Глава 4. Классические ортогональные полиномы

1. Определение классических ортогональных полиномов

Определение. Будем называть систему $\{p_n(x)\}$ полиномов всех степеней, заданных а отрезке $[a, b]$, системой классических ортогональных полиномов, если они ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$ удовлетворяющем интервале (a, b) дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\right)=\tau(x)\rho(x), \qquad (1)$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условию

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b=0, \quad m=0,1,\ldots \qquad (2)$$

Граничные точки a и b отрезка $[a,\ b]$ могут соответственно принимать значения $-\infty$ и $+\infty$.

Функция $\tau(x)$ линейная функция, коэффициенты которой определяются из условий (2).

Функция $\sigma(x)$ имеет вид

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & \text{при} \quad a\neq-\infty, b\neq\infty,\\ (x-a) & \text{при} \quad a\neq-\infty, b=\infty,\\ (b-x) & \text{при} \quad a=-\infty, b\neq\infty,\\ 1 & \text{при} \quad a=-\infty, b=\infty,\end{cases} \tag{3}$$

В уравнение Пирсона (1) для веса $\rho(x)$ входят два параметра A и B линейной функции $\tau(x)$. Решение уравнения (1) имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} e^{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx}. \qquad (4)$$

В самом деле

$$(1) \Rightarrow \frac{\left(\sigma(x)\rho(x)\right)'}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \Rightarrow \ln\left(\sigma(x)\rho(x)\right) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx$$

Формулы (1)-(3) определяют целый класс классических ортогональных полиномов и позволяют получить для их явные представления через функции $\rho(x)$ и $\sigma(x)$.

2. Основные свойства классических ортогональных полиномов

1) Классические ортогональные полиномы по определению ортогональны на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(x)$:

$$\int_a^b p_n(x)p_k(x)\rho(x)dx=0,\quad n\neq k.$$

2) Теорема о нулях. Классический ортогональный полином $p_n(x)$ имеет ровно n простых нулей, расположенные строго внутри отрезка $[a,b]$.

Доказательство. Пусть n – произвольное фиксированное целое положительное число. В силу ортогональности полиномов $p_n(x)$ и $p_0(x)\equiv 1$ имеем

$$\int_a^b p_n(x)1\rho(x)\,dx = 0. \qquad (5)$$

Следовательно, $p_n(x)$ меняет знак на промежутке $(a,\ b)$ в некотором числе κ точек $(k \ge 1)$. Пусть это происходит в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$; $x_i \in (a,\ b)$ и $x_i \ne x_j, i \ne j$. Тогда можно представить полином в виде

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\varphi_n(x) = r_k(x)\varphi_n(x),$$

где $r_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$ – полином степени k, a функция $\varphi_n(x)$ не меняет знак на промежутке $(a,\ b)$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k=n$.

Предположим противное. Так как k не может быть больше n, то пусть $k < n$. Так как система $\{p_n(x)\}$ содержит полиномы всех степеней, то функцию $r_k(x)$ можно представить в виде

$$r_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x), \tag{6}$$

где $a_k \neq 0$. Так как $r_k(x)$ – полином степени $k < n$, то

$$\int_a^b p_n(x) r_k(x) \rho(x) dx = \int_a^b p_n(x) \left(\sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x) \right) \rho(x) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \int_a^b p_n(x) p_i(x) \rho(x) dx = 0 \tag{7}$$

Но, с другой стороны, получаем, что

$$\int_a^b p_n(x) r_k(x) \rho(x) dx = \int_a^b r_k^2(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx \neq 0, \qquad (8)$$

так как функция $r_k^2(x)\varphi_n(x)\rho(x)$ не меняет знак на $(a,\ b)$. Из соотношений (7) и (8) следует противоречие, которое и доказывает теорему. **Чтд**

Поскольку, по теореме Ролля, между двумя нулями дифференцируемой функции лежит по крайней мере один нуль ее производной, то их этого свойства и доказанной теоремы получаем

Следствие. Все нули производной всякого классического ортогонального полинома простые и расположены внутри промежутка $(a,\ b)$.

3) Производные классических ортогональных полиномов также образуют систему классических ортогональных полиномов, но ортогональных с другим весом.

