\sim$ можно заменить на знак $=$).

2) $f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi$.

Вычислим для этой функции коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi\,; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d\sin nx = \frac{2}{\pi n}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n = 2k-1,\ k=1,2,\dots \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases};$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx = 0$ (интеграл от нечётной функции в симметричных пределах).

Итак, на сегменте $[-\pi,\pi]$:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \qquad (19.5)$$

Найденный ряд сходится (равномерно на) сегменте $[-\pi, \pi]$ — это легко доказать с помощью признака Вейерштрасса (сделайте это). Но будет ли его сумма равна $|x|$? Позднее мы докажем, что знак $\sim$ можно заменить на знак равенства $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Замечание 1. При $x=0$ из равенства (19.5) получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

а из (19.4) при $x=\frac{\pi}{2}$ получается равенство

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Замечание 2. При $0 \leq x < \pi$ функция $f(x)=x$ раскладывается как в ряд (19.4). (по синусам), так и в ряд (19.5) (по косинусам).

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство периодических функций:

если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, то $\forall a$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

т.е. интеграл от периодической функции по любому сегменту длиной в период имеет одно и то же значение.

Чтобы это доказать, представим интеграл $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ в виде

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

и в последнем слагаемом сделаем замену переменной $x = t+T$. Тогда $\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt$ (поскольку $f(t+T)=f(t)$), и, следовательно, мы приходим к искомому равенству $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

19.2 Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции.

В теории тригонометрических рядов Фурье большую роль играют два класса функций: кусочно-непрерывные функции и кусочно-гладкие функции.

Напомним, что функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на сегменте $[a,b]$, если она определена и непрерывна во всех точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

В свою очередь, точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют левый и правый пределы этой функции в точке x_0 (они обозначаются $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$), но при этом $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

Кусочно-непрерывную на сегменте $[a,b]$ функцию $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой на этом сегменте, если её производная $f'(x)$ существует и непрерывна во всех точках сегмента $[a,b]$, за исключением, быть может конечного числа точек, а в этих точках (где $f'(x)$ не существует или разрывна) существуют левый и правый пределы $f'(x)$; т.е. существуют $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$.

Отметим, что левый и правый пределы $f'(x)$ в точке x_0 следует отличать от левой и правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 ($f'(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ — левый предел $f'(x)$ в точке x_0, $f'_{лев}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — левая производная функции $f(x)$ в точке x_0).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие введённые понятия.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Эта функция непрерывна и имеет производную в любой точке x, при этом

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В точке $x=0$ производная $f'(x)$ не является непрерывной – в этой точке не существуют левый и правый пределы $f'(x)$. Следовательно, согласно нашему определению, функция не является кусочно-гладкой на любом сегменте, содержащем точку $x=0$. Отметим попутно, что левая и правая производные функции $f(x)$ в точке $x=0$ существуют: $f'_{лев}(0) = f'_{пр}(0) = f'(0) = 0$.

2) $f(x) = \operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Эта функция имеет одну точку разрыва первого рода ($x=0$), в остальных точках она непрерывна и имеет непрерывную производную: $f'(x) = 0$ при $x \neq 0$. В точке $x=0$ существуют левый и правый пределы $f'(x)$, равные нулю. Следовательно, эта функция является кусочно-гладкой на любом сегменте, содержащем точку $x=0$. В точке $x=0$ функция не имеет ни левой, ни правой производной.

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Эта функция непрерывна во всех точках и имеет производную во всех точках, кроме точки $x=0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ непрерывна во всех точках, где она существует, в точке $x=0$ существует левый предел $f'(x)$, равный нулю, но не существует правый предел $f'(x)$:

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\infty$ (т.е. этот предел не существует). Следовательно, данная функция не является кусочно-гладкой на любом сегменте, у которого $x=0$ — внутренняя точка. Отметим, что в точке $x=0$ эта функция имеет левую производную ($f'_{лев}(0)=0$), но не имеет правой производной.

В 2011 г. леммы 1–3 без док-ва

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в правой полуокрестности точки x_0, и пусть в точке x_0 существует правый предел производной:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0). \qquad (19.6)$$

Тогда в точке x_0 существует правый предел самой функции: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, а также существует предел

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi} \qquad (19.7)$$

и он равен $f'(x_0+0)$.

Смысл этой леммы состоит в следующем: если доопределить $f(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0)=f(x_0+0)$, то предел (19.7) станет правой производной функции $f(x)$ в точке x_0, и тогда утверждение леммы можно сформулировать так: если в точке x_0 существует правый предел производной, то в этой точке существует правая производная функции, и они равны: $f'_{пр}(x_0)=f'(x_0+0)$.

Доказательство. Докажем сначала, что существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Так как существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, то найдётся такая правая полуокрестность точки x_0, в которой $f'(x)$ ограничена: $|f'(x)|\le A$, где A — некоторое число. Поэтому для любых x_1 и x_2 из этой полуокрестности будет выполнено неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|\cdot|x_2-x_1|\le A\cdot|x_2-x_1|$. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ (достаточно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$), такое, что если $|x_2-x_1|<\delta$, то $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$, а это означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0 справа. Следовательно, существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Положим $f(x_0) = f(x_0+0)$. Тогда функция $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0 справа, а поскольку она дифференцируема в правой полуокрестности точки x_0, то можно указать сегмент $[x_0, x_0+\xi]$ такой, что $f(x)$ непрерывна на этом сегменте и дифференцируема в интервале $(x_0, x_0+\xi)$ (рис. 19.1).

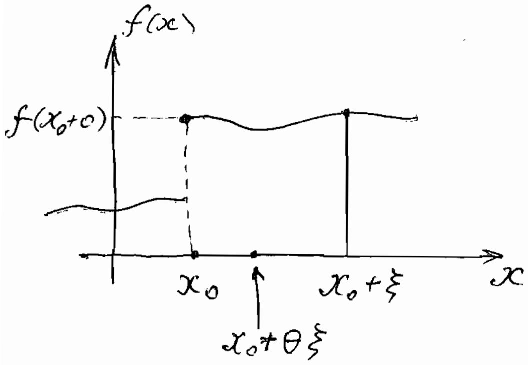


Рис. 19.1

По формуле Лагранжа

$$f(x_0+\xi) - f(x_0+0) = f'(x_0+\theta\xi)\cdot\xi,$$

где θ — некоторое число из интервала $(0<\theta<1)$. Используя это равенство и условие (19.6), получаем

$$\lim_{\xi\to+0}\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi} = \lim_{\xi\to+0} f'(x_0+\theta\xi) = f'(x_0+0),$$

что и требовалось доказать.
Аналогичная лемма имеет место в отношении левой производной функции.

Рассмотрим ещё два утверждения, связанные с кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими функциями.

Лемма 2 (об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists$ непрерывная кусочно-гладкая функция $l(x)$, такая, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)-l(x)|<\varepsilon$$

и, кроме того, $l(a)=f(a)$, $l(b)=f(b)$.

Доказательство. Так как $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$ (по теореме Кантора), то $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$, такое, что $\forall x'$ и x'' из сегмента $[a,b]$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,n$, такие, что $|x_i-x_{i-1}|<\delta$, и построим ломаную, состоящую из n звеньев, причём i-е звено ломаной соединяет точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$, $i=1,2,\dots,n$ (рис. 19.2).

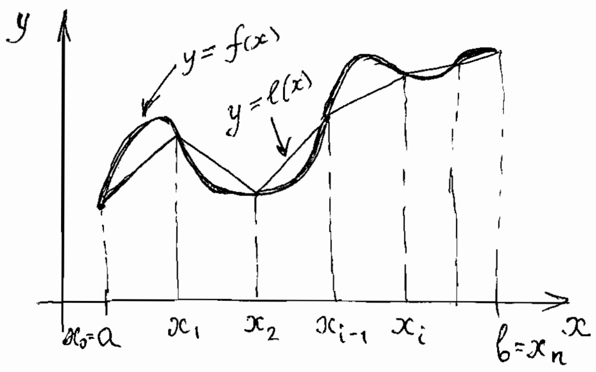


Рис. 19.2

Уравнение ломаной будем записывать в виде $y=\ell(x)$, $a\le x\le b$. Тогда $\ell(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$. Возьмём любое $x\in[a,b]$. Пусть $x\in[x_{i-1},x_i]$. Так как

$$|f(x)-\ell(x)| = |f(x)-f(x_i)+\ell(x_i)-\ell(x)| \le$$

$$\le |f(x)-f(x_i)| + |\ell(x_i)-\ell(x)|,$$

и так как $|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (поскольку $|x-x_i|<\delta$), и $|\ell(x_i)-\ell(x)|\le$ $\le|\ell(x_i)-\ell(x_{i-1})| = |f(x_i)-f(x_{i-1})|<\frac{\varepsilon}{2}$ (в силу неравенства $|x_i-x_{i-1}|<\delta$), то $|f(x)-\ell(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, причём это неравенство выполняется для любого $x\in[a,b]$.

