Часть вторая. Методы математической физики

Гл. 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Большое число физических задач приводит дифференциалным уравнениям с частными производными второго порядка относительно искомой функции

$$\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_{x_n x_n}\right) = 0.$$

Часто эти уравнения являются линейными относительно старших производных

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_1 x_1} + F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}\right) = 0,$$

где коэффициенты при старших производных a_{ij} являются только функциями независимых переменных. Часть уравнения, включающая старшие производные, называется **главной частью уравнения**, а коэффициенты a_{ij} - **коэффициентами главной части.** Если функция F линейна относительно своих аргументов, то уравнение называется **линейным** (без указания относительно чего):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_1x_1} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c являются только функциями независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Если коэффициенты зависят не только от $x_1, x_2, ..., x_n$, но и от функции u и ее производных первого порядка, то такое уравнение называется **квазилинейным.**

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в случае двух независимых переменных

Рассмотрим случай двух независимых переменных: линейное уравнение относительно старших производных

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0, \qquad (1)$$

и линейное

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f\left(x,y\right). \qquad (2)$$

Рассмотрим невырожденное преобразование переменных

$$\xi=\varphi\left(x,y\right),\quad \eta=\psi\left(x,y\right), \qquad (3)$$

где $\varphi\in C^{(2)}$, $\psi\in C^{(2)}$, а якобиан преобразования отличен от нуля

$$D = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0.$$

В этом случае существует обратное преобразование

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta).$$

С помощью преобразования (3) получатся относительно функции

$$U(\xi,\eta) = u\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$$

новое уравнение эквивалентное данному уравнению (1).

Вопрос: как выбрать функции $\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$ так. чтобы в новых переменных уравнение имело наиболее простую форму?

Преобразуем производные к новым переменным:

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \quad u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}, \qquad (4)$$

$$u_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}.$$

Из формул (1) и (4) получим уравнение в новых переменных:

$$\bar{a}_{11}U_\xi + 2\bar{a}_{12}U_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}U_{\eta\eta} + \bar{F}\left(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta\right) = 0,$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \qquad (5)$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\xi_y + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\eta_x\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

Замечание. Если исходное уравнение – линейное уравнение (2), то в результате преобразования оно остается линейным.

Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad (6)$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \qquad (7)$$

Лемма. Если $z = \varphi(x, y) -$ частное решение уравнения (6), то $\varphi(x, y) = C -$ общий интеграл уравнения (7).

Если $\varphi(x, y) = C -$ общий интеграл уравнения (7), то $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (6).

Доказательство. Поскольку $z=\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (6), то равенство

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0 \qquad (8)$$

есть тождество.

Соотношение $\varphi(x,y)=C$ является общим интегралом (7), если функция y, определенная из соотношения $\varphi(x,y)=C$, удовлетворяет уравнению (7).

Пусть $y=f(x,C)$, тогда по теореме о производной неявной функции получим

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)_{y=f(x,C)}. \qquad (9)$$

Значит $y=f(x,C)$ удовлетворяет уравнению (7), поскольку

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$

$$=\left(a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right)_{y=f(x,C)}=0,$$

так как выражение в фигурных скобках равно нулю при любых x и y, согласно формуле (8).

Пусть теперь $\varphi(x,y)=C-$ общий интеграл уравнения (7).

Докажем, что в этом случае для любой точки (x,y)

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0. \qquad (6)$$

Пусть $(x_0,\, y_0)-$ какая-нибудь точка. Проведем через эту точку интегральную кривую уравнения (7), полагая $C_0 = \varphi\left(x_0, y_0\right)$, и рассмотрим кривую $y = f\left(x, C_0\right)$. Очевидно, $y_0 = f\left(x_0, C_0\right)$.

Для всех точек этой кривой имеем:

$$\left(a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right)_{y=f\left(x,C_0\right)} =$$

$$= a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2\left(x_0, y_0\right) + 2a_{12}\varphi_x\left(x_0, y_0\right)\varphi_y\left(x_0, y_0\right) + a_{22}\varphi_y^2\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение. Уравнение (7) называется **характеристическим** для уравнения (1), а его общие интегралы называются **характеристиками** уравнения (1).

Уравнение (7) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \qquad (11)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (12)$$

Определение. Уравнение (1) называется в точке M уравнением:

1) **гиперболического типа**, если в точке M

$$\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

2) **эллиптического типа**, если в точке M

$$\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

3) **параболического типа**, если в точке M

$$\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$$

Замечание 1. В различных точках области определения уравнение может иметь различный тип. Например, уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (13)$$

является уравнением смешанного типа:

$$a_{11}=y,\ a_{12}=0,\ a_{22}=1,\ \Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y.$$

При $y<0$ уравнение (13) имеет гиперболический тип, при $y>0$ – эллиптический тип, а при $y=0$ – параболический тип.

Замечание 2. Классификация не зависит от невырожденного преобразования переменных, так как $\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)D^2$, где $D=\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y$ - якобиан преобразования.

2. Преобразование дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип.

1) Для уравнения гиперболического типа дискриминант строго больше нуля $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и, следовательно, характеристики действительные и различные (см. формулы (11), (12)). Положим $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$ – действительные семейства характеристик. В силу доказанной леммы получаем $\bar{a}_{11} = 0$, $\bar{a}_{22} = 0$, и уравнение (5) примет вид:

$$U_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad \Phi_1 = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) называется **первой канонической формой** для уравнения гиперболического типа.

Часто пользуются **второй канонической формой** для уравнения гиперболического типа. Положим $\xi=\alpha+\beta,\ \ \eta=\alpha\text{-}\beta,\ V=V(\alpha,\beta).$

Тогда уравнение (14) примет вид:

$$V_{\alpha\alpha}-V_{\beta\beta}=\Phi_2,\ \ \Phi_2=4\Phi_1. \tag{15}$$

Уравнение (15) называется **второй канонической формой** для уравнения гиперболического типа.

2) Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0,$ характеристики комплексные и различные. При этом уравнения (11) и (12) являются комплексно-сопряженными.

Пусть $\varphi(x,y)=C-$ комплексный общий интеграл уравнения (11)

$$\varphi(x,y)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)=C$$

Тогда

$$\psi(x,y)=\xi(x,y)-i\eta(x,y)=C$$

есть общий интеграл уравнения (12).

В комплексных переменных φ и ψ уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и уравнение гиперболического типа

$$V_{\varphi\psi}=\tilde{\Phi}(\varphi,\psi),\ \tilde{\Phi}=-\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

В действительных переменных $\xi=\dfrac{\varphi+\psi}{2},\ \ \eta=\dfrac{\varphi-\psi}{2i}$ уравнение принимает вид

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \Phi, \quad \Phi = 4\tilde{\Phi}. \qquad (16)$$

Уравнение (16) называется **канонической формой** для уравнения эллиптического типа.

Замечание. Подобное преобразование возможно только в том случае, когда коэффициенту уравнения (1) являются аналитическими функциями.

3) Для уравнения параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ и поэтому характеристики действительные и совпадают друг с другом. Мы получаем один общий интеграл уравнения (7): $\varphi(x, y) = C$. Положим $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) \in C^{(2)}$ – любая независимая от $\varphi(x, y)$ функция, так что $D = \dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0.$

В результате, так как $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, получим, что

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2=0.$$

Поэтому

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+a_{22}\xi_y\eta_y=$$

$$\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x+\sqrt{a_{22}}\eta_y\right)=0,$$

и уравнение принимает вид

$$U_{\eta\eta}=\Phi,\quad \Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}. \qquad (17)$$

Уравнение (17) называется **канонической формой** для уравнения параболического типа.

3. Случай многих переменных

Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right), \qquad (18)$$

где a_{ij}, b_i, c –вещественные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$,

причем $a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$

Введем невырожденное преобразование переменных

$$\xi_k = \xi_k\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right),\ \xi_k \in C^{(2)},\ k = 1, 2, \dots, n,$$

$$D = \frac{D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right)}{D\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \dots & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \dots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обозначим

$$U\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)=u\Big(x_1\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right),...,x_n\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)\Big)$$

и пересчитаем производные:

$$u_{x_i}=\sum_{k=1}^{n}U_{\xi_k}\alpha_{ik},\quad \alpha_{ik}=\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_ix_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl}+\sum_{k=1}^{n}U_{\xi_k}\left(\xi_k\right)_{x_ix_j}.$$

В результате уравнение (18) перейдет в линейное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{a}_{kl}U_{\xi_k x\xi}+\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_kU_{\xi_k}+\overline{c}U=\overline{f}\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right),\qquad (19)$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\xi_k\right)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} \qquad (20)$$

и $\bar{a}_{kl}, \bar{b}_k, \bar{c}, \bar{f}$ являются функциями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$Q\left(y_1, \ldots, y_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overset{\circ}{a}_{ij} y_i y_j, \qquad (21)$$

где $\overset{\circ}{a}_{ij} = a_{ij}\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\right)$.

Если провести над переменными y_i линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \overset{\circ}{\alpha}_{ik}\eta_k, \qquad (22)$$

где $\overset{\circ}{\alpha}_{ik} = \alpha_{ik}\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n\right)$, то для квадратичной формы (21) получим новое представление

$$\bar{Q}\left(\eta_1, ..., \eta_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \overset{\circ}{\bar{a}}_{kl}\eta_k\eta_l, \quad \overset{\circ}{\bar{a}}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overset{\circ}{a}_{ij}\overset{\circ}{\alpha}_{ik}\overset{\circ}{\alpha}_{jl}. \tag{23}$$

Сравнивая формулы (20) и (23), приходим к выводу, что коэффициенты главной части уравнения (17) преобразуются аналогично коэффициентам квадратичной формы при линейном преобразовании.

Выбором соответствующего линейного преобразования симметричную матрицу коэффициентов a_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ можно привести к каноническому диагональному виду, когда элемент главной диагонали равен -1, 0, +1, а все недиагональные элементы равны 0.

Определение. Уравнение (18) в точке M_0 называется уравнением:

1) **эллиптического типа**, если все n диагональных элементов $\bar{a}_{kk}^{\circ}$ одного знака;

2) **гиперболического (или нормального гиперболического) типа**, если n-1 коэффициентов $\bar{a}_{kk}^{\circ}$ одного знака, а один коэффициент противоположен им по знаку;

3) **ультрагиперболического типа**, если среди диагональных коэффициентов $\bar{a}_{kk}^{\circ}$ имеется m коэффициентов одного знака и n-m коэффициентов противоположного знака;

4) **параболического типа**. если хотя бы один из коэффициентов $\bar{a}_{kk}^{\circ}$ равен нулю.

Имеет место **закон инерции квадратичных форм**: число положительных, отрицательных и равных нулю диагональных элементов в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Вводя новые независимые переменные ξ_k так, чтобы в точке M_0 было выполнено равенство

$$\alpha_{ik}\left(M_0\right)=\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\left(M_0\right)=\alpha_{ik}^{\circ},$$

например, полагая $\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}^{\circ}x_i$, можно в точке $M_0\left(x_1^{\circ},x_2^{\circ},\ldots,x_n^{\circ}\right)$ уравнение (18) в зависимости от типа уравнения привести к канонической форме для уравнений:

1) **эллиптического типа**

$$\sum_{\kappa=1}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi = 0,$$

2) **(нормального) гиперболического типа**

$$U_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{\kappa=2}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi,$$

3) **ультрагиперболического типа**

$$\sum_{\kappa=1}^{m} U_{\xi_k \xi_k} = \sum_{\kappa=m+1}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi, \quad \left(m > 1,\ n - m > 1\right),$$

4) **параболического типа**

$$\sum_{\kappa=1}^{n-m} \left(\pm U_{\xi_k \xi_k}\right) + \Phi = 0, \quad \left(m > 0\right).$$

Вопрос. Можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M_0, если уравнение имеет во всех точках этой окрестности одинаковый тип?