Заметим, что при $m < n$ имеет место формула

$$\int_a^b p_n(x) x^{m-1} \tau(x) \rho(x) dx = 0. \qquad (9)$$

Формула (9) следует из того , что $x^{m-1}\tau(x)$ - полином степени m, который можно представить в виде

$$x^{m-1}\tau(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i p_i(x). \qquad (10)$$

Воспользуемся уравнением Пирсона для вычисления интеграла (9) по частям

$$\int_a^b p_n(x)x^{m-1}\tau(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)x^{m-1}\frac{d}{dx}\big(\sigma(x)\rho(x)\big)dx =$$

$$= p_n(x)\,x^{m-1}\sigma(x)\rho(x)\Big|_a^b - \int_a^b \sigma(x)\rho(x)\frac{d}{dx}\big(p_n(x)\,x^{m-1}\big)dx.$$

Подстановки обращаются в ноль в силу условий (2), поэтому

$$\int_a^b p_n(x)x^{m-1}\tau(x)\rho(x)\,dx = -\int_a^b \sigma(x)\rho(x)\,p_n'(x)x^{m-1}dx -$$

$$-(m-1)\int_a^b \rho(x)\,p_n(x)\sigma(x)\,x^{m-2}dx = 0. \qquad (11)$$

Так как $\sigma(x)x^{m-2}$ полином не выше второй степени, то второй интеграл в правой части формулы (11) равен нулю Отсюда

$$\int_a^b \sigma(x)\rho(x)p_n'(x)x^{m-1}dx = 0, \quad m \neq n.$$

Следовательно, полином $p_n'(x)$ степени $n-1$ ортогонален при $m<n$ всем полиномам степени $m-1$ с весом $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$:

$$\int_a^b p_n'(x)p_m'(x)\rho_1(x)dx = 0, \quad m \neq n. \qquad (12)$$

Для доказательства того, что $p_n'(x)$- классический ортогональный полином, остается доказать, что вес $\rho_1(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона (1).

Вычислим

$$\left(\sigma\rho_1\right)' = \sigma'\rho_1 + \sigma\rho_1' = \sigma'\rho_1 + \sigma\left(\sigma\rho\right)' = \sigma'\rho_1 + \sigma\tau\rho = \sigma'\rho_1 + \tau\rho_1 =$$
$$= \sigma'\rho_1 + \tau\rho_1 = \left(\sigma' + \tau\right)\rho_1 = \tau_1\rho_1.$$

Итак,

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma\left(x\right)\rho_1\left(x\right)\right) = \tau_1\left(x\right)\rho_1\left(x\right),$$

где $\tau_1\left(x\right)$ - линейная функция:

$$\tau_1\left(x\right) = \sigma'\left(x\right) + \tau\left(x\right).$$

Замечание. Методом математической индукции можно показать, что m-е производные классических ортогональных полиномов $p_n^{(m)}(x)$ образуют систему классических ортогональных полиномов, которые ортогональных с весом $\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x)$. При этом линейная функция в уравнении Пирсона будет равна $\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x)$.

4) Дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов

Запишем формулу (9) следующим образом

$$\int_a^b p_n'(x)\left(x^m\right)'\sigma(x)\rho(x)dx = 0.$$

Интегрируя по частям, получим

$$0=\sigma\rho x^m p_n'\Big|_a^b-\int_a^b x^m \frac{d}{dx}\left(\sigma\rho\frac{dp_n}{dx}\right)dx,$$

откуда

$$\int_a^b x^m\left(\sigma\rho\, p_n''+(\sigma\rho)'\; p_n'\right)dx=\int_a^b x^m\left(\sigma\rho\, p_n''+\tau\rho\, p_n'\right)dx=$$

$$=\int_a^b x^m\left(\sigma\, p_n''+\tau\, p_n'\right)\rho dx=0 \qquad (13)$$

при всех $m<n.$

Обозначим $\sigma\, p_n''+\tau\, p_n'=q_n(x)$. Очевидно, $q_n(x)$ – полином степени n .

