

Глава 4. Уравнения эллиптического типа

5. Функция Грина

1) Фундаментальные решения

а) Вспомогательные положения анализа. Обобщенные функции.

Обобщенные решения

Пусть E^n - n -мерное вещественное евклидово пространство, в частности, $E^3 \equiv E$. Будем обозначать n -мерные точки через $x = x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а трех и двумерные точки - через $M = M(x, y, z)$ и $M = M(x, y)$.

Носителем кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$ называется замыкание множество тех точек, где $\varphi(x) \neq 0$. Носитель φ обозначается как $\text{supp } \varphi$.

Если $\text{supp } \varphi$ - ограниченное множество, то функция φ называется **финитной**.

Отнесем к **множеству основных функций** $D = D(E^n)$ все финитные бесконечно дифференцируемые функции. Введя в D сходимость, превратим множество D в линейное пространство основных функций.

Сходимость в пространстве D определим следующим образом.

Определение. Последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ из D сходится к функции φ из D , если:

1) Существует такое число $R > 0$, что $\text{supp } \varphi_k \in K^R$,

2) При каждом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ равномерно по x последовательность

$D^\alpha \varphi_k(x)$ сходится к $D^\alpha \varphi(x)$ при $k \rightarrow \infty$:

$$D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows D^\alpha \varphi(x), k \rightarrow \infty \\ x \in E^n$$

В этом случае будем писать: $\varphi_k \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$ в D .

Здесь через $D^\alpha f(x)$ обозначена производная порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, где $\alpha_i, i=1,2,\dots,n$, принимают неотрицательные целочисленные значения:

$$D^\alpha f(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, D^0 f(x) \equiv f(x), D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}, \text{ где}$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,2,\dots,n.$$

Покажем, что операция дифференцирования $D^\beta \varphi(x)$ непрерывна из D в D . Пусть $\varphi_k \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$ в D , тогда: а) $\varphi_k(x) = 0, |x| > R$ для некоторого $R > 0$ и б) при каждом α $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi, k \rightarrow \infty$. Но тогда:

а) $\text{supp } D^\beta \varphi_k \subset K^R$; б) при каждом значении α

$$D^\alpha (D^\beta \varphi_k(x)) = D^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \rightarrow D^{\alpha+\beta} \varphi(x) = D^\alpha (D^\beta \varphi(x)) \text{ при } k \rightarrow \infty, \text{ то есть}$$

$D^\beta \varphi_k \rightarrow D^\beta \varphi$ в D , что означает непрерывность оператора D^β из D в D .

Аналогичны операции неособенной замены переменных $\varphi(ax+b)$ и умножения на функцию $\alpha(x) \in C^\infty(R^k)$, $\alpha(x)\varphi(x)$ непрерывны из D в D .

Определение. Обобщенной функцией в смысле Соболева-Шварца называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Таким образом:

1) обобщенная функция f есть функционал на D , то есть каждой $\varphi \in D$

сопоставляется (комплексное) число (f, φ) ;

2) обобщенная функция f есть линейный функционал на D , то есть если,

$\varphi \in D, \psi \in D$ и λ, μ - комплексные числа, то

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi);$$

3) обобщенная функция f есть непрерывный функционал на D , то есть

$$\text{если } \varphi_k \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty \text{ в } D, \text{ то } (f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi), k \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $D' = D'(E^n)$ множество всех обобщенных функций.

Множество D' - линейное, если линейную комбинацию обобщенных функций f и g : $\lambda f + \mu g$ определить, как функционал, действующий по формуле $(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \varphi \in D$.

Покажем, что функционал $\lambda f + \mu g$ - линейный и непрерывный, то есть принадлежит D' :

а) если $\varphi \in D, \psi \in D$ и α, β - любые комплексные числа, то по определению:

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha(\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)) + \beta(\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)) = \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi) \end{aligned}$$

и поэтому этот функционал линейный;

б) непрерывность функционала $\lambda f + \mu g$ следует из непрерывности функционалов f и g : пусть $\varphi_k \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$ в D , тогда

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) = (\lambda f + \mu g, \varphi), k \rightarrow \infty.$$

Линейное множество D' с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций.