Заметим также, что $\ell(a)=\ell(x_0)=f(x_0)=f(a)$ и $\ell(b)=f(b)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, то

$$J_1=\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0 \quad \text{при } \lambda\to\infty, \qquad (19.8_1)$$

$$J_2=\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0 \quad \text{при } \lambda\to\infty. \qquad (19.8_2).$$

Доказательство. 1) Докажем сначала, что (19.8_1) выполняется, если $f(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на сегменте $[a,b]$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ на конечное число (частичных) сегментов, на каждом из которых производная $f'(x)$ непрерывна. Это можно сделать, поскольку производная кусочно-гладкой функции $f(x)$ имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода. Пусть число таких (частичных) сегментов равно n, и пусть $[a_i, b_i]$ — один из этих сегментов. В граничных точках a_i и b_i производная $f'(x)$ равна соответствующим предельным значениям: $f'(a_i) = f'(a_i+0)$, $f'(b_i) = f'(b_i-0)$ (рис. 19.3).

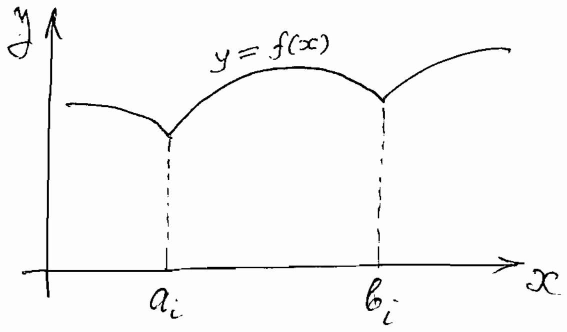


Рис. 19.3

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda} f(x)\sin\lambda x\Big|_{a_i}^{b_i} - \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i} f'(x)\sin\lambda x\,dx,$$

откуда следует неравенство

$$\left|\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\Big(|f(b_i)| + |f(a_i)|\Big) + \frac{1}{\lambda}\int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\,dx = \frac{M_i}{\lambda},$$

где $M_i = |f(b_i)| + |f(a_i)| + \int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\,dx$ — некоторое число.

Следовательно,

$$|J_1(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Правая часть в полученном неравенстве стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. Поэтому и $J_1(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$.

Таким образом, справедливость (19.8_1) для непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$ доказана.

2) Пусть теперь $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция на сегменте $[a,b]$. Разобьем сегмент $[a,b]$ на конечное число (частичных) сегментов $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна. Пусть $[a_i, b_i]$ — один из этих частичных сегментов.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2, существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$, такая, что $\forall x \in [a_i, b_i]$ выполнено неравенство

$|f(x) - \ell(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b_i - a_i)}$. Представим интеграл $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx$

в виде суммы $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{a_i}^{b_i} [f(x) - \ell(x)]\cos\lambda x\,dx, \quad I_2 = \int\limits_{a_i}^{b_i} \ell(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Для интеграла I_1 имеем оценку:

$$|I_1| \le \left|\int\limits_{a_i}^{b_i} |f(x) - \ell(x)|\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{т.к. } |f(x) - \ell(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b_i - a_i)}\right),$$

а поскольку $\ell(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция, то, согласно доказанному в п. 1), $I_2 \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ $\exists \lambda_0$, такое, что если $\lambda > \lambda_0$, то $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda_0$, такое, что если $\lambda > \lambda_0$, то

$$\left|\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\right| \le |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0$ при $\lambda \to \infty$, и поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что (19.8_2) также выполняется. Лемма 3 доказана.

Она (и также лемма 1) понадобится нам в следующем параграфе.

19.3 Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

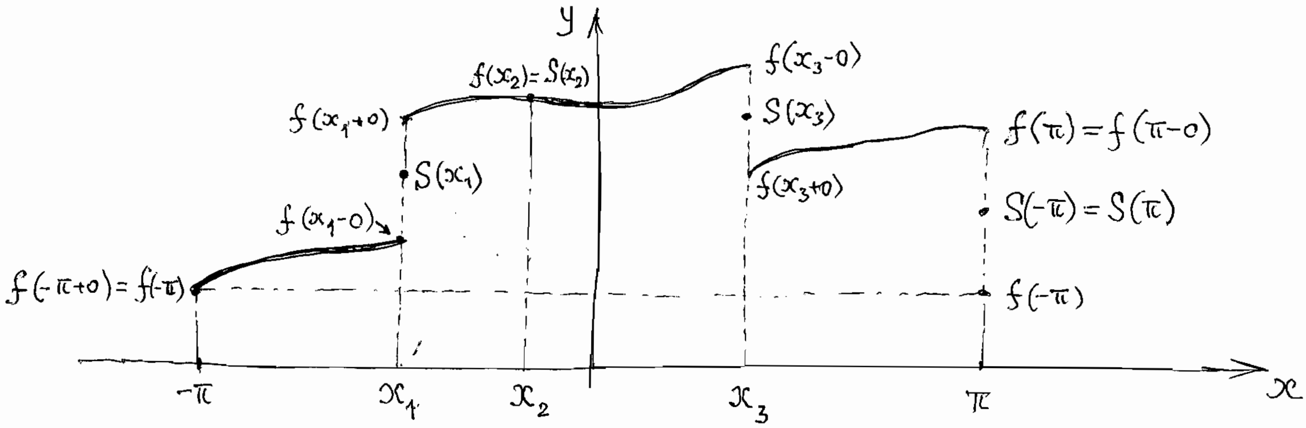
коэффициенты которого определяются формулами (19.2_k) и (19.3_k), сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$, и для его суммы $S(x)$ справедливы равенства

$$(1)\ \forall x \in (-\pi, \pi):\ S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big); \qquad (19.9)$$

в частности, $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$;

$$(2)\ S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big).$$

Рисунок 19.4, на котором изображён график функции $y = f(x)$, даёт наглядное представление о сумме ряда Фурье этой функции.



Доказательство. Продолжим функцию $f(x)$ на всю числовую прямую периодически с периодом 2π и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье в произвольной точке $x \in [-\pi, \pi]$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Для доказательства справедливости равенства (19.9)

нужно доказать, что $S_n(x) \to \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ при $n\to\infty$.
Используя формулы для коэффициентов Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,$$

преобразуем выражение для $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx\right]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] f(t)\,dt := \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt,$$

где

$$D_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right]. \qquad (19.10)$$

Функция $D_n(\xi)$ называется <u>ядром Дирихле порядка n.</u>
Сделав в интеграле замену переменной $t = x+\xi$, получим:

$$S_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi.$$

Так как $D_n(\xi)$ и $f(x+\xi)$ — периодические функции аргумента ξ с периодом 2π, то, согласно утверждению, доказанному в конце § 19.1, пределы интегрирования можно заменить на $-\pi$ и π:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi.$$

Разобьём это выражение на сумму двух слагаемых:

$$S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x),$$

где

$$S_n^-(x) = \int_{-\pi}^{0} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi, \quad S_n^+(x) = \int_{0}^{\pi} D_n(\xi) f(x+\xi)\,d\xi. \qquad (19.11)$$

Вычислив интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi$ (он равен $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\xi\right]d\xi = 1$) и учитывая, что $D_n(\xi)$ — чётная функция, приходим к равенствам

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}.$$

Умножив второе из этих равенств на $f(x+0)$ и вычтя из второго равенства (19.11), получим:

1.17
$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) = \int_0^{\pi} \left[f(x+\xi) - f(x+0) \right] D_n(\xi)\, d\xi . \quad (19.12)$$

Преобразуем выражение (19.10) для $D_n(\xi)$. С этой целью умножим равенство (19.10) на $\sin\frac{\xi}{2}$ и воспользуемся формулой $\sin\frac{\xi}{2}\cdot\cos k\xi = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k\xi+\frac{\xi}{2}\right) - \sin\left(k\xi-\frac{\xi}{2}\right)\right]$. Используя эту формулу, получаем:

$$D_n(\xi)\sin\frac{\xi}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\xi}{2} - \sin\frac{3\xi}{2}\right) + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi - \sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\xi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi .$$

Следовательно,

$$D_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\sin \xi/2} \quad \text{при } \xi \neq 0,$$

а при $\xi = 0$ из (19.10) имеем: $D_n(0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+n\right) = \lim\limits_{\xi\to 0} D_n(\xi)$.