Представим $q_n(x)$ в следующем виде

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k p_k(x).$$

Из формулы (13) следует, что

$$\int_a^b q_n(x) p_m(x)\rho(x)dx = 0 = \sum_{k=0}^{n} C_k \int_a^b p_m(x) p_n(x)\rho(x)dx =$$

$$= C_m \int_a^b p_m^2(x)\rho(x)dx,$$

откуда $C_m = 0, \quad m < n.$ Таким образом,

$$q_n(x) = C_n p_n(x).$$

Положив $\lambda_n = -C_n$, получим уравнение для $p_n(x)$:

$$\sigma(x)\,p_n''(x) + \tau(x)\,p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0. \qquad (14)$$

Умножив уравнение (14) на $\rho(x)$ и воспользовавшись уравнением Пирсона, запишем уравнение (14) в самосопряженной форме

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n(x)}{dx}\right) + \lambda_n \rho(x)\,p_n(x) = 0. \qquad (15)$$

5) Краевая задача на собственные значения и собственные функции для классических ортогональных полиномов

Заметим, что в силу поведения $\sigma(x)\rho(x)$ на концах интервала $(a,\ b)$, граничные точки $x=a$ и $x=b$ являются особыми точками, в которых ставятся условия ограниченности решения.

Таким образом, классические ортогональные полиномы являются собственными функциями следующей задачи на собственные функции и собственные значения:

,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\dfrac{dy(x)}{dx}\right)+\lambda\rho(x)y(x)=0, \quad x\in(a,b) \qquad (16) \\ |y(a)|<\infty \\ |y(b)|<\infty \\ \end{cases}$$

Найдем выражение для собственных значений задачи (16). Для этого вычислим коэффициент при x^n в уравнении (14). Поскольку

$$\sigma(x)=\sigma(0)+x\sigma'(0)+\frac{x^2}{2}\sigma''; \quad \tau(x)=\tau(0)+x\tau'$$

(заметим, что σ'' и τ' либо постоянные, либо ноль), то коэффициент при x^n равен

$$\left(\frac{\sigma''}{2}n(n-1)+\tau'n+\lambda_n\right)a_n, \qquad (17)$$

где $$p_n\left(x\right)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_{.0}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при x^n и учитывая формулу (17), получим

$$\lambda_n=-n\left(\tau'+\frac{n-1}{2}\sigma''\right) \qquad (18)$$

6) Уравнение (15) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_1\left(x\right)\frac{dp_n\left(x\right)}{dx}\right)+\lambda_n\rho\left(x\right)p_n\left(x\right)=0,$$

где $\rho_1\left(x\right)=\rho\left(x\right)\sigma\left(x\right).$

Так как производные m - го порядка $p_n^{(m)}\left(x\right)$ также являются классическими ортогональными полиномами, то, повторяя приведенные выше рассуждения, поучим для них уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_{m+1}(x)\frac{dp_n^{(m)}(x)}{dx}\right)+\lambda_{nm}\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x)=0,\ m=0,1,2,\ldots,\quad (19)$$

где
$$\lambda_{nm}=-(n-m)\left((n-m-1)\frac{\sigma''}{2}+\tau'_m\right),\ \lambda_{n0}=\lambda_n,\ \rho_m(x)=\sigma^m(x)\rho(x),$$

$$\rho_0(x)=\rho(x),\ \tau_m(x)=m\sigma'(x)+\tau(x),\ \tau_0=\tau(x).$$

7) Получим явное представление для классических ортогональных полиномов.

В силу формулы (19),

$$\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x)=-\frac{1}{\lambda_{nm}}\frac{d}{dx}\left(\rho_{m+1}(x)\,p_n^{(m+1)}(x)\right)$$

и в частности

$$\rho(x)\,p_n(x)=\rho_0(x)\,p_n^0(x)=-\frac{1}{\lambda_{n0}}\frac{d}{dx}\left(\rho_1(x)\,p_n'(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_{n0}\lambda_{n1}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\rho_2(x)\,p_n''(x)\right)=\ldots\frac{1}{A_{nm}}\frac{d^m}{dx^m}\left(\rho_m(x)\,p_n^{(m)}(x)\right),$$

где $$A_{nm}=(-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}(\lambda_{nk}).$$

Так как $p_n^{(n)}=n!a_n$, то полагая $m=n$, получим

$$p_n(x)=\frac{n!a_n}{A_{nm}}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\rho_n(x)=\frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n(x)\,\rho(x)\right),$$

где коэффициент C_n определяется из условия нормировки, поскольку классические ортогональные полиномы, как решения однородного. я дифференциального уравнения (15), определяются с точностью до постоянного множителя.