Чтобы привести уравнение в некоторой окрестности к канонической форме на n функций $\xi_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1, 2, ..., n$ нужно наложить для $k \neq l$ дифференциальные соотношения

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = 0.$$

Число таких соотношений равно $C_n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и при n>3 оно превосходит n - число определяемых функций.

При $n=3$ недиагональные элементы матрицы коэффициентов можно обратить в нуль, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными по модулю, что не позволяет привести матрицу к каноническому диагональному виду путем изменения масштаба.

Итак, при $n \geq 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M_0.

Гл. 2. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач.

В данной главе мы рассмотрим физические явления и процессы, математическими моделями которых служат начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Уравнения гиперболического типа описывают колебательные процессы. Уравнения параболического типа описывают процессы переноса тепла и вещества. Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, которые не зависят от времени.

Дифференциальные уравнения выполняются внутри (или снаружи) области, в которой ищется решение.

Для выделения решения, описывающего изучаемое явление или процесс, необходимо к уравнению добавить некоторые дополнительные условия.

1. Начальные и граничные условия. Условия сопряжения

Дифференциальные уравнения с обыкновенными, а тем более частными производными имеют бесконечное множество решений. Для однозначного определения процесса кроме уравнения необходимо задать еще некоторые дополнительные условия.

Определение. Математическая задача поставлена корректно (по Адамару), если:

1) решение задачи существует;
2) решение задачи единственно;
3) решение задачи устойчиво (то есть непрерывно зависит от входных данных).

Задавая дополнительные условия, нужно помнить, что эти условия должны обеспечивать существование решения (задача не должна быть переопределенной) и единственность решения (задача не должна быть недоопределенной). Желательно также, чтобы выполнялось и условие устойчивости решения (что бывает далеко не всегда).

Рассмотрим основные типы дополнительных условий.

1) **Начальные условия.** Определяют состояние системы в некоторый выделенный момент времени, который считается «начальным» (обычно берут t=0). В случае уравнений гиперболического типа, содержащих вторую производную по времени, нужно задать два начальных условия, которые накладываются на функцию решения и ее первую производную по времени.

Уравнения параболического типа содержат первую производную по времени, поэтому для него ставится одно начальное условие, накладываемое на решение. Решение уравнения эллиптического типа не зависит от времени, потому для него начальное условие не ставится.

2) **Граничные (краевые) условия.** Определяют состояние решения на границе области, в которой ищется решение. Рассмотрим линейные граничные условия. Если, например, изучается процесс колебания струны, то ее концы могут быть закреплены (условие Дирихле), быть свободными (условие Неймана) или быть упруго закрепленными (условие Робена). Граничные условия могут быть более сложными, например, содержать производные по времени. Нелинейные граничные условия оказываются еще более сложными.

Возможны предельные случаи граничных условий. Пусть точка (M,t), в которой ищется решение, расположена «далеко» от границы в том смысле, что возмущение, вышедшее из это точки, за промежуток времени $0<t<T$ в силу конечности скорости распространения возмущения не успевает дойти до границы, то есть в точке (M,t), где $0< t < T$, «граница не чувствуется».

В этом случае приходим к задаче во всем пространстве. Возможен также вариант, когда одни границы «чувствуются», а другие «не чувствуются», в частности, можно получить внешнюю краевую задачу. Во всех этих случаях для обеспечения единственности решения внешних краевых задач необходимо поставить дополнительные **условия на бесконечности**, что порой является весьма непростым делом.

Отметим, что задача в неограниченной области с условиями на бесконечности обычно **называется задачей Коши или начальной задачей**.

3) **Условия сопряжения**. Если коэффициенты уравнения кусочно-непрерывные функции (например, когда характеристики среды, заполняющей область D, в которой ищется решение, кусочно-непрерывны), то в точках разрыва (первого рода) коэффициентов ставятся условия сопряжения. Например, в задаче о распространении тепла в точке разрыва ставятся два условия сопряжения: непрерывность температуры и непрерывность потоков тепла, при условии отсутствия тепловых источников на границе (если на границе раздела сред есть источник тепла, то разность тепловых потоков равна мощности этого источника).

2. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

1) Малые продольные колебания упругого стержня

Рассмотрим стержень, расположенный в положении равновесия вдоль оси Оx от точки x=0 до точки x=l.

Введем следующие обозначения.

1) Мы будем рассматривать продольные колебания, при которых все точки одного сечения испытывают одно и то же отклонение. В этом случае каждое сечение можно описывать одной координатой. Для описания процесса колебания стержня можно воспользоваться переменными Эйлера или переменными Лагранжа. В переменных Эйлера каждая физическая точка стержня в разные моменты времени характеризуется координатой $X(t)$. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x, которую эта точка имела в положении равновесия.

Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент времени находится в точке с координатой $X(t)=x+u(x, t)$, где X – переменная Эйлера. Связь между переменными Лагранжа и Эйлера имеет вид: $x=X-U(X,t)$.

2) Мы будем предполагать, что в пределах сечения свойства стержня постоянны и обозначим линейную плотность стержня как $\rho(x)$. 3) Малыми мы будем называть такие продольные колебания стержня, при которых натяжения, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука: $F(x,t) = k(x)\,\varepsilon(x,t)$, где $k(x)$ - коэффициент упругости, $\varepsilon(x,t)$ - относительное удлинение: $\varepsilon(x,t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)'}{\Delta x}$,

F

$$(\Delta x)' = \{x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)\} - \{x + u(x,t)\} - \Delta x = u(x + \Delta x, t) - u(x,t) \text{ -}$$

абсолютное удлинение, откуда относительное удлинение равно:

$$\varepsilon(x,t) = u_x(x,t).$$

4) Через $f(x,t)$ обозначим плотность продольной внешней силы , приложенной к стержню.