Подставляя полученное выражение для $D_n(\xi)$ в (19.12), приходим к равенствам

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+\xi) - f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2\sin \xi/2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\cdot\frac{\xi/2}{\sin \xi/2}\right\}\cdot \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\xi\, d\xi := J(x,n).$$

Функция, стоящая в фигурных скобках под знаком интеграла, является, очевидно, кусочно-гладкой на полусегменте $(0<\xi\le\frac{\pi}{2}]$, а поскольку предел $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ существует (и равен $f'(x+0)$ в силу леммы 1) и также существует $\lim\limits_{\xi\to+0}\frac{\xi/2}{\sin\xi/2} = 1$ (первый замечательный предел), то заключенная в фигурные скобки функция является кусочно-непрерывной на сегменте $[0\le\xi\le\frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, согласно лемме 3, $J(x,n) \to 0$ при $n \to \infty$ (роль параметра λ играет здесь $n+\frac{1}{2}$).
Итак,

$$S_n^+(x) - \frac{1}{2} f(x+0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В точности также доказывается, что $S_n^-(x) - \frac{1}{2} f(x-0) \to 0$ при $n \to \infty$, а так как $S_n(x) = S_n^-(x) + S_n^+(x)$, то

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т.е. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$.

Тем самым доказана справедливость равенства (17.9).
В частности, если x - точка непрерывности $f(x)$, то $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ и $S(x) = f(x)$.

Для точек $x = -\pi$ и $x = \pi$, учитывая периодическое продолжение функции $f(x)$, имеем:

$$f(-\pi+0) = f(\pi+0), \quad f(-\pi-0) = f(\pi-0),$$

поэтому

$$S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi-0) + f(-\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right),$$

$$S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0) + f(\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right).$$

Теорема 1 доказана.

Замечания.

1. Теорема 1 показывает, что кусочная гладкость функции (на сегменте $[-\pi,\pi]$) является достаточным условием сходимости ряда Фурье в каждой точке этого сегмента. Является ли это условие необходимым? Оказывается, что нет, это условие может быть ослаблено.

Однако, одной ~~лишь~~ кусочной непрерывности и даже непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ не достаточно для сходимости ряда . . .

Фурье в каждой точке этого сегмента. Ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на бесконечном множестве точек (всюду плотном на сегменте $[-\pi, \pi]$).

Более подробная информация об условиях сходимости ряда Фурье имеется в [Ильин Позняк]. Там же можно прочитать о принципе локализации для рядов Фурье. Суть его состоит в том, что сходимость или расходимость в данной точке x_0 тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ определяется лишь поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки x_0 и не зависит от того, какова эта функция вне сколь угодно малой окрестности точки x_0. Это свойство представляется удивительным, поскольку коэффициенты Фурье выражаются через интегралы от $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ по всему сегменту $[-\pi, \pi]$.

2. Мы доказали, что тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции сходится в каждой точке этого сегмента. Но поскольку члены ряда Фурье — периодические функции с периодом 2π, то этот ряд сходится в любой точке числовой прямой. Его суммой на всей прямой является периодическое продолжение (на всю прямую) функции $S(x)$ — суммы ряда на сегменте $[-\pi, \pi]$.

3. Если (кусочно-гладкая) функция $f(x)$ имеет точки разрыва на сегменте $[-\pi, \pi]$ и также если $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то ряд Фурье (этой) функции сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ неравномерно.

4. Если $f(x)$ — нечётная функция на сегменте $[-\pi,\pi]$, то её разложение в ряд Фурье содержит только синусы, а если — чётная функция, то — только косинусы.

Если $f(x)$ задана на сегменте $[0,\pi]$, то её можно продолжить на сегмент $[-\pi,0]$ как чётным, так и нечётным образом, и в результате получатся два разложения $f(x)$ на сегменте $[0,\pi]$ — одно по косинусам, а другое — по синусам. Мы уже встречались с такой ситуацией (см. формулы (19.4) и (19.5) в § 19.1):

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad 0 \le x < \pi$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Отметим, что первый из этих рядов сходится неравномерно на полусегменте $[0,\pi)$, а второй ряд сходится равномерно на сегменте $[0,\pi]$ (это легко доказать с помощью признака Вейерштрасса: $\left|\dfrac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}\right| \le \dfrac{1}{(2n-1)^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ сходится).

5. Мы рассмотрели вопрос о разложении в ряд Фурье функций, заданных на сегменте $[-\pi,\pi]$. В некоторых случаях приходится рассматривать функции, заданные на сегменте $[-l,l]$, где l — какое-то число, и их периодические продолжения с периодом $2l$. Ортогональную тригонометрическую систему на сегменте $[-l,l]$ образуют функции

$$1,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l},\quad n = 1, 2, \dots .$$

При $l=\pi$ эта система функций совпадает с рассмотренной ранее тригонометрической системой.

Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе функций имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{l}+b_n\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\ldots .$$

19.4 Комплексная форма ряда Фурье

Используя выражения для коэффициентов (тригонометрического) ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-\pi,\pi]$, запишем ряд Фурье этой функции следующим образом:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt.$$

Так как $\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)$, где i - мнимая единица, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[e^{in(t-x)}+e^{-in(t-x)}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt\right)e^{-inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx}.$$

Введём обозначения:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,dt, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt, \quad n=1,2,\dots$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$ можно записать в (комплексной) форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (19.13)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Представление функции $f(x)$ в виде (19.13) является разложением $f(x)$ по системе функций $\{e^{inx},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$. Отметим, что эта система функций — ортогональная на сегменте $[-\pi,\pi]$, если скалярное произведение комплексно-значных функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ определить так: $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)\,dx$, где $\bar{g}(x)$ — комплексно сопряжённая функция по отношению к $g(x)$. В таком случае

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n\neq m, \\ 2\pi, & \text{если } n=m, \end{cases}$$

т.е. при $n\neq m$ функции e^{inx} и e^{imx} ортогональны.

19.5 Понятие общего ряда Фурье

Понятие общего ряда Фурье связано с разложением элементов бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе элементов.

Напомним, что линейное пространство называется бесконечномерным, если в нём имеется любое (как угодно большое) число линейно независимых элементов; линейное пространство называется евклидовым, если в нём введено скалярное произведение элементов. Скалярное произведение элементов f и g будем обозначать так: (f, g).

Пример. Рассмотрим множество всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций, таких, что значение любой функции $f(x)$ в точке x_0 разрыва равно $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$. Это множество становится линейным пространством, если ввести обычным образом операции сложения двух функций и умножения функции на вещественное число. Это линейное пространство — бесконечномерное ($\forall n$ функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ — линейно независимы).

Скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ введём по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Нетрудно проверить, что все требования, предъявляемые к скалярному произведению, при этом выполнены.

Описанное бесконечномерное евклидово пространство обозначим $Q[a, b]$.

Напомним понятие нормированного пространства.

Линейное пространство называется *нормированным*, если каждому элементу f этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число (оно называется *нормой* элемента f и обозначается $\|f\|$) так, что при этом выполнены условия:

1) $\|f\| > 0$, если $f \neq \Theta$ (Θ — нулевой элемент пространства),
   $\|f\| = 0$, если $f = \Theta$;

2) $\forall$ элемента f и $\forall$ числа α : $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\forall$ элементов f и g : $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$
   (это неравенство называется *неравенством треугольника* или *неравенством Минковского*).

Отметим, что в любом нормированном пространстве можно ввести *расстояние между элементами* (или, как говорят, ввести *метрику*) посредством формулы

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

В результате нормированное пространство станет метрическим.