Формула (20)

$$p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n(x)\rho(x)\right) \qquad (20)$$

называется обобщенной формулой Родрига. Она дает явное аналитическое выражение классических ортогональных полиномов через вес $\rho(x)$.

8) Норма классических ортогональных полиномов

Формула Родрига позволяет легко получить значение квадрата нормы классических ортогональных полиномов

$$\|p_n\|^2 = \int_a^b p_n^2(x)\rho(x)\,dx = a_n \int_a^b x^n p_n(x)\rho(x)\,dx.$$

В самом деле, классический ортогональный полином $p_n(x)$ можно представить в следующем виде

$$p_n(x) = a_n x^n + q_{n-1}(x),$$

где $q_{n-1}(x)$ - полином степени n-1. Поэтому

$$\int_a^b p_n^2(x)\rho(x)dx = \int_a^b p_n(x)p_n(x)\rho(x)dx =$$

$$= \int_a^b p_n(x)\left(a_n x^n + q_{n-1}(x)\right)\rho(x)dx = \int_a^b p_n(x)a_n x^n \rho(x)dx +$$

$$+ \int_a^b p_n(x)\sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)\rho(x)dx = \int_a^b p_n(x)a_n x^n \rho(x)dx$$

Применяя обобщенную формулу Родрига (20), получим

$$\|p_n\|^2 = a_n \int_a^b x^n p_n(x)\rho(x)\,dx = a_n C_n \int_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n(x)\rho(x)\right)dx. \quad (21)$$

Интегрируя n - раз по частям и учитывая, что все подстановки в силу свойств функции $\sigma(x)$, обратятся в ноль получим выражение для квадрата нормы классического ортогонального полинома

$$\|p_n\|^2 = a_n C_n (-1)^n n! \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx. \quad (22)$$

9) Производящая функция классических ортогональных полиномов.

Мы ввели классические ортогональные полиномы как ортогональную на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(x)$ систему полиномов, для которой вес подчинен определенным условиям. При этом мы установили, что так определенные классические ортогональные полиномы являются собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения на ограниченном отрезке, полуоси или всей вещественной оси. Однако можно ввести классические ортогональные полиномы и другим способом – с помощью производящей функции.

Определение. Производящей функцией классических ортогональных полиномов называется функция $\Psi(x,z)$, разложение которой в ряд Тейлора при достаточно малых z имеет вид

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{p}_n(x)}{n!}z^n,\quad \tilde{p}_n(x)=\frac{1}{C_n}p_n(x) \qquad (23)$$

Для получения производящей функции воспользуемся обобщенной формулой Родрига (20)

$$p_n\left(x\right)=\frac{C_n}{\rho\left(x\right)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n\left(x\right)\rho\left(x\right)\right). \qquad (24)$$

Рассмотрим на комплексной плоскости Z функцию $\sigma^n\left(z\right)\rho\left(z\right)$, которая является аналитической функцией в окрестности отрезка $\left[a,b\right]$ действительной оси комплексной плоскости $Z.$ Для ее $n-$ й производной воспользуемся интегральным представлением Коши

$$\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n\left(x\right)\rho\left(x\right)]=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\sigma^n\left(t\right)\rho\left(t\right)}{\left(t-x\right)^{n+1}}dt, \qquad (25)$$

где интеграл берется по контуру, охватывающему точку $t=x.$

Из формул (24)-(25) получаем

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt. \qquad (26)$$

Подставляя выражение (26) в формулу (23), получим

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right]^n dt. \qquad (27)$$

Так как при малом $|z|$ геометрическая прогрессия в (27) сходится, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(t)z}{t-x}\right]^n = \frac{1}{1-\frac{\sigma(t)z}{t-x}} = \frac{t-x}{t-x-\sigma(t)z}. \qquad (28)$$

Из формул (27) и (28) получаем

$$\Psi\left(x,z\right)=\frac{1}{2\pi i\rho\left(x\right)}\int_C\frac{\rho\left(t\right)}{t-x-z\sigma\left(t\right)}dt. \qquad (29)$$

В формуле (29) интегрирование производится по контуру, который содержит точку $t=x$ внутри себя. При $z=0$ подынтегральная функция имеет единственный простой корень $t=x$. Поэтому по непрерывности при достаточно малых $\left|z\right|$ подынтегральная функция по-прежнему будет иметь внутри контура С единственный простой корень $t_0\left(x,z\right)$– корень уравнения

$$t-x-z\sigma\left(t\right)=0. \qquad (30)$$

При этом запись $t_0=t_0\left(x,z\right)$ означает, что тот корень в общем случае квадратного уравнения (30), который при малых $\left|z\right|$ близок к $t=x$.

