2) Функция Грина задачи Дирихле

а) Задача Дирихле для уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), M \in D, & (53) \\ u(P) = \mu(P), P \in S, & (54) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D}). & (55) \end{cases}$$

Для всякой функции $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap \bar{C}^{(1)}(\bar{D})$, дважды непрерывно дифференцируемой в открытой области D и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$ имеет место интегральное представление, следующее из третьей формулы Грина:

$$u\left(M_0\right)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P}-u\left(P\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{\Delta u\left(M\right)}{r_{MM_0}}dV_M,\quad M_0\in D, \qquad (56)$$

Пусть теперь $v\left(M,M_0\right)$ – некоторая зависящая от M_0 как от параметра гармоническая функция непрерывная в области $\bar{D}$ вместе с первыми производными, не имеющая нигде особенностей.

С помощью второй формулы Грина можно написать:

$$0=\int_S\left(v\left(P,M_0\right)\frac{\partial u\left(P\right)}{\partial n_P}-u\left(P\right)\frac{\partial v\left(P,M_0\right)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P-$$

$$-\int_D v(M, M_0)\,\Delta u(M)\,dV_M, \quad M_0 \in D, \tag{57}$$

Сложим формулы (56) и (57) и введем обозначение:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0). \tag{58}$$

В результате получим:

$$u(M_0) = \int_S \left(G(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} \right) d\sigma_P -$$

$$-\int_D G(M, M_0)\, f(M)\, dV_P$$

или, учитывая формулы (53), (54), окончательно получим

$$u\left(M_0\right) = -\int_S \frac{\partial G\left(P, M_0\right)}{\partial n_P} \mu\left(P\right) d\sigma_P +$$

$$+\int_D G\left(M, M_0\right) f\left(M\right) dV_M. \qquad (59)$$

При этом функция $v\left(M, M_0\right)$ выбирается таким образом, чтобы для первой краевой задачи $G\left(P, M_0\right) = 0,\ \ P \in S,\ \ M_0 \in D.$

В результате для функции $G\left(M, M_0\right)$ получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_M G\left(M, M_0\right) = -\delta\left(M, M_0\right), M \in D, M_0 \in D, & (60) \\ G\left(P, M_0\right) = 0, P \in S, M_0 \in D. & (61) \end{cases}$$

Определение. Функция $G(M,M_0)$, определяемая формулами (58), (60), (61), называется функцией Грина или функция источника задачи Дирихле для уравнения (53).

Замечание 1. Формула (59) получена с помощью формул Грина, предполагающих выполнения определенных условий в отношении функций $u(M)$ и $G(M,M_0)$ на поверхности S. В формулу (59) входит выражение $\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}$, существование которого на поверхности S не следует непосредственно из определения функции $G(M,M_0)$. При получении формулы (59) мы предполагаем существования решения $u(M)$ задачи Дирихле (53)-(55). Тем самым, даже для тех областей, для которых существует функция источника, удовлетворяющая условиям применимости формул Грина, формула (59) дает явное представление лишь для тех решений $u(M)$, которые удовлетворяют условиям применимости формул Грина (доказывая существования этого класса решений задачи Дирихле). Подробное исследование формулы (59), проведенное А.М.Ляпуновым, показало, что для широкого класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова, она представляет решение задачи Дирихле при весьма общих условиях.

Замечание 2. В случае двух переменных функция Грина определяется следующим образом.

Определение. Функция $G(M,M_0)$,имеющая вид

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+v(M,M_0), \qquad (62)$$

где $v(M,M_0)-$ гармоническая функция в двумерной области G, с границей C зависящая от параметра M_0 и являющаяся решением задачи

$$
\begin{cases}
\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), M \in G, M_0 \in G, & (63) \\
G(P, M_0) = 0, P \in C, M_0 \in G & (64)
\end{cases}
$$

называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Замечание 3. Понятие функции Грина и формула (59) имеют место и для неограниченной области, если рассматривать функции регулярные на бесконечности.

б) Свойства функции Грина задачи Дирихле

1) Для функции Грина справедливы оценки.

$$0 \le G\left(M, M_0\right) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}, \ M \in \bar{D}, \ M_0 \in D. \qquad (65)$$

$$D^\varepsilon = D - \bar{K}^\varepsilon_{M_0}, \bar{K}^\varepsilon_{M_0} = K^\varepsilon_{M_0} + \Sigma^\varepsilon_{M_0}; \quad G\left(P, M_0\right) = 0, P \in S.$$

При малом ε

$$G\left(P, M_0\right) > 0, P \in \Sigma^\varepsilon_{M_0} \Rightarrow G\left(P, M_0\right) > 0, M \in D^\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0 -$ любое число, то $G\left(P, M_0\right) > 0, M \in D.$

Поскольку $v\left(M\right) \in C\left(\bar{D}\right) -$ гармоническая в области D функция и

$$v\left(P, M_0\right) = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}} < 0, P \in S, M_0 \in D,$$

то, применяя принцип максимума, получаем

$$G\left(M, M_0\right) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}},\ M \in \bar{D},\ M_0 \in D.$$

2) Физический смысл функции Грина.

$$G\left(M, M_0\right) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v\left(M, M_0\right).$$

$\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ – потенциал точечного заряда в свободном пространстве.