Будем применять следующее **правило знаков**: **силу, с которой часть стержня, расположенная правее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную левее данного сечения, будем учитывать со знаком плюс, а силу, с которой часть стержня, расположенная левее выделенного сечения, действует на часть стержня, расположенную правее данного сечения, будем учитывать со знаком минус,** Для вывода уравнения о малых продольных колебаниях упругого стержня **воспользуемся теоремой об изменении количества движения**: изменение количества движения выделенного участка Δx стержня за время Δt равно импульсу действующих на него сил:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho(\xi)\Big(u_t\big(\xi,t+\Delta t\big)-u_t\big(\xi,t\big)\Big)d\xi =$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} \Big\{k\big(x+\Delta x\big)u_x\big(x+\Delta x,\tau\big)-k\big(x\big)u_x\big(x,\tau\big)\Big\}d\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} d\tau \int_{x}^{x+\Delta x} f\big(\xi,\tau\big)d\xi$$

В дальнейшем будем предполагать, что все входящие в последнюю формулу функции обладают достаточной гладкостью: функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t, функция $k(x)$ непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x)$ и $f(x,t)$ непрерывны.

Воспользуемся формулой среднего значения:

$$\rho\left(\bar{x}\right)\left(u_t\left(\bar{x},t+\Delta t\right)-u_t\left(\bar{x},t\right)\right)\Delta x=$$

$$=\left(k\left(x+\Delta x\right)u_x\left(x+\Delta x,\bar{t}\right)-k\left(x\right)u_x\left(x,\bar{t}\right)\right)\Delta t+f\left(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{t}}\right)\Delta x\Delta t,$$

где $\bar{x},\ \bar{\bar{x}}\in\left[x,x+\Delta x\right],\ \bar{t},\ \bar{\bar{t}}\in\left[t,t+\Delta t\right].$

Поделив на $\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta x\to 0,\ \Delta t\to 0,$ получим одномерное уравнение колебаний на конечном отрезке:

$$\rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right)=\left(k\left(x\right)u_x\left(x,t\right)\right)_x+f\left(x,t\right).$$

Если стержень однородный ($k(x)=k_0,\ \rho(x)=\rho_0$), то уравнение колебаний примет вид:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+F(x,t),$$

где

$$F(x,t)=\frac{1}{\rho_0}f(x,t),\quad a^2=\frac{k_0}{\rho_0}.$$

Построенное уравнение для малых продольных колебаний упругого стержня является уравнением гиперболического типа.

Поставим начально-краевую задачу, моделирующую процесс малых продольных колебаний упругого стержня.

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt}(x,t) = \left(k(x)u_x(x,t)\right)_x + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Модель включает в себя уравнение колебаний, которое выполняется в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, два начальных условия и два граничных условия первого рода (условия Дирихле) на левом и правом концах стержня**.**

Данная модель является детерминированной дифференциальной математической моделью.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u\ (x,t)$ в уравнение приводит его к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимым условием существование классического решения поставленной начально-краевой задачи является **условие согласования начальных и граничных условий:**

$$\varphi(0)=0,\ \ \varphi(l)=0,\ \ \psi(0)=0,\ \ \psi(l)=0.$$

2) Различные виды граничных условий

Рассмотрим более подробно постановку различных типов линейных граничных условий на примере начально-краевой задачи, моделирующей процесс малых продольных колебаний упругого стержня длины l. Для определенности будем рассматривать левый конец стержня $x = 0$.

а) Граничные условия первого рода – граничные условия Дирихле. С физической точки зрения левый конец стержня может находиться в различных условиях: он может быть жестко закреплен (стержень заделан в стену) или же двигаться по определенному закону (стержень жестко прикреплен к плите, совершающей заданное движение). Математически это условие записывается так

$$u(0,t) = \mu(t), t \in [0, \infty),$$

где $\mu(t)-$ заданная функция.

При $\mu = 0$ получается однородное условие Дирихле, а при $\mu \neq 0$ – неоднородное условие Дирихле.

б) Граничные условия второго рода – граничные условия Неймана

Если задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x = 0$ стержня и действующей в продольном направлении, то, используя закон Гука, граничный режим на этом конце можно записать следующим образом ($k(x)$ – коэффициент упругости стержня):

$$k(0)u_x(0,t) = f(t)$$

или

$$u_x(0,t) = v(t), \quad t \in [0,\infty),$$

где $v(t) = \frac{1}{k(0)} f(t)$ – заданная функция. При $v = 0$ получается однородное условие Неймана, а при $v \neq 0$ – неоднородное условие Неймана. Однородное условие Неймана означает, что левый конец стержня свободен, к нему не приложена сила (условие свободного конца).

При $\mu = 0$ получается однородное условие Дирихле, а при $\mu \neq 0$ – неоднородное условие Дирихле.

б) Граничные условия второго рода – граничные условия Неймана

Если задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x = 0$ стержня и действующей в продольном направлении, то, используя закон Гука, граничный режим на этом конце можно записать следующим образом ($k(x)$ – коэффициент упругости стержня):

$$k(0)u_x(0,t) = f(t)$$

или

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \in [0,\infty),$$

где $\nu(t) = \frac{1}{k(0)} f(t)$ – заданная функция. При $\nu = 0$ получается однородное условие Неймана, а при $\nu \neq 0$ – неоднородное условие Неймана. Однородное условие Неймана означает, что левый конец стержня свободен, к нему не приложена сила (условие свободного конца).