Сходимость в D' определяется как **слабая сходимость** последовательности функционалов.

Определение. Последовательность обобщенных функций f_1, f_2, \dots из D' сходится к обобщенной функции $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), k \rightarrow \infty$. В этом случае мы будем писать $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$.

Пространство обобщенных функций является **полным** пространством [1]:

Теорема. Пусть последовательность обобщенных функций f_1, f_2, \dots из D' такова, что для каждой $\varphi \in D$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится при $k \rightarrow \infty$. Тогда функция f на D , определяемая равенством:
 $(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi)$, $\varphi \in D$, также является линейной и непрерывной на D , то есть $f \in D'$.

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в E^n функциями по формуле $(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in D$, называются **регулярными обобщенными функциями**. Остальные обобщенные функции называются **сингулярными обобщенными функциями** (например, δ - функция Дирака).

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области G , обозначим через $D(G)$. Таким образом, $D(G) \subset D(E^n) = D$.

Обобщенная функция обращается в нуль в области G , если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D(G)$. Этот факт будем записывать так: $f = 0, x \in G$ или $f(x) = 0, x \in G$.

Имеет место лемма [1]:

Лемма. Если обобщенная функция обращается в нуль в окрестности каждой точки области G , то она обращается в нуль в области G .

Имеет место лемма дю Буа-Реймона [1]:

Лемма. Для того, чтобы локально-интегрируемая в области G функция $f(x)$ обращалась в нуль в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была равна нулю почти всюду в области G .

Замечание. Обобщенная функция, вообще говоря, не имеет значений в отдельных точках.

Носителем обобщенной функции называется множество всех таких точек, что ни в какой окрестности каждой точки этого множества $f \neq 0$. Носитель обозначается как $\text{supp } f$. Очевидно, $\text{supp } f$ - замкнутое множество. Если $\text{supp } f$ - ограниченное множество, то обобщенная функция f называется **финитной**.

Обобщенная производная $D^\alpha f$ обобщенной функции $f \in D'$ определяется следующим соотношением:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \varphi \in D.$$

Нетрудно показать, что $D^\alpha f \in D'$. Таким образом, **любая обобщенная функция является бесконечно дифференцируемой**. Если обобщенная функция имеет классическую производную, то ее обобщенная производная совпадает с классической.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка m :

$$Lu = f(x), \tag{48}$$

где оператор L определяется следующим образом:

$$Lu = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

а коэффициент $a_\alpha(x) \in C^\infty(E^n)$.

Определение. Обобщенным решением уравнения (48) в области G называется всякая обобщенная функция $u \in D'$, удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле, то есть для любой функции $\varphi \in D(G)$

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D(G). \quad (49)$$

Учитывая определение обобщенной производной, нетрудно показать, что равенство (49) равносильно равенству

$$(u, L^* \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D(G),$$

где оператор L^* определяется следующим образом:

$$L^* \varphi \equiv \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

Очевидно, что всякое классическое решение является и его обобщенным решением.

Обратное утверждение формулируется в виде следующей леммы:

Лемма. Если $f \in C(G)$ и обобщенное решение $u(x)$ уравнения (49) в области G принадлежит классу $C^m(G)$, то оно является и классическим решением этого уравнения в области G .

Доказательство

Так как $u \in D' \cap C^{(m)}(G)$, то классические и обобщенные производные функции u до порядка m включительно совпадают в области G (это следует из определения обобщенной производной). Поскольку u - обобщенное решение уравнения (49) в области G , то непрерывная в G функция $Lu - f$ обращается в нуль в области G в смысле обобщенных функций. По лемме дю Буа-Реймона $Lu(x) - f(x) = 0$ во всех точках области G в классическом смысле [1].