Во всяком евклидовом пространстве можно ввести норму элементов с помощью скалярного произведения:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Задание. Проверьте, что все условия из определения нормы будут выполнены.

Пример. В пространстве $Q[a, b]$ введённая таким образом норма элемента $f(x)$ имеет вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Пусть $\{f_n\}$ $(= f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ — последовательность элементов нормированного пространства.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\| f_n - f \| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

(другими словами, если числовая последовательность $\{\| f_n - f \|\}$ является бесконечно малой).

Норма разности элементов f_n и f называется также отклонением элемента f_n от элемента f по норме данного пространства.

Пример. Сходимость последовательности (функций) $\{f_n(x)\}$ ~~функций~~ к функции $f(x)$ по норме пространства $Q[a,b]$ означает, что

$$\| f_n - f \| = \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Очевидно, что это есть сходимость в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$.

Напомним, что элементы f и g евклидова пространства называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

Определение. Последовательность $\{\varphi_n\}$ $(= \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$ элементов евклидова пространства называется ортогональной системой, если её элементы попарно ортогональные (т.е. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$).

Ортогональная система $\{\varphi_n\}$ называется ортонормированной, если норма каждого её элемента равна 1.

Таким образом, элементы ортонормированной системы удовлетворяют условию

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Заметим, что если $\{\varphi_n\}$ – ортогональная система, состоящая из ненулевых элементов, то, умножив каждый элемент на число $\frac{1}{\|\varphi_n\|}$, получим ортонормированную систему $\left\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}$.

Примеры. 1) В пространстве $Q[-\pi, \pi]$ тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}$ является ортогональной, а соответствующей ортонормированной системой является последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \dots .$$

2) Ортогональной системой в пространстве $Q[-1, 1]$ является последовательность полиномов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Каждая функция $P_n(x)$ является многочленом n-й степени. Эта система используется в ряде задач математической физики.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортогональная система в бесконечномерном евклидовом пространстве, f – какой-то элемент этого пространства. Составим (формально) ряд

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \dots + f_n\varphi_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n, \qquad (19.14)$$

где f_n – числа, определяемые равенством

$$f_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \dots . \qquad (19.15)$$

Ряд (19.14) называется *рядом Фурье* элемента f по ортогональной системе $\{\psi_n\}$, а числа f_n называются *коэффициентами Фурье* элемента f.

Укажем формальный способ получения формулы (19.15) (формальный потому, что будем производить действия с рядами без каких бы то ни было обоснований). Напишем формальное равенство

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k,$$

в котором f_k — неизвестные пока числа, и умножим скалярно обе его части на элемент ψ_n. Получим равенство

$$(f, \psi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\psi_k, \psi_n).$$

Так как $(\psi_k, \psi_n) = 0$ при $k \neq n$, а $(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2$, то в правой части равенства остаётся только одно слагаемое $f_n \|\psi_n\|^2$ и, следовательно, $f_n = \dfrac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$, т.е. мы получили формулу (19.15).

Отметим, что если система $\{\psi_n\}$ — ортонормированная, то формула (19.15) принимает более простой вид: $f_n = (f, \psi_n)$.

Из курса линейной алгебры известно, что во всяком конечномерном евклидовом пространстве размерности N система $\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ попарно ортогональных элементов, норма каждого из которых равна 1, образует *ортонормированный базис* этого пространства. Любой элемент f можно разложить по этому базису:

$$f=\sum_{n=1}^{N} f_n \psi_n, \quad \text{где} \quad f_n=(f,\psi_n). \qquad (19.16)$$

Разложение (19.16) и есть в данном случае ряд Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_n\}$, но только этот "ряд" содержит конечное число слагаемых.

В случае бесконечномерного евклидова пространства встаёт вопрос о сходимости ряда Фурье элемента f по норме данного пространства к элементу f.

Определение. Говорят, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n$ сходится к элементу f по норме данного пространства, если

$$\| S_n - f \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье.

Наряду с частичной суммой S_n ряда Фурье элемента f (по ортогональной системе $\{\psi_n\}$) будем рассматривать различные линейные комбинации вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, где c_k — произвольные числа. Оказывается, что среди этих линейных комбинаций n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f обладает следующим экстремальным свойством.

Теорема 2. При фиксированном n из всех сумм вида $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ наименьшее отклонение от элемента f по норме данного (евклидова) пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье этого элемента, т.е. сумма $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$, где f_k — коэффициенты Фурье элемента f.

Доказательство. Используя ортогональность системы $\{\psi_n\}$, получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f , \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f, f) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\psi_k\|^2 -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 \|\psi_k\|^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (19.17)$$

Из вида правой части равенства следует, что норма $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|$ имеет наименьшее значение, если $c_k = f_k$, т.е. наименьшее отклонение от элемента f по норме данного пространства даёт $\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Теорема 2 доказана.

Следствия. 1. Если $\{\psi_n,\ n=1,2,\dots\}$ — ортонормированная система, то $\forall$ элемента f и $\forall n$ выполняется равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 .$$

Это равенство называется тождеством Бесселя в честь немецкого астронома и математика Ф. Бесселя (1784–1846). Оно следует из (19.17), если положить $c_k = f_k$ и учесть, что $\|\psi_k\| = 1$.

2. Если $\{\psi_n,\ n=1,2,\dots\}$ — ортонормированная система, то $\forall$ элемента f числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ (где $f_k=(f,\psi_k)$ — коэффициенты Фурье элемента f) сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \| f \|^2.$$

Это неравенство называется <u>неравенством Бесселя.</u>

<u>Доказательство.</u> Из тождества Бесселя следует, что $\forall n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \| f \|^2$. Оно показывает, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$, члены которого — неотрицательные числа, ограничена числом $\| f\|^2$. Поэтому этот ряд сходится, и его сумма также не превосходит числа $\| f \|^2$.

<u>Пример.</u> В пространстве $Q[-\pi,\pi]$ рассмотрим ряд Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ по ортонормированной (тригонометрической) системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\dots\right\}$:

$$f(x) \sim \bar{a}_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) + \bar{b}_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right).$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ поставлен в соответствие её ряд Фурье. Он может и не сходиться к $f(x)$, поскольку $f(x)$ — только кусочно-непрерывная функция, а не кусочно-гладкая.

Если ввести обозначение $\frac{\bar{a}_0}{\sqrt{2\pi}}=\frac{a_0}{2}$, $\frac{\bar{a}_n}{\sqrt{\pi}}=a_n$, $\frac{\bar{b}_n}{\sqrt{\pi}}=b_n$, то этот ряд запишется так, как мы ранее записывали ряд Фурье. (см. (19.1) в § 19.1). В силу следствие 2

$$\bar{a}_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n^2+\bar{b}_n^2) \leq \| f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Разделив это неравенство на π и используя введённые обозначения, получаем неравенство для коэффициентов

a_n, b_n тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (19.18)$$

Из сходимости ряда, стоящего в левой части неравенства (19.18), следует, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ коэффициенты a_n и b_n её тригонометрического ряда Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$ (необходимое условие сходимости числового ряда). Это утверждение можно обосновать и иначе: оно непосредственно следует из вида коэффициентов a_k и b_k (формулы (19.2_k) и (19.3_k)) в силу леммы 3.

19.6 Замкнутые и полные ортонормированные системы

Определение. Ортогональная система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется замкнутой, если любой элемент этого пространства можно приблизить с произвольной точностью по норме данного пространства с помощью конечной линейной комбинации элементов системы $\{\psi_n\}$, т.е. $\forall$ элемента f и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$, такая, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Отметим, что это неравенство в силу теоремы 2 обеспечивает выполнение неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon,$$

где f_k – коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Теорема 3 (необходимое и достаточное условие замкнутости ортонормированной системы)

Для того чтобы ортонормированная система $\{\psi_n\}$ была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall$ элемента f выполнялось равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \qquad (19.19)$$

где $f_k = (f, \psi_k)$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Равенство (19.19) называется равенством Парсеваля в честь французского математика М. Парсеваля (умер в 1836 г.).