в) Граничные условия третьего рода – граничные условия Робена

Предположим, что левый конец стержня закреплен упруго, например, с помощью пружины, коэффициент жесткости которой равен α. Согласно закону Гука, сила упругости, которая стремится вернуть левый конец стержня в положение равновесия, пропорциональна смещению $u(0,t)$.

Граничный режим можно записать следующим образом:

$$k(0)u_x(0,t)=\alpha u(0,t)$$

или

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0, \quad t\in[0,\infty),$$

где $h=\alpha/k(0)$.

Построенное граничное условие называется однородным граничным условием третьего рода, или однородным граничным условием Робена.

На левом конце стержня можно задать комбинацию упругого закрепления и смещения. Стержень с помощью пружин может быть прикреплен к плите, которая перемещается параллельно стержню по некоторому закону, определенному функцией $\nu(t)$. В этом случае получается граничное условие следующего вида

$$k(0)u_x(0,t)=\alpha(u(0,t)-\nu(t))$$

или

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\mu(t),\quad t\in[0,\infty),$$

где $\mu(t)=-h\nu(t),\quad h=\dfrac{\alpha}{k(0)}.$ Построенное условие называется граничным

неоднородным условием третьего рода или граничным неоднородным условием Робена.

г) Более сложные виды граничных условий. Физическая постановка задачи может приводить к более сложным граничным условиям, в частности, нелинейным.

а) Нелинейные граничные условия возникают, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука. Если натяжение на левом конце стержня является нелинейной функцией смещения $u(0,t)$, то граничное условие примет вид

$$u_x(0,t) = \frac{1}{k(0)} \mathbf{P}\left[u(0,t)\right],$$

где $\mathbf{P}\left[u(0,t)\right]$ определяет упругую силу, приложенную к левому концу стержня и действующую в продольном направлению.

Например,

$$u_x(0,t) = \frac{1}{k(0)} u^2(0,t).$$

б) В граничное условие могут входить производные функции по времени. Например, если левый конец стержня испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения, граничное условие записывается в виде

$$k(0)u_x(0,t) = \alpha u_t(0,t), \quad t \in [0,\infty).$$

где α - коэффициент сопротивления среды.

в) Граничные условия могут содержать производные порядков выше первого. Пусть упругий стержень расположен вертикально и верхний его конец закреплен неподвижно – заделан в потолок. К нижнему концу стержня прикреплен массивный абсолютно недеформируемый груз *М,* который находится на площадке и не растягивает и не сжимает стержень. В начальный момент времени $t = 0$ площадку убирают. Предположим, что масса стержня m много меньше масс груза *М*. Будем пренебрегать действием силы тяжести на стержень.

Направим ось x вдоль стержня, так что верхний конец имеет абсциссу $x = 0.$ Тогда на верхнем конце стержня граничным условием будет однородное условие Дирихле

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,\infty),$$

а граничное условие на нижнем конце имеет вид

$$mu_{tt}(l,t) = -k(l)u_x(l,t) + Mg.$$

3) Малые поперечные колебания упругой струны

Пусть в состоянии равновесия струна длины l расположена вдоль оси x и занимает положение от точки $x=0$ до точки $x=l$. . Рассматриваются малые поперечные колебания струны, причем перемещения струны расположены в одной плоскости. Процесс колебания струны можно описать с помощью функции $u(x,t)$, представляющей собой поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t.

Струна рассматривается как гибкая нить, не оказывающая сопротивление изгибу, но оказывающая сопротивление растяжению.

Возникающие в рассматривающем случае в струне напряжения направлены по касательной к ее мгновенному профилю.

Так как рассматриваются малые колебания, то возникающие в струне напряжения определяются законом Гука.

В силу малости колебаний будем учитывать только члены первого порядка $\left(u_x^2\left(x,t\right) \ll 1\right)$.

Подсчитаем удлинение участка струны $\left(x, x+\Delta x\right)$ в момент времени t. Длина дуги этого участка равна

$$\Delta S = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2\left(x,t\right)}\, dx \cong \Delta x.$$

Следовательно, в пределах принятой точности удлинения участка струны в процессе колебаний не происходит.

В силу закона Гука величина натяжения T в каждой точке не изменяется со временем.

Проекция натяжения на оси x и u при учете членов только первого порядка малости равны

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \cong T(x),$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \cong T(x)tg\alpha = T(x)u_x,$$

где α - угол между касательной к кривой $u(x,t)$ при фиксированном значении t и осью x.

,

Так как учитываются только поперечные колебания, то следует учитывать силы инерции и внешние силы, направленные лишь вдоль оси u. Поэтому сумма проекций сил, действующих на выделенный участок струны $(x, x+\Delta x)$ вдоль оси x, равна $T_x(x) - T_x(x+\Delta x) = 0$.

Учитывая, что $T_x \cong T(x)$, получаем, что $T(x) = T(x+\Delta x)$.

В силу произвольности точки x натяжение не зависит от x, то есть

$T(x) = T_0$.

Как и в случае малых продольных колебаний упругого стержня, для вывода уравнения, описывающего малые поперечных колебания упругой струны, воспользуемся вторым законом Ньютона - законом изменения количества движения: изменение количества движения равно импульсу действующих на выделенный участок сил.

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны, а через $f(x,t)$ плотность поперечной внешней силы, приложенной к струне.

Второй закон Ньютона для участка $(x, x+\Delta x)$ струны выглядит следующим образом:

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi)\left(u_t(\xi, t+\Delta t)-u_t(\xi,t)\right)d\xi =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} T_0\left(u_x(x+\Delta x,\tau)-u_x(x,\tau)\right)d\tau + \int_x^{x+\Delta x} d\xi \int_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\tau.$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функции $\rho(x), f(x,t)$ непрерывны при $x \in (0,l), t \in (0,\infty)$.
.