б) Фундаментальные решения

Определение. Фундаментальным решением оператора L называется регулярная обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$Lu = -\delta(x, x_0), \quad (50)$$

где $\delta(x, x_0)$ - дельта функция.

Фундаментальное решение определяется не однозначно, а с точностью до решения однородного уравнения $Lu = 0$.

Рассмотрим функцию

$$U_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}, \quad M = M(x, y, z), \quad M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0).$$

Нетрудно показать, что при $M \neq M_0$ $\Delta_M U_0(M) = 0$.

Покажем, что функция $U_0(M)$ как обобщенная функция удовлетворяет уравнению (50) при $L \equiv \Delta$. Пусть $\varphi(M)$ - основная функция, носитель которой обозначим через \mathbf{D}_0 : $\mathbf{D}_0 = \text{supp } \varphi$. Функция $U_0(M)$ как регулярная обобщенная функция имеет обобщенные производные всех порядков. Следовательно, ΔU_0 есть обобщенная функция. Покажем, что $\Delta U_0 = -\delta(M, M_0)$.

Рассмотрим функционал

$$(\Delta U_0, \varphi) = \int_{\mathbf{D}} \varphi(M) \Delta U_0(M) dV_M, \quad \varphi \in D(E).$$

По определению производных обобщенных функций

$$\int_{\mathbf{D}} \varphi \Delta_M \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} dV_M \equiv \int_{\mathbf{D}} \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Delta_M \varphi dV_M \quad (51)$$

Используя третью формулу Грина, получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{\Delta\varphi}{r_{MM_0}} dV_M = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}} \right) d\sigma_P - \varphi(M_0), \quad M_0 \in \mathbf{D}.$$

Область \mathbf{D} можно выбрать достаточно большой, так что $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{D}$. Тогда

$$\varphi(P) = 0, \quad \frac{\partial\varphi(P)}{\partial n} = 0 \quad \text{при } P \in \mathbf{S}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{\Delta\varphi}{r_{MM_0}} dV_M = -\varphi(M_0), \quad M_0 \in \mathbf{D}. \quad (52)$$

Из (51) и (52) получаем

$$\int_{\mathbf{D}} \varphi(M) \Delta_M \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} dV_M = -\varphi(M_0), \quad M_0 \in \mathbf{D}.$$

С другой стороны, по основному свойству δ -функции

$$\int_{\mathbf{D}} \varphi(M) \delta(M, M_0) dV_M = \varphi(M_0), \quad M_0 \in \mathbf{D}.$$

Складывая два последних равенства, получим

$$\left(\Delta_M \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}, \varphi \right) = (-\delta, \varphi), \quad \varphi \in D(E),$$

то есть, как обобщенная функция $U_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ удовлетворяет

$$\Delta_M \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} = -\delta(M, M_0).$$

Определение. Функция $U_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ называется фундаментальным

решением уравнения Лапласа в трехмерном случае.

Замечание 1. Аналогично можно показать, что в двумерном случае

$$\Delta_M \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} = -\delta(M, M_0), \quad M = M(x, y), \quad M_0 = M_0(x_0, y_0).$$

Определение. Функция $V_0(M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в двумерном случае.

Замечание 2. Функции $\frac{1}{r_{MM_0}}$ и $\ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ также обычно называют фундаментальными решениями уравнения Лапласа соответственно в трехмерном и двумерном случаях. Они удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_M \frac{1}{r_{MM_0}} = -4\pi\delta(M, M_0), M = M(x, y, z),$$

$$\Delta_M \ln \frac{1}{r_{MM_0}} = -2\pi\delta(M, M_0), M = M(x, y).$$

Замечание 3. Согласно определению, фундаментальное решение определено не однозначно, а с точностью до решения однородного уравнения $Lu = 0$. Поэтому, строго говоря, фундаментальным решением уравнения Лапласа в трехмерном случае является любая функция $W_0(M)$ вида $W_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + u(M)$, где $u(M)$ - гармоническая функция.

Литература

1. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988.