Доказательство. Воспользуемся тождеством Бесселя

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 .$$

1. Необходимость. Пусть система $\{\psi_n\}$ — замкнутая. Тогда, согласно определению замкнутости, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, такое, что левая часть тождества будет меньше ε при $n = N$. Отсюда следует, что правая часть тождества будет меньше ε при $n \geq N$: $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \varepsilon$, а так как левая часть этого неравенства неотрицательна (в силу неравенства Бесселя) и ε — любое положительное число, то $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 0$, т.е. выполняется равенство Парсеваля.

2. Достаточность. Пусть равенство Парсеваля выполнено, т.е. сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ равна $\|f\|^2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n$, такое, что n-я частичная сумма ряда будет отличаться от суммы ряда меньше, чем на ε:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon.$$

Следовательно, и левая часть тождества Бесселя меньше ε, а это и означает, что система $\{\psi_n\}$ — замкнутая.

Теорема 3 доказана.

Следствие. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то $\forall$ элемента f его ряд Фурье по системе $\{\psi_n\}$ сходится к этому элементу по норме данного пространства, т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Если ортонормированная система $\{\psi_n\}$ — замкнутая, то $\forall$ элемента f выполняется равенство Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$, а это означает, что $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу тождества Бесселя следует, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$ что и требовалось доказать.

Геометрический смысл равенства Парсеваля. Для вектора $\vec{f} = f_1 \cdot \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3$, где $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис из трёх попарно ортогональных единичных векторов, справедливо равенство $\|\vec{f}\|^2 := (\vec{f}, \vec{f}) = |\vec{f}|^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \sum_{k=1}^{3} f_k^2$. Это и есть равенство Парсеваля в данном (трёхмерном) случае, его можно назвать трёхмерной теоремой Пифагора.

Аналогично, равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ можно назвать теоремой Пифагора в бесконечномерном евклидовом пространстве, а замкнутую систему можно назвать базисом в этом пространстве, поскольку любой элемент пространства можно разложить в ряд по замкнутой системе (ряд Фурье), сходящийся к этому элементу по норме пространства.

Докажем единственность такого разложения.

Допустим, что какой-то элемент f имеет два разложения в ряд по замкнутой (ортонормированной) системе $\{\psi_n\}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \text{ (ряд Фурье) и } \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \psi_k \text{ (второе разложение),}$$

причём оба ряда сходятся к элементу f по норме пространства. Тогда, согласно определению сходимости ряда,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k - f \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1} f_k' \psi_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k - f \right\|$$

(неравенство треугольника для нормы), то

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - \sum_{k=1}^{n} f_k' \psi_k \right\| \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k') \psi_k \right\| = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_k')^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\forall k : (f_k - f_k')^2 = 0$, т.е. $f_k = f_k'$, что и доказывает единственность разложения.

<u>Замечание 1.</u> Забегая вперёд, отметим, что в § 19.3 мы докажем замкнутость тригонометрической системы в пространстве $Q[-\pi,\pi]$, и тем самым (в силу следствия из теоремы 3) будет доказано, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. сходится к $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi,\pi]$.

<u>Замечание 2.</u> Для ортогональной (но не ортонормированной) замкнутой системы $\{\psi_n\}$ равенство Парсеваля имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2 = \|f\|^2$, где $f_k = \frac{(f,\psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\psi_n\}$.

Введём теперь понятие полной системы.

Определение. Ортогональная (в частности, ортонормированная) система $\{\psi_n\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве называется полной, если единственным элементом, ортогональным ко всем элементам ψ_n данной системы, является нулевой элемент.

Теорема 4. Любая замкнутая система является полной.

Доказательство. Пусть $\{\psi_n\}$ — замкнутая система и пусть элемент f ортогонален всем элементам системы $\{\psi_n\}$. Согласно определению полной системы требуется доказать, что f — нулевой элемент.

Так как $(f, \psi_n) = 0$ для любого n, то все коэффициенты Фурье элемента f, т.е. числа $f_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2}$ равны нулю. Отсюда в силу равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|\psi_k\|^2$ следует, что $\|f\| = 0$, поэтому (согласно свойству нормы) f — нулевой элемент. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим ещё одно свойство полных систем.

Теорема 5. Если система $\{\psi_n\}$ — полная, то два различных элемента не могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.

Доказательство. Допустим, что элементы f и g имеют одинаковые ряды Фурье по полной системе $\{\psi_n\}$, т.е. для любого k коэффициенты Фурье элементов f и g одинаковые: $f_k = g_k$. Докажем, что тогда $f = g$.

Рассмотрим разность $f-g$. Её коэффициенты Фурье равны $f_k - g_k$ и, следовательно, они равны нулю для любого k. Это означает, что элемент $f-g$ ортогонален всем элементам полной системы $\{\psi_n\}$. Отсюда в силу полноты системы $\{\psi_n\}$ следует, что $f - g = \theta$ — нулевой элемент, поэтому $f = g$, что и требовалось доказать.

Замечание. Понятия замкнутой и полной систем можно ввести и для конечномерных евклидовых пространств (с помощью таких же определений, как и для бесконечномерных пространств).

Мы доказали, что в любом (бесконечномерном) евклидовом пространстве замкнутая система является полной (теорема 1). Это утверждение верно и для конечномерных евклидовых пространств (доказательство такое же). Более того, для конечномерных евклидовых пространств верно и обратное утверждение: любая полная система является замкнутой. Но для бесконечномерных пространств это не так: можно привести пример полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве, которая не является замкнутой (см. [Ильин, Позняк, ч. II, с. 389]).

Среди бесконечномерных евклидовых пространств особое место занимают гильбертовы пространства. Гильбертово пространство – это линейное бесконечномерное евклидово полное сепарабельное пространство. Эпитеты "линейное", "бесконечномерное", "евклидово" нам известны – мы знаем, что они означают.

Полное нормированное пространство – это такое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность элементов сходится по норме пространства к некоторому элементу этого пространства.

Сепарабельность нормированного пространства означает, что в этом пространстве существует счётное всюду плотное (в смысле нормы пространства) множество элементов.

Множество называется всюду плотным в данном нормированном пространстве, если любой элемент пространства можно представить как предел (по норме пространства) последовательности элементов этого множества. Например, множество рациональных чисел является счётным всюду плотным множеством на числовой прямой.

В отношении гильбертовых пространств справедливы следующие утверждения.

1. В гильбертовом пространстве понятия замкнутости и полноты ортогональной системы эквивалентны.

2. В гильбертовом пространстве существуют замкнутые системы.

19.7 Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье

От общих рядов Фурье вернёмся к тригонометрическому ряду Фурье. Напомним то, что было уже доказано для тригонометрических рядов Фурье.

1. В § 19.3 мы доказали (теорема 1), что тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого сегмента, и его сумма $S(x)$ равна $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ в любой внутренней точке x сегмента $[-\pi,\pi]$, в частности, $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$, а на концах сегмента $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$.

2. В § 19.5 мы доказали, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$, а ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \text{ сходится.}$$

В данном параграфе мы установим, какие условия на функцию $f(x)$ обеспечивают равномерную сходимость её ряда Фурье на сегменте $[-\pi,\pi]$ и какие условия позволяют дифференцировать ряд Фурье почленно.

<u>Теорема 6 (о равномерной сходимости ряда Фурье).</u>

Пусть $f(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на сегменте $[-\pi,\pi]$ и пусть $f(-\pi)=f(\pi)$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно и абсолютно на сегменте $[-\pi,\pi]$.

<u>Доказательство.</u> Согласно признаку Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости (на сегменте $[-\pi,\pi]$) ряда Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \qquad (19.20)$$

достаточно доказать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right). \qquad (19.21)$$

Одновременно отсюда последует, что ряд (19.20) сходится абсолютно.

Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, которая в силу условия теоремы является кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Непрерывная (кусочно-гладкая) функция $f(x)$ является первообразной для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$. Учитывая это и применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot df(x) = \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$, а второе слагаемое равно $n b_n$, где b_n — коэффициент Фурье функции $f(x)$. Итак,

$\alpha_n = n \cdot b_n$, откуда следует, что $|b_n| = \frac{1}{n}|\alpha_n|$.