Воспользовавшись формулой среднего значения, поделив результат на $\Delta x \Delta t$ произведение и переходя к пределу при $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0,$ получим дифференциальное уравнение:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t)=T_0u_{xx}(x,t)+f(x,t).$$

Если плотность струны постоянна $\rho(x)=\rho_0,$ то уравнение принимает вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t),$$

где $a^2=\dfrac{T_0}{\rho_0}, F=\dfrac{1}{\rho_0}f.$

Полученные уравнения описывают малые поперечные колебания упругой струны и являются простейшим примером уравнения колебаний.

Для получения детерминированной дифференциальной модели, описывающей малые поперечные колебания упругой струны, к полученному уравнению необходимо добавить начальные и граничные условия.

Начально-краевая дифференциальная детерминированная модель имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + f\left(x,t\right), \quad x \in \left(0,l\right), \quad t \in (0,\infty), \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad x \in \left[0,l\right], \\ u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \; x \in \left[0,l\right], \\ \alpha_1 u_x\left(0,t\right) + \beta_1 u\left(0,t\right) = \mu_1\left(t\right), \quad t \in \left[0,\infty\right), \\ \alpha_2 u_x\left(l,t\right) + \beta_2 u\left(l,t\right) = \mu_2\left(t\right), \quad t \in \left[0,\infty\right), \end{cases}$$

$$\left|\alpha_i\right| + \left|\beta_i\right| \neq 0, i = 1,2.$$

Последнее условие означает, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \left(i = 1,2\right)$ не могут обращаться в ноль одновременно.

Начальные условия задают в начальный момент $t=0$ профиль струны и скорость всех ее точек.

Граничные условия зависят от способов закрепления концов струны. Эти условия могут быть линейными и нелинейными, содержать производные по координате и по времени высших порядков. В линейном случае рассматривают граничные условия первого рода (условия Дирихле), условия второго рода (условия Неймана), условия третьего рода (условия Робена).

В общем случае для левого конца струны граничные условия имеют вид:

$$\alpha_1 u_x(0,t)+\beta_1 u(0,t)=\mu_1(t).$$

При $\alpha_1=0,\beta_1\neq 0$ получается граничное условие Дирихле, при $\alpha_1\neq 0,\beta_1=0$ - граничное условие Неймана, при $\alpha_1\neq 0,\beta_1\neq 0$ - граничное условие Робена.

В общем случае (при $\alpha_i\neq 0,\ \beta_i\neq 0,\ i=1,2$) классическое решение определяется так:

Определение. Функция $u(x,t)$ называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) дважды непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$, один раз непрерывно дифференцируема по x и по t в области $x \in [0,l]$, $t \in [0,\infty)$,

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка $u(x,t)$ в уравнение приводит к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начальных и граничного условий:**

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} + \beta_1 \varphi(0) = \mu(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} + \beta_2 \varphi(l) = \mu(0),$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi(0)}{\partial x} + \beta_1 \psi(0) = \mu_t(0), \quad \alpha_2 \frac{\partial \psi(l)}{\partial x} + \beta_2 \psi(l) = \mu_t(0).$$

4) Малые поперечные колебания мембраны

Введем следующие обозначения:

$u(x, y, t)$ – величина поперечного смещения точки $M(x, y)$ мембраны в момент времени t ;

$\rho(x, y)$ – поверхностная плотность мембраны;

T_0 – натяжение;

$f(x, y, t)$ – плотность импульса внешней поперечной силы, действующий на мембрану в точке $M(x, y)$ в момент t.

Будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, при которых смещение происходит перпендикулярно плоскости мембраны (x, y) и при которых можно пренебречь квадратами величин u_x, u_y.

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны будет иметь следующий вид:

$$\rho(x, y)u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, y, t),$$

где $f(x, y, t)$ – заданная функция.

Пусть в положении равновесия мембрана занимает область G плоскости (x, y), которая ограничена контуром Г.

Как и в одномерном случае, для корректной постановки задачи необходимо задать два начальных условия и граничные условия.

Если граница Г мембраны движется заданным образом в плоскости (x, y), то получаем граничное условие первого рода (граничное условие Дирихле):

$$u(x, y, t) = \mu(x, y, t),\ (x, y) \in \Gamma,\ t \in [0, \infty),$$

Условие закрепленной границы мембраны имеет вид

$$u(x,y,t)=0,\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty).$$

Если к границе приложена заданная сила, то получаем граничное условие второго рода (граничное условие Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к контуру Г, лежащую в плоскости (x,y): $\frac{\partial u}{\partial\ n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,\quad \cos\alpha,\cos\beta-$ направляющие косинусы нормали:

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}.$$

При $\mu(x,y,t)=0$ получаем условие свободной границы:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)=0,\quad (x,y)\in\Gamma,\quad t[0,\infty).$$

Если граница мембраны закреплена упруго и при этом движется по заданному закону в плоскости (x,y), то граничным условием является граничное условие третьего рода (граничное условие Робена):

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t)+\beta(x,y)u(x,y,t)=\mu(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in[0,\infty),$$

где $\alpha(x,y),\ \beta(x,y)-$ заданные на контуре Γ функции.

В зависимости от реальных физических задач граничные условия могут быть и более сложного вида, в частности, нелинейные и содержащие производные по координатам более высокого порядка, а также производные по времени.