Интеграл в (29) вычислим с помощью вычетов

$$\int_c \frac{\rho(t)}{t-x-\sigma(t)z}\,dt = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{\rho(t)}{t-x-\sigma(t)z}, t_0\right) = 2\pi i\,\frac{\rho(t_0)}{1-z\sigma'(t_0)}.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для производящей функции:

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)}, \qquad (31)$$

где $t_0 = t_0(x,z)$ - корень уравнения (30).

3. Важные частные случая классических ортогональных полиномов. Полиномы Якоби, Лежандра, Лагерра, Эрмита

1) Полиномы Якоби. Рассмотрим случай $a=-1, b=1$. К этому случаю приводятся все конечные интервалы.

В силу формулы (3)

$$\sigma(x)=(x+1)(1-x)=(1-x^2),$$

и для линейной функции $\tau(x)=Ax+B$ из формулы (4) следует:

$$\rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}e^{\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx}dx=\frac{1}{1-x^2}e^{\int\frac{Ax+B}{1-x^2}dx}dx.$$

Так как $$\frac{Ax+B}{1-x^2}=\frac{B+A}{2(1-x)}+\frac{B-A}{2(1+x)},$$

то $$\rho(x)=(1-x)^{-\frac{B+A}{2(1-x)}-1}(1+x)^{\frac{B-A}{2(1+x)}-1}$$

и $$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha>-1,\ \beta>-1.$$

Из уравнения Пирсона получаем

$$\tau(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{d}{dx}\big(\sigma(x)\rho(x)\big)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\right)=$$

$$=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left(-(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1}+(\beta+1)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}\right)=$$

$$=\left(-(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)(1-x)\right)=-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha.$$

$$\tau(x)=-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$$

Выберем нормировочный множитель в виде

$$C_n=\frac{(-1)^n}{2^n n!}. \qquad (32)$$

Определение. Классические ортогональные полиномы, заданные на отрезке $[-1,1]$ и ортогональные на нем с весом $\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, называются полиномами Якоби и обозначаются $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Обобщенная формула Родрига для полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right)$$

Задача на собственные функции и собственные значения для полиномов Якоби

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\dfrac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right)+\lambda(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=0,\\ \qquad x\in(-1,1), \\ \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\pm1)\right|<\infty.\end{cases} \tag{33}$$

При $\alpha = \beta = -\frac{1}{2},\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и полиномы Якоби будут пропорциональны полиномам Чебышева первого рода:

$$T_n(x) \sim P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

При $\alpha = \beta = \frac{1}{2},\ \rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ и полиномы Якоби будут пропорциональны полиномам Чебышева второго рода:

$$U_n(x) \sim P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x).$$

2) Полиномы Лежандра. Являются частным случаем полиномов Якоби при $\alpha = \beta = 0$. В этом случае $\rho(x) = 1$, $\sigma(x) = \left(1 - x^2\right)$. В силу формулы (1)

$$\tau(x) = \frac{d}{dx}\sigma(x) = -2x.$$

По формуле Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \qquad (34)$$

Задача на собственные функции и собственные значения для полиномов Лежандра имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right)\dfrac{dP_n(x)}{dx}\right) + \lambda_n P_n(x) = 0, \quad x \in (-1,1), & (35) \\ \left|P_n(\pm 1)\right| < \infty, & (36) \end{cases}$$

Собственные значения по формуле (18) имеют вид $\lambda_n = n(n+1)$.
Найдем выражение для квадрата нормы. Имеем по формуле (22):

$$\|P_n\|^2 = a_n(-1)^n n! C_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx. \qquad (37)$$