Аналогично получается равенство $|a_n| = \frac{1}{n}|\beta_n|$, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$. Таким образом, ряд (19.21) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right). \qquad (19.22)$$

Воспользуемся известным неравенством $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, в силу которого $\frac{1}{n}|\alpha_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \alpha_n^2\right)$, $\frac{1}{n}|\beta_n| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \beta_n^2\right)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{n}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right) \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ тоже сходится (поскольку его члены — квадраты коэффициентов Фурье кусочно-непрерывной функции $f'(x)$), то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right]$ сходится, а, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится ряд (19.22), т.е. сходится ряд (19.21), что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

Замечание. Отметим, что при условиях теоремы 6 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ именно к функции $f(x)$ (это следует из теоремы 1), а на всей числовой прямой – к периодическому продолжению функции $f(x)$, которое является непрерывной функцией во всех точках прямой, что обеспечивается непрерывностью $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$ и условием $f(-\pi)=f(\pi)$.

Теорема 7 (о почленном дифференцировании ряда Фурье).

Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ и её производные до m-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[-\pi,\pi]$;

2) производная $(m+1)$-го порядка $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$;

3) $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, …, $f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi)$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (19.23)$$

можно m раз дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall k=1,2,\dots,m$ (и $\forall x\in[-\pi,\pi]$) справедливо равенство

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n^k \cos\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right)+b_n\cdot n^k \sin\left(nx+k\frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство. Обозначим через α_n и β_n коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx, \quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx.$$

Интегрируя по частям $(m+1)$ раз и учитывая условие 3) теоремы, получаем равенство (аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6):

$$|\alpha_n|+|\beta_n| = n^{m+1}(|a_n|+|b_n|), \qquad (19.24)$$

где a_n и b_n — коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$.

Из этого равенства следует, что

$$n^m(|a_n|+|b_n|) = \frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|),$$

и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\alpha_n|+|\beta_n|)$ сходится (это доказывается так же, как была доказана сходимость ряда (19.22)), то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|). \qquad (19.25)$$

Обратимся теперь к ряду Фурье функции $f(x)$, т.е. ряду (19.23). Если этот ряд продифференцировать почленно k раз, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^k\left(a_n\cos\left(nx+k\tfrac{\pi}{2}\right)+b_n\sin\left(nx+k\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Для любого $k=0,1,\dots,m$ этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом (19.25), поэтому $(\forall k=0,1,2,\dots,m)$ он сходится равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ (по признаку Вейерштрасса).

Отсюда следует, согласно теореме 17 главы 16, что ряд (19.23) можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi,\pi]$ m раз. Теорема 7 доказана.

<u>Следствие.</u> Если выполнены условия теоремы 7, то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеет место оценка

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Эта оценка следует из равенства (19.24), если учесть, что $\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Л. 20 Примеры. 1) Пусть $f(x) = (x^2-\pi^2)^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

Тогда $f'(x) = 4x(x^2-\pi^2)$, $f''(x) = 4(x^2-\pi^2)+8x^2$, $f'''(x) = 24x$, откуда получаются равенства $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, $f''(-\pi) = f''(\pi)$ и неравенство $f'''(-\pi) \ne f'''(\pi)$. Эти соотношения показывают, что для данной функции $f(x)$ выполнены условия теоремы 7 для $m=2$. Следовательно, ряд Фурье этой функции можно два раза дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Если вычислить коэффициенты Фурье данной функции, то окажется, что $a_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ и $b_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ при $n \to \infty$, что даёт возможность дифференцировать почленно ряд Фурье во внутренних точках сегмента $[-\pi, \pi]$ три раза.

Задание. Вычислите коэффициенты Фурье функции $f(x) = (x^2-\pi^2)^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

2) Пусть $f(x) = \sin(\cos x)$, $-\pi \le x \le \pi$.

Так как $\sin x$ и $\cos x$, а также их производные любого порядка являются периодическими функциями с периодом 2π, то для данной функции условия теоремы 7 выполнены для любого m, и поэтому ряд Фурье этой функции можно дифференцировать почленно на сегменте $[-\pi, \pi]$ любое число раз. Коэффициенты Фурье этой функции убывают при $n \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{n^m}$, где m — любое положительное число: $a_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$ и $b_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$ при $n \to \infty$.

19.8 Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами

С понятием алгебраического многочлена мы давно знакомы — это функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_0,$$

где n — натуральное число, a_i $(i=0,1,\dots,n)$ — какие-то числа (коэффициенты многочлена).

Тригонометрическим многочленом на сегменте $[-\pi,\pi]$ назовём любую линейную комбинацию конечного числа функций тригонометрической системы:

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx.$$

Теорема 8 (её часто называют теоремой Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$ тригонометрическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x\in[-\pi,\pi]$ выполняется неравенство

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно лемме 2 (см. § 19.2) существует непрерывная кусочно-гладкая функция $\ell(x)$, такая, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |f(x)-\ell(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (19.26)$$

и, кроме того, $\ell(-\pi)=\ell(\pi)$.

По теореме 6 ряд Фурье функции $\ell(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi,\pi]$. Поэтому для заданного ε $\exists$ номер n, такой, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |\ell(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (19.27)$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $\ell(x)$ и, тем самым, $S_n(x)$ — тригонометрический многочлен.

Из неравенств (19.26) и (19.27) следует, что

$$\forall x\in[-\pi,\pi]: \quad |f(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\ell, \ell]$ и $f(-\ell)=f(\ell)$, то эту функцию можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на сегменте $[-\ell,\ell]$ тригонометрическим многочленом вида

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos\frac{\pi k x}{\ell} + B_k \sin\frac{\pi k x}{\ell}. \qquad (19.28)$$

Теорема 9 (её также называют теоремой Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$, то её можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на этом сегменте алгебраическим многочленом, т.е. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала произвольную функцию $f(x)$, непрерывную на сегменте $[-\ell,\ell]$ и удовлетворяющую условию $f(-\ell)=f(\ell)$, где $\ell>0$ – какое-то число.

Согласно замечанию к теореме 8 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ тригонометрический многочлен вида (19.28), такой, что

$$\forall x\in[-\ell,\ell]: \quad |f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19.29).$$

Разложим каждую из функций $A_k\cos\frac{\pi k x}{\ell}$ и $B_k\sin\frac{\pi k x}{\ell}$, входящих в (19.28), по формуле Маклорена и возьмём в разложении каждой функции многочлен Тейлора такой степени, чтобы остаточный член формулы Тейлора был по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{4m}$ на всём сегменте $[-\ell,\ell]$.

Объединяя все эти многочлены Тейлора (и прибавляя слагаемое A_0, входящее в $T(x)$), получим многочлен $P_n(x)$, такой, что

$$\forall x\in[-\ell,\ell]: \quad |T(x) - P_n(x)| < 2m\cdot\frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19.30)$$

Из (19.29) и (19.30) следует, что

$$\forall x \in [-\ell, \ell] : \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

2) Пусть теперь функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Возьмём такое число ℓ, что $[a, b] \subset [-\ell, \ell]$, и продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[-\ell, \ell]$ непрерывным образом. Получим функцию $F(x)$, непрерывную на сегменте $[-\ell, \ell]$ и совпадающую с $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Очевидно, функцию $F(x)$ можно выбрать так, что будет выполнено равенство $F(-\ell) = F(\ell)$.

Согласно доказанному в п. 1), $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ алгебраический многочлен $P_n(x)$, такой, что $\forall x \in [-\ell, \ell]$ выполняется неравенство $|F(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. На сегменте $[a, b]$ это неравенство принимает вид $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

19.9 Замкнутость тригонометрической системы

<u>Теорема 10.</u> Тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \ldots\}$ является замкнутой в пространстве $Q[-\pi, \pi]$.

<u>Доказательство.</u> Согласно определению замкнутой системы нужно доказать, что любую кусочно-непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с произвольной точностью по норме пространства $Q[-\pi, \pi]$ с помощью конечной линейной комбинации функций тригонометрической системы, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что

$$\| f(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \varepsilon.$$

Прежде всего заметим, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно построить такую непрерывную функцию $F(x)$, которая совпадает с $f(x)$ всюду, кроме малых окрестностей точек разрыва $f(x)$ и, возможно, малой окрестности точки $x = \pi$, а в этих окрестностях функция $F(x)$ является линейной функцией и, кроме того, она удовлетворяет условию $F(-\pi) = F(\pi)$ (рис. 19.5).