Начально-краевая задача, описывающая процесс малых поперечных колебаний мембраны, ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_0\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in G, \ t \in \left(0, \infty\right), \\ u\left(x, y, 0\right) = \varphi\left(x, y\right), \ \ \left(x, y\right) \in \bar{G}, \\ u_t\left(x, y, 0\right) = \psi\left(x, y\right), \ \left(x, y\right) \in \bar{G}, \\ \alpha\left(x, y\right) \dfrac{\partial u}{\partial n}\left(x, y, t\right) + \beta\left(x, y\right) u\left(x, y, t\right) = \mu\left(x, y, t\right), \ \left(x, y\right) \in \Gamma, \ t \in \left[0, \infty\right). \end{cases}$$

5) Уравнения Максвелла

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной изотропной среде. Будем использовать систему СИ, в которой уравнения Максвелла имеют вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}, \\ rot\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ div\mathbf{D} = \rho, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{j}$ – плотность тока проводимости, $\mathbf{j}^{(\text{ст})}$ -плотность сторонних токов, ρ - объемная плотность зарядов.

К восьми скалярным уравнениям добавим материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H},$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon -$ абсолютная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \Phi / м$ - электрическая постоянная, $\mu_a = \mu_0 \mu -$абсолютная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\, \Gamma / м -$ магнитная постоянная.

Плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ связана с вектором $\mathbf{E}$,уравнением, выражающим закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$ где

$\sigma -$ проводимость среды.

Поскольку по предположению среда является однородной и изотропной, то величины $\varepsilon_a,\ \mu_a,\ \sigma$ являются постоянными скалярными величинами.

Первое уравнение Максвелла $rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(\text{ст})}$ является количественным выражением следующего положения: переменное во времени электрическое поле вызывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с объемной плотностью $\mathbf{j}_c = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, где $\mathbf{j}_c$ - плотность тока смещения.

Второе уравнение Максвелла $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ является обобщенным выражением закона Фарадея в дифференциальной форме: изменение во времени магнитного поля в точке М приводит к появлению в той же точке электромагнитного поля, изменяющегося в пространстве.

Закон электромагнитной индукции Фарадея: при изменении магнитного поля, проходящего через замкнутый проводник, в последнем возникает э.д.с., пропорциональная скорости изменения потока. Всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.

Третье уравнение Максвелла $div\mathbf{D} = \rho$ является следствием экспериментально установленного закона Кулона и показывает, что источником электрического поля являются электрические заряды. Это есть дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Теорема Гаусса: поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Четвертое уравнение Максвелла $div\mathbf{B} = 0$ показывает, что магнитное поле имеет вихревой характер и силовые линии вектора магнитной индукции всегда замкнутые.

Подействуем на правую и левую части первого уравнения Максвелла оператором rot и учтем формулу

$$rot\ rot\mathbf{H} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

В результате получим:

$$rot\ rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} + \sigma rot\mathbf{E} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)} = grad\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H}.$$

Учитывая, что $rot\mathbf{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и $div\mathbf{H} = 0$, получим векторное уравнение колебаний:

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{H} + rot\ \mathbf{j}^{(cm)}$$

В декартовой прямоугольной системе координат данное уравнение можно записать покомпонентно, причем для каждой компоненты $H_x,\ H_y,\ H_z$ получается скалярное волновое уравнение вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f\left(M, t\right),$ где

$\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_a},\ \ a^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_a \mu_a},\ \ \alpha -$ коэффициент затухания, a - скорость электромагнитных волн.

3. Физические задачи приводящие к уравнениям параболического типа

1) Уравнение теплопроводности

Получим уравнение теплопроводности, описывающее процесс распространения тепла.

Это уравнение относится к уравнениям параболического типа.

Введем следующие обозначения:

1) $u(M,t)$ – температура тела D в момент времени t, макроскопическая характеристика теплофизических свойств тела;

2) $\rho(M)$ - плотность тела;

3) $C(M)$ – удельная теплоемкость;

4) $K(M)$ – коэффициент теплопроводности;

5) $f(M,t)$ – объемная плотность источников (стоков) тепла.

Для вывода уравнения воспользуемся законом Фурье:

Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через площадку $d\sigma$ за промежуток времени dt, равно

$$dQ = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma dt,$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по нормали к площадке.

Рассмотрим тело D, ограниченное поверхностью S: $\bar{D} = D \cup S$.

Обозначим через $\vec{n}$ внешнюю нормаль к поверхности S.

Для вывода уравнения теплопроводности воспользуемся **методом баланса (законом сохранения тепла).** Выделим внутри тела D элементарный объем ΔV с граничной поверхностью ΔS и запишем для него уравнение баланса тепла.

1) Количество тепла, которое необходимо сообщить объему ΔV в течение промежутка времени Δt для повышения его температур на величину $\Delta u = u(M, t+\Delta t) - u(M, t)$, равно:

$$\Delta Q_1 = \iiint\limits_{\Delta V} C(M)\rho(M)\big(u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\big)dV_M$$

Это количество тепла поступает в объем ΔV за счет теплообмена через поверхность ΔS с телом D, а также за счет действия источников (стоков) тепла, расположенных внутри объема ΔV.

2) Для учета теплообмена объема ΔV с телом D используем закон Фурье:

$$\Delta Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} d\tau \iint_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,\tau)\,d\sigma_P d\tau$$

Для преобразования поверхностного интеграла в объемный воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

Если вектор-функция $\vec{A}(M)$ непрерывно дифференцируема в D области и непрерывна в области $\bar{D}$: $\vec{A} \in C^{(1)}(D) \cap C(\bar{D})$, то

$$\iint_S \vec{A}\,d\vec{\sigma} = \iiint_D div\vec{A}\,dV,$$

где $d\vec{\sigma} = \vec{n}\,d\sigma$, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S, $\vec{A}d\vec{\sigma}$ поток вектора $\vec{A}$ через $d\sigma$ площадку $div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ - дивергенция вектора $\vec{A}$.