Вычислим коэффициент a_n при x^n в полиноме Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n}+\ldots) \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2^n n!} = \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)n!}{2^n n! n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2},$$

$$C_n = \frac{1}{2^n n!}. \qquad (38)$$

Подсчитаем интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx = x\left(1 - x^2\right)^n \Big|_{-1}^{1} + 2n\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{n-1} x^2 dx =$$

$$= 2n\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{n-1} (x^2 - 1 + 1) dx = 2n\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{n-1} dx - 2n\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx =$$

$$= 2nI_{n-1} - 2nI_n \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{2n \cdot \left(2n-2\right) \cdot \ldots \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 3} \cdot I_0 = \frac{2^n n! 2^n n!}{\left(2n+1\right)!} 2 = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!} 2, \quad (39)$$

$$\left\|P_n\right\|^2=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}(-1)^n n!\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\left(2^n\right)^2(n!)^2}{(2n+1)!}2=\frac{(2n)!}{(2n+1)!}2=\frac{2}{2n+1},$$

$$\left\|P_n\right\|^2=\frac{2}{2n+1} \tag{40}$$

Производящая функция полиномов Лежандра. Общая формула для производящей функции классических ортогональных полиномов имеет вид

$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)}, \qquad (41)$$

где t_0 – корень уравнения

$$t-x-z\sigma(t)=0. \qquad (42)$$

Для полиномов Лежандра $\rho(x)=1,\ \sigma(x)=1-x^2$ и уравнение (30) принимает следующий вид

$$t-x-(1-t^2)z=0 \Rightarrow zt^2+t-(x+z)=0 \Rightarrow t_0^{(\pm)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4z(z+x)}}{2z}$$

$$t_0^{(\pm)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4z\left(z+x\right)}}{2z}$$

Из двух корней нужно выбрать тот корень, который при малых z наиболее близко расположен к корню $t = x$. Это будет корень

В самом деле: $$t_0^{(+)} = \frac{-1+\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z}.$$

$$\lim_{z\to 0} t_0^{(+)}\left(x,z\right) = \lim_{z\to 0} \frac{-1+\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z} =$$

$$= \frac{\lim_{z\to 0} \dfrac{8z+4x}{2\sqrt{1+4xz+4z^2}}}{2} = \lim_{z\to 0} \frac{8z+4x}{4\sqrt{1+4xz+4z^2}} = x,$$

в то время как

$$\lim_{z\to 0} t_0^{(-)}(x,z) = \lim_{z\to 0} \frac{-1-\sqrt{1+4xz+4z^2}}{2z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{2z}-\sqrt{\frac{1}{4z^2}+\frac{x}{z}+1}\right) = -\infty.$$

Из формулы (31) получаем

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{1+2z\sigma t_0} = \frac{1}{1+\left(-1+4z\left(z+x\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}.$$

Так как

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{P}_n(x)}{n!}z^n,\quad \tilde{P}_n(x)=\frac{P_n(x)}{C_n},\quad C_n=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{P}_n(x)}{n!}z^n=\frac{P_n(x)}{n!}n!(-2)^n z^n=P_n(x)(-2z)^n,$$

то

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{\sqrt{1+4xz+4z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)(-2z)^n.$$

Сделав замену $z\to-\frac{z}{2}$, окончательно получим

$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

3) Полинмы Лагерра. Рассмотрим случай полубесконечного интервала: $a = 0,\ b = \infty.$

В этом случае $\sigma(x) = x,\ \tau(x) = Ax + B$ и из формулы (4) получаем

$$\rho(x) = \frac{1}{x} e^{\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx} dx.$$

Так как $\int\left(A+\frac{B}{x}\right)dx = Ax + B\ln x = Ax + \ln x^{B},$

то $$\rho(x) = x^{\alpha} e^{Ax}, \alpha = B - 1.$$

Для выполнения условия $\lim_{x\to\infty} x^{m}\sigma(x)\rho(x) = 0, m = 0,1,...$ достаточно положить A=-1, откуда получаем

$$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}. \qquad (43)$$

Определение. Классические ортогональные полиномы, заданные на полупрямой $[0,\infty)$ и ортогональные на ней с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, называются обобщенными полиномами Лагерра и обозначаются $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Нормировочный множитель выбирается в виде $C_n=\dfrac{1}{n!}$. $\qquad (44)$

Тогда по обобщенной формуле Родрига (20) получаем явное выражение для обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$$

При постановке задачи на собственные функции и собственные значения для обобщенных полиномов Лагерра необходимо определить поведение решения на бесконечности Введем следующее определение:

Определение. Будем называть функцию $f(x)$ квадратично интегрируемой с весом $\rho(x)$ на интервале (a,b), если существует интеграл

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Из формулы (15) следует уравнение для обобщенных полиномов Лагерра

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda x^{\alpha+1}e^{-x}y=0,\ x\in(0,\infty) \qquad (45)$$

Задача на собственные функции и собственные значения для обобщенных полиномов Лагерра ставится так.