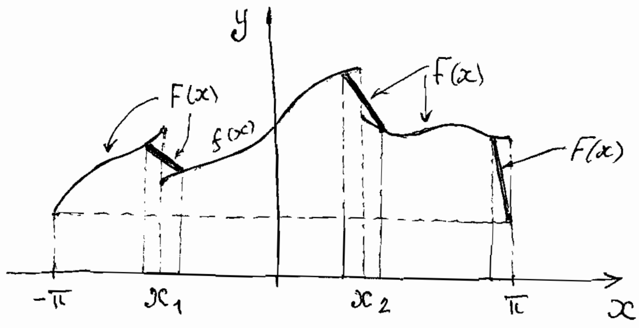


Рис. 19.5

В малых окрестностях точек x_1 и x_2 (это точки разрыва $f(x)$) и также в малой полуокрестности точки $x = \pi$ функция $f(x)$ заменена на линейную функцию $F(x)$.

Очевидно, что $\forall \varepsilon > 0$ указанные окрестности точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x = \pi$ можно выбрать столь малыми, что будет выполнено неравенство

$$\| f(x) - F(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19.31)$$

Согласно теореме 8 для построенной непрерывной функции $F(x)$ по заданному ε найдётся тригонометрический многочлен $T(x)$, такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ будет выполнено неравенство $|F(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$, и поэтому

$$\| F(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19.32)$$

Из (19.31) и (19.32) следует, что

$$\| f(x) - T(x) \| \leq \| f(x) - F(x) \| + \| F(x) - T(x) \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что и требовалось доказать.

Следствия. 1) Так как тригонометрическая система является замкнутой в пространстве $Q[-\pi,\pi]$, то для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ выполняется равенство Парсеваля

$$\bar{a}_0^{\,2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{a}_n^{\,2}+\bar{b}_n^{\,2})=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx,$$

где $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной тригонометрической системе $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\dots\}$.

Для коэффициентов Фурье a_n, b_n функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{1, \cos nx, \sin nx,\ n=1,2,\dots\}$ равенство Парсеваля имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

2) Согласно следствию из теоремы 3 для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье сходится к $f(x)$ по норме пространства $Q[-\pi,\pi]$, т.е. сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\pi]$. Это означает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big)\Big]^2dx\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

3) Для любой кусочно-непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ её тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно на этом сегменте, т.е. $\forall x_0$ и x из сегмента $[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt.$$

Это следует из сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$ и теоремы 19' главы 16.

19.10 Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Возьмём произвольный сегмент $[-l, l]$ и разложим функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на этом сегменте:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (19.33)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt. \quad (19.34)$$

В физике функции $\cos\frac{\pi n x}{l}$ и $\sin\frac{\pi n x}{l}$ называют <u>гармониками</u>, а ряд (19.33) — разложением функции $f(x)$ по гармоникам. Амплитуды гармоник равны a_n и b_n. Частоты гармоник ($\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$), по которым раскладывается функция $f(x)$, образуют бесконечно большую последовательность. При этом разность двух соседних частот $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}$ тем меньше, чем больше l, т.е. с увеличением l соседние частоты становятся всё ближе друг к другу. В пределе при $l \to \infty$ получается разложение функции $f(x)$ по гармоникам с непрерывно изменяющейся частотой λ от 0 до $+\infty$, а ряд Фурье переходит в интеграл Фурье.

Сначала с помощью эвристических (не строгих) рассуждений получим выражение для интеграла Фурье. Подставляя выражения (19.34) для коэффициентов Фурье в равенство (19.33) и учитывая, что $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $\Delta\lambda_n = \frac{\pi}{l}$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)\,dt\right]\Delta\lambda_n.$$

1.21. Перейдём в этом равенстве к пределу при $l \to +\infty$, считая, что $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой прямой, т.е. считая, что несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Тогда предел при $l \to +\infty$ первого слагаемого в правой части равенства равен нулю, а второе слагаемое переходит в интеграл $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda$.

Таким образом, приходим к равенству

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \qquad (19.35)$$

Интеграл в правой части равенства (19.35) называется интегралом Фурье функции $f(x)$, а само равенство (19.35) называется представлением функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье.

Записывая $\cos\lambda(t-x)$ в виде $\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x$, перепишем формулу (19.35) в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda, \qquad (19.36)$$

где $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$, $\quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$.

Формула (19.36) представляет собой разложение функции $f(x)$ по гармоникам $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ с частотой λ, изменяющейся непрерывно от 0 до $+\infty$, и амплитудами $a(\lambda)d\lambda$ и $b(\lambda)d\lambda$.

Перейдем теперь к строгому обоснованию справедливости равенства (19.35).

Теорема 11. Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является кусочно-гладкой на любом сегменте и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой (т.е. несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится), то для любого x справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right], \qquad (19.37)$$

в частности, в точках непрерывности $f(x)$ правая часть равенства (19.37) равна $f(x)$, т.е. справедливо равенство (19.35).

Доказательство. Несобственный интеграл в левой части равенства (19.37) — это (по определению) предел

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right] d\lambda.$$

Введём обозначение

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right] d\lambda.$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{A\to\infty} S_A(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right].$$

Внутренний интеграл в выражении для $S_A(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \qquad (19.38)$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметра $\lambda\in[0, A]$. Так как $\left| f(t)\cos\lambda(t-x)\right| \leq |f(t)|$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится (по условию теоремы), то по признаку Вейерштрасса несобственный интеграл (19.38) сходится равномерно по параметру λ на сегменте $[0, A]$. Отсюда в силу теоремы 8 главы 18 следует, что в выражении для $S_A(x)$ можно изменить порядок интегрирования, т.е.

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_0^A \cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right]dt.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется:

$$\int_0^A \cos\lambda(t-x)\,d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\sin A(t-x)}{t-x}, & \text{если } t\neq x,\\ A, & \text{если } t=x. \end{cases}$$

Для упрощения записи будем записывать эту функцию в виде $\frac{\sin A(t-x)}{t-x}$, подразумевая, что при $t=x$ она равна A. Сделав в несобственном интеграле замену переменной $t=x+\xi$, приходим к равенству

$$S_A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi = S_A^-(x) + S_A^+(x),$$

где

$$S_A^-(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi, \quad S_A^+(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+\xi)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Воспользуемся равенством, полученным в § 18.4: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}$ при $A>0$. Умножив его на $\frac{1}{\pi}f(x+0)$ и внеся $f(x+0)$ под знак интеграла, получим:

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+0)\,\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Вычитая это равенство из равенства, определяющего $S_A^+(x)$, приходим к равенству

$$S_A^+(x) - \frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\,\sin(A\xi)\,d\xi := J(x,A).$$

Заметим, что функция $J(x,A)$ аналогична функции $J(x,n)$, фигурировавшей в доказательстве теоремы 1.

Там мы доказали, что $J(x,n)\to 0$ при $n\to\infty$, опираясь на лемму 3 и тот факт, что функция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ является кусочно-непрерывной. Теперь мы хотим доказать, что $J(x,A)\to 0$ при $A\to+\infty$. В нашем случае функция $\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}$ также кусочно-непрерывная (в силу того, функция $f(x)$ — кусочно-гладкая по условию теоремы), однако принципиальное отличие функции $J(x,A)$ от $J(x,n)$ состоит в том, что $J(x,n)$ — собственный интеграл, а $J(x,A)$ — несобственный интеграл, и поэтому к нему нельзя применить непосредственно лемму 3.

Чтобы преодолеть указанную трудность, представим $J(x,A)$ в виде суммы трёх слагаемых:

$$J(x,A) = J_1 + J_2 + J_3 ,$$

где $J_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^B \frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin(A\xi)\,d\xi$, $J_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi$,

$J_3 = -\frac{1}{\pi}f(x+0)\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}\,d\xi$, $B>0$ — число, которое выберем ниже.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и возьмём число B столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{и} \quad |J_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_B^{+\infty} |f(x+\xi)|\cdot\left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right| d\xi < \frac{\varepsilon}{3}$$

Такой выбор числа B возможен, поскольку $\left|\frac{\sin A\xi}{\xi}\right| \le 1$, если $\xi \ge B \ge 1$, и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f(x+\xi)|\,d\xi$ сходится по условию теоремы.