Положив в формуле Остроградского-Гаусса $\vec{A} = k(M)\,grad u(M,t)$, где

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$ получим

$$\iint\limits_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t)\,d\sigma_P = \iiint\limits_{\Delta V} div\big(k(M)\,grad u(M,t)\big)dV_M$$

и окончательно:

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} d\tau \iiint\limits_{\Delta V} div\big(k(M)\,grad u(M,t)\big)dV_M$$

Для справедливости применимости формулы Остроградского – Гаусса необходимо предположить, что по переменной M

$$u \in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\bar{D}),\; k \in C^{(1)}(D)\cap C(\bar{D}).$$

3) Внутри объема ΔV за промежуток времени Δt может выделяться или поглощаться количество ΔQ_3, например, за счет прохождения тока, или вследствие химических реакций:

$$\Delta Q_3 = \int\limits_t^{t+\Delta t} d\tau \iiint\limits_{\Delta V} f\left(M,t\right) dV_M .$$

Уравнение баланса тепла: $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3.$

В левой части формулы изменение количества тепла в объеме D за время Δt, а в правой части – причины, вызывающие это изменение.

Для получения дифференциального уравнения предположим, что функция $u\left(M,t\right)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D и один раз непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$ по M и один раз непрерывно дифференцируема в области D и непрерывна в области $\bar{D}$ по t: $u\left(M,t\right) \in C_{M,t}^{(2,1)}\left(D\right) \bigcap C_{M,t}^{(1,0)}\left(\bar{D}\right).$

Применяя формулу среднего значения и переходя к пределу при $\Delta V \to M,\ \Delta t \to 0$, получим уравнение теплопроводности:

$$C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\Big(k(M)\,grad\,u(M,t)\Big) + f(M,t).$$

Для вывода граничных условий нужно воспользоваться законом Ньютона:

Количество тепла Q, протекающее в единицу времени через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, равно $Q = \sigma h(u - u_0)$, где $u_0(M,t) -$ температура окружающей среды, $u(P,t) -$ температура поверхности тела, h (P) - коэффициент теплообмена.

Поскольку тепловой поток на поверхности S равен $k(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали, то граничное условие можно записать в виде

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t),\ \ P \in S,\ t \in [0,\infty).$$

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C(M)\rho(M)u_t(M,t) = div\big(k(M)\,grad\ u(M,t)\big) + f(M,t),\ (M,t)\in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M),\ M\in \bar{D}, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t),\ P\in S,\ t\in[0,\infty), \end{cases}$$

где

$$Q_\infty = D\times(0,\infty) \equiv \big\{(M,t): M\in D,\ t\in(0,\infty)\big\},\ \ \bar{Q}_\infty = \bar{D}\times[0,\infty),\qquad \frac{\partial u}{\partial n} -$$

производная по внешней нормали, коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$C(M)>0,\ \rho(M)>0,\ k(M)>0,\ M\in D,\ \ \alpha(P)\ge 0,\ \beta(P)\ge 0,\ \alpha(P)+\beta(P)>0.$$

Определение. Функция *u(M,t)* называется классическим решением поставленной начально-краевой задачи, если она:

1) принадлежит следующему классу $u(M,t) \in C_{M,t}^{(2,1)}(Q_\infty) \cap C_{M,t}^{(1,0)}(\bar{Q}_\infty)$;

2) удовлетворяет уравнению в классическом смысле (подстановка *u* (*M*,*t*) в уравнение приводит его к тождеству),

3) непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.

Необходимое условие существование классического решения – **условие согласования начального и граничного условий:**

$$\alpha(P)\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} + \beta(P)\varphi(P) = \mu(P,0), \quad P \in S.$$

В одномерном случае уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$C(x)\rho(x)u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)+f(x,t).$$

В случае постоянных коэффициентов $C(x)=C_0,\ \rho(x)=\rho_0,\ k(x)=k_0$ одномерное уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$u_t=a^2u_{xx}+F(x,t),\quad a^2=\frac{k_0}{C_0\rho_0},\quad F(x,t)=\frac{1}{C_0\rho_0}.$$

4. Стационарные процессы

Стационарные процессы описываются уравнениями эллиптического типа, в которые не входит время. Поэтому для них ставятся не начально-краевые, а краевые задачи.

1) Стационарное распределение тепла

Если в некоторой системе плотность источников (стоков) тепла не зависит от времени и граничные условия также не зависят от времени, то с течением времени в такой системе установится некоторое постоянное распределение тепла, то есть система будет выходить на стационарный режим. Распределение температуры в такой системе будет описываться уравнениями эллиптического типа, которое можно получить из уравнения теплопроводности параболического типа, учитывая, что $u(M,t)=u(M)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $f(M,t)=f(M)$.

Стационарное уравнение теплопроводности примет вид

$$div\left(k(M)\, grad\ u(M)\right) = -f(M).$$

Граничные условия ставятся так же, как и для уравнения теплопроводности.

В случае постоянного коэффициента $k(M) = k_0$ неоднородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta u(M) = F(M), \quad F(M) = \frac{1}{k_0} f(M),$$

а однородное стационарное уравнение теплопроводности переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta u(M) = 0.$$

2) Задачи электростатики

В электростатическом случае из уравнений Максвелла получаем:

$$rot\ \vec{E}(M)=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M)=-grad\ u(M).$$

Здесь введена скалярная функция *u(M)* таким образом, что уравнение $rot\ \vec{E}(M)=0$ выполняется автоматически. Если теперь воспользоваться дивергентным уравнением

$$div\left(\varepsilon(M)\vec{E}(M)\right)=\rho(M),$$

то приходим к уравнению электростатики

$$div\left(\varepsilon(M)grad\ u(M)\right)=-\rho(M).$$

В случае постоянного коэффициента $\varepsilon(M)=\varepsilon_0$ мы снова получаем уравнение Пуассона

$$\Delta u(M)=-f(M),\ \ f(M)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(M)$$

и уравнение Лапласа

$$\Delta u(M)=0.$$

3) Установившиеся колебания

Если на систему, обладающую затуханием, действует периодическая вынуждающая сила с частотой ω, то с течением времени в системе устанавливаются колебания