$v(M, M_0)-$ потенциал поля зарядов, индуцированных на проводящей заземленной поверхности *S*.

$G(M, M_0)-$ потенциал точечного заряда, помещенного в точку $M_0 \in D$.

3) Симметрия функции Грина.

$$u_1(M) = G(M, M_1), u_2(M) = G(M, M_2); D^{\varepsilon} = D - \bar{K}_1^{\varepsilon} - \bar{K}_2^{\varepsilon}$$

$$\Delta u_1(M) = 0, \Delta u_2(M) = 0, M \in D^{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$0 = \int\limits_{D^{\varepsilon}} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dV = \int\limits_{S+\Sigma_1^{\varepsilon}+\Sigma_2^{\varepsilon}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\Sigma_1^{\varepsilon}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma = -\int\limits_{\Sigma_2^{\varepsilon}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Поскольку $u_2\left(M\right)$гармоническая в шаре K_1^{ε},то

$$u_2\left(M_1\right)=\int_{\Sigma_1^{\varepsilon}}\left(u_1\left(P\right)\frac{\partial u_2\left(P\right)}{\partial n}-u_2\left(P\right)\frac{\partial u_1\left(P\right)}{\partial n}\right)d\sigma_P,$$

поскольку $u_1\left(M\right)$ гармоническая в шаре K_2^{ε} то

$$u_1\left(M_2\right)=\int_{\Sigma_2^{\varepsilon}}\left(u_2\left(P\right)\frac{\partial u_1\left(P\right)}{\partial n}-u_1\left(P\right)\frac{\partial u_2\left(P\right)}{\partial n}\right)d\sigma_P,$$

Отсюда $u_2\left(M_1\right)=u_1\left(M_2\right)\Rightarrow G\left(M_2,M_1\right)=G\left(M_1,M_2\right)$. **Ч.т.д**.

Замечание. Симметрия функции Грина является математическим выражением физического **принципа взаимности**: источник и точку наблюдения можно поменять местами.

3) Задача Неймана

Рассмотрим задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M), M \in D, & (66) \\ \dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P} = \mu(P), P \in S, & (67) \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap \bar{C}^{(1)}(\bar{D}). & (68) \end{cases}$$

Необходимое условие разрешимости задачи (66)-(68):

$$\int\limits_S \mu(P) d\sigma_p = 0 \qquad (69)$$

Если строить функцию Грина вида (58) для задачи Неймана по аналогии с функцией Грина для задачи Дирихле, то приходим к противоречию:

Для функции $v(M)$ получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta v(M, M_0) = 0, M \in D, M_0 \in D, & (70) \\ \dfrac{\partial v(P, M_0)}{\partial n_P} = -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial n_P} \left(\dfrac{1}{r_{PM_0}} \right), P \in S, M_0 \in D. & (71) \end{cases}$$

Необходимое условие разрешимости задачи (70)-(71) не выполняется, так как из третьей формулы Грина следует, что

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) d\sigma_P = -1 \neq 0. \qquad (72)$$

Для задачи Неймана нужно строить функцию Грина общего вида:

$$\begin{cases} \Delta G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), M \in D,\ M_0 \in D, & (73) \\ \dfrac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_P} = C_1, P \in S, M_0 \in D, & (74) \end{cases}$$

Откуда следует задача для $v(M, M_0)$:

$$\begin{cases} \Delta v(M, M_0) = 0, M \in D, M_0 \in D, & (75) \\ \dfrac{\partial v(P, M_0)}{\partial n_P} = C_1 - \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial n_P}\left(\dfrac{1}{r_{PM_0}}\right), P \in S, M_0 \in D, & (76) \end{cases}$$

где постоянная C_1 выбирается так, чтобы выполнялось необходимое условие разрешимости (69)

В результате получаем

$$C_1\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)d\sigma_P\Rightarrow C_1=\frac{1}{4\pi\mathbf{S}}\int_S\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)d\sigma_P,$$

где $\mathbf{S}$ – площадь поверхности S .Учитывая формулу (72), окончательно

Получаем $C_1=-\dfrac{1}{\mathbf{S}}$. Краевая задача для функции Грина внутренней задачи Неймана имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\Delta G\left(M,M_0\right)=-\delta\left(M,M_0\right), M\in D,\ M_0\in D, & (77)\\ \dfrac{\partial G\left(M,M_0\right)}{\partial n_P}=-\dfrac{1}{\mathbf{S}}, P\in S, M_0\in D, & (78)\end{cases}$$