Зафиксируем выбранное значение числа B. В силу леммы 3 для этого значения B интеграл $J_1 \to 0$

при $A \to +\infty$, поэтому $\exists A_1$, такое, что

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } A > A_1.$$

Обратимся к интегралу J_3. Сделав замену переменной $\xi = \frac{t}{A}$, получим

$$|J_3| \leq \frac{1}{\pi} |f(x+0)| \left| \int\limits_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right|.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сходится, то $\exists A_2$, такое, что

$$|J_3| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } A > A_2.$$

Итак, если $A > \max(A_1, A_2)$, то

$$|J(x, A)| \leq |J_1| + |J_2| + |J_3| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $J(x, A) \to 0$ при $A \to +\infty$.

Отсюда следует, что $S_A^+(x) \to \frac{1}{2} f(x+0)$ при $A \to +\infty$. Аналогично доказывается, что $S_A^-(x) \to \frac{1}{2} f(x-0)$ при $A \to +\infty$. Таким образом,

$$S_A(x) = S_A^-(x) + S_A^+(x) \to \frac{1}{2} \left[f(x-0) + f(x+0) \right] \text{ при } A \to +\infty,$$

что и требовалось доказать.

19.11 Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 11. Представим её в виде интеграла Фурье (будем считать, что в точках разрыва $f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt. \qquad (19.39)$$

Заметим, что внутренний интеграл (обозначим его $F_1(\lambda, x)$) является чётной функцией λ, поэтому $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} F_1(\lambda, x) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda, x) d\lambda$, и равенство (19.39) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt. \qquad (19.40)$$

Функция $F_2(\lambda, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt$ является нечётной функцией λ, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt = 0, \qquad (19.41)$$

(понимать) если этот интеграл в смысле главного значения, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda)\,d\lambda = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} F_2(\lambda)\,d\lambda.$$

Умножая равенство (19.41) на i (мнимую единицу), складывая с равенством (19.40) и учитывая, что $\cos\lambda(x-t) + i\sin\lambda(x-t) = e^{i\lambda(x-t)}$, приходим к комплексной форме интеграла Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}\,dt. \qquad (19.42)$$

Отметим ещё раз, что внешний интеграл (по переменной λ) понимается в смысле главного значения.

Перепишем равенство (19.42) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Введём обозначение для интеграла в квадратных скобках:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt. \qquad (19.43)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda. \qquad (19.44)$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется <u>образом Фурье</u> функции $f(x)$, а переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\lambda)$ по формуле (19.43) называется <u>преобразованием Фурье</u> функции $f(x)$. Функция $f(x)$

по отношению к своему образу $\hat{f}(\lambda)$ называется <u>оригиналом</u>, а переход от образа $\hat{f}(\lambda)$ к оригиналу $f(x)$ по формуле (19.44) называется <u>обратным преобразованием Фурье</u> или <u>восстановлением оригинала по его образу</u> (ещё раз отметим, что несобственный интеграл в обратном преобразовании Фурье понимается в смысле главного значения, а в преобразовании Фурье — как обычный несобственный интеграл, т.е.

$$\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\A_2\to+\infty}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A_1}^{A_2}f(t)e^{-i\lambda t}\,dt).$$

Вернёмся к вещественной форме интеграла Фурье (формула (19.36))

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda, \qquad (19.45)$$

где

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\qquad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

и рассмотрим два случая.

1) <u>$f(x)$ — чётная функция</u>, т.е. $\forall x: f(-x)=f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ — чётная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ — нечётная функция аргумента t, поэтому

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b(\lambda)=0,$$

и формулу (19.45) можно записать в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt\right)\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Введём обозначение

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos\lambda t \, dt. \qquad (19.46)$$

Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos\lambda x \, d\lambda. \qquad (19.47)$$

Формула (19.46) называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формула (19.47) – обратным косинус-преобразованием Фурье.

2) $f(x)$ – нечётная функция, т.е. $\forall x: f(-x) = -f(x)$.

В этом случае $f(t)\cos\lambda t$ – нечётная функция аргумента t, а $f(t)\sin\lambda t$ – чётная функция аргумента t, поэтому

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0 f(t) \sin\lambda t \, dt,$$

и формулу (19.45) можно записать в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin\lambda t \, dt \right) \sin\lambda x \, d\lambda.$$

Формула

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin\lambda t \, dt$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$,

а формула

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin\lambda x \, d\lambda$$

– обратным синус-преобразованием Фурье.

Если функция $f(x)$ задана на полупрямой $0 \le x < +\infty$, то её можно продолжать на полупрямую $-\infty < x < 0$ как чётным, так и нечётным образом, и в соответствии с этим использовать либо косинус-преобразование Фурье, либо синус-преобразование Фурье.

Примеры. 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x| = 1. \end{cases}$

Эта функция — чётная, найдём её косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos\lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos\lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Обратное косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda} \cos\lambda x \, d\lambda. \qquad (19.48)$$

Вычислим этот интеграл при $x = \pm 1$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda} \cos\lambda \, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} = f(\pm 1).$$

Задание. Вычислите интеграл (19.48) при $|x| < 1$ и при $|x| > 1$.

2) $f(x) = e^{-ax}$, $0 \le x < +\infty$; $a > 0$. $\qquad (19.49)$

а) Продолжим эту функцию на полупрямую $(-\infty, 0)$ сначала чётным образом и найдём её косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos\lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \operatorname{Re} e^{i\lambda t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \frac{1}{-a+i\lambda} e^{(-a+i\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \frac{-1}{-a+i\lambda} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Re}\, \frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

Обратное косинус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{a}{a^2+\lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ e^{ax}, & x < 0 \end{cases} = e^{-a|x|}.$$

б) Продолжим теперь функцию (19.49) на полупрямую $(-\infty < x < 0)$ нечётным образом и найдем её синус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-at} \sin \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Im} \int\limits_0^{+\infty} e^{(-a+i\lambda)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

Обратное синус-преобразование Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ -e^{ax}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3) Преобразование Фурье часто используется при решении задач математической физики. Это делается по следующей схеме:

а) уравнение для искомой функции f подвергают преобразованию Фурье и получают уравнение для образа $\hat{f}$;

б) уравнение для $\hat{f}$ часто оказывается проще исходного уравнения для f, из него находят $\hat{f}$;

в) по образу $\hat{f}$ с помощью обратного преобразования Фурье находят искомую функцию f.

Применим эту схему к начальной задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \ -\infty<x<+\infty,$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x).$$

Обозначим через $\hat{u}(\lambda,t)$ образ Фурье искомой функции $u(x,t)$:

$$\hat{u}(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx.$$

Чтобы получить уравнение для $\hat{u}(\lambda,t)$, умножим обе части исходного уравнения на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, считая, что функция $u(x,t)$ и её производные стремятся к нулю при $|x|\to\infty$. В левой части уравнения получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\lambda x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx\right)=\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda,t),$$

а в правой части дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)(-i\lambda)e^{-i\lambda x}dx\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{i\lambda u(x,t)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\right.$$

$$\left.-i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)(-i\lambda)e^{-i\lambda x}dx\right]=-\lambda^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx=-\lambda^2\hat{u}(\lambda,t).$$

Таким образом, для $\hat{u}(\lambda,t)$ получилось уравнение

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}=-\lambda^2\hat{u}. \qquad (19.50)$$

Умножая также обе части начального условия $u(x,0)=\varphi(x)$ на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ и интегрируя по x

от $-\infty$ до $+\infty$, получаем начальное условие для функции $\hat{u}(\lambda, t)$:

$$\hat{u}(\lambda,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x) e^{-i\lambda x} dx := \hat{\varphi}(\lambda).$$

Решая уравнение (19.50) с начальным условием $\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda)$, находим образ Фурье $\hat{u}(\lambda,t)$:

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\varphi}(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t}.$$

Чтобы найти искомую функцию $u(x,t)$ используем обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\lambda,t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\lambda)\, e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda.$$

Подставив сюда выражение для $\hat{\varphi}(\lambda)$, записанное в виде $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi$, получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\, d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda.$$

Чтобы вычислить внутренний интеграл, запишем его подынтегральную функцию в виде

$$e^{-\left[\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2\sqrt{t}}\right]^2}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

и сделаем замену переменной $\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2\sqrt{t}} = s$. Это приводит к равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

а искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\, d\xi.$$