Найти значение параметра λ и отвечающие ему нетривиальные решения уравнения (45), непрерывные и квадратично интегрируемые с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ на полупрямой $[0,\infty)$.

При $\alpha = 0$ получаем частный случай обобщенных полиномов Лагерра – полиномы Лаггера $L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x)$. Для полиномов Лаггера $\rho(x) = e^{-x}$, и с помощью обобщенной формулы Родрига получаем

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^n\right) \qquad (46)$$

Как легко видеть

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n!},$$

и с помощью формулы (22) получаем выражение для квадрата нормы полиномов Лагерра, что обеспечивается надлежащим подбором коэффициента C_n по формуле (44).

$$\|L_n\|^2 = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$$

Дифференциальное уравнение для полиномов Лаггера сразу получается из уравнения (45) при $\alpha = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda x\, e^{-x} y = 0, \quad x \in (0, \infty). \qquad (47)$$

Задача на собственные функции и собственные значения для полиномов Лагерра ставится точно также как и для обобщенных полиномов Лагерра.

Собственные значения λ_n определяются по формуле (18). Так Как

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = Ax + B,\ A = -1,\ B = \alpha + 1\ (\alpha = 0) \Rightarrow \tau(x) = -x + 1,$$

то по формуле (18) получаем

$$\lambda_n = -n\left(-1 + \frac{n-1}{2}\cdot 0 \right) = n.$$

Производящая функция полиномов Лаггера. Воспользуемся общей формулой

$$\Psi(x,z)=\frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-z\sigma'(t_0)},$$

где $t_0=t_0(x,z)-$ корень уравнения $t-x-z\sigma(t)=0.$

В нашем случае $\sigma(x)=x, \rho(x)=e^{-x},$ поэтому уравнение и его корень следующий имеют вид

$$t-x-zt=0, \quad t_0=\frac{x}{1-z},$$

откуда

$$\Psi(x,z)=\frac{e^{\frac{-x}{1-z}}}{e^{-x}}\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}e^{\frac{-xz}{1-z}}.$$

4) Полиномы Эрмита. Рассмотрим случай бесконечного промежутка, когда $a=-\infty, b=\infty$. Тогда $\sigma(x)=1$ и по формуле (4) получаем

$$\rho(x)=e^{\int\tau(x)dx}.$$

Если $\tau(x)=-2x$, то $\rho(x)=e^{-x^2}$.

Определение. Классические ортогональные полиномы, заданные на бесконечной прямой $(-\infty,\infty)$ и ортогональные на ней с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$, называются полиномами Эрмита.

Для полиномов Эрмита нормировочный коэффициент равен $C_n=(-1)^n$.

Тогда по обобщенной формуле Родрига полином Эрмита имеет следующий вид

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \qquad (48)$$

Дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита имеет следующий вид

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x^2}y=0,\ x\in(-\infty,\infty). \qquad (49)$$

Задача на собственные функции и собственные значения для полиномов Эрмита формулируется следующим образом.

Найти значение параметра λ и отвечающие ему нетривиальные решения уравнения (49), непрерывные и квадратично интегрируемые с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$ на бесконечной прямой $(-\infty,\infty)$.

Собственные значения определяются по формуле (18) и равны

$$\lambda_n=-n(-2+0)=2n.$$

Из формулы (48) следует, что коэффициент a_n при x^n в полиноме Эрмита равен $a_n = 2^n$ и по формуле (22) квадрат нормы полиномов Эрмита равен

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Найдем производящую функцию для полиномов Эрмита. Имеем:

$$\sigma(x) = 1, \rho(x) = e^{-x^2} \Rightarrow t - x - z\sigma(t) = t - x - z = 0 \Rightarrow t_0 = x + z.$$

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t_0)} = \frac{e^{-(x+z)^2}}{e^{-x^2}} = e^{-(2xz+z^2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n! C_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(-1)^n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} (-z).^n$$

Заменяя в последней формуле Z на –Z, получим

$$\Psi(x,z)=e^{2xz-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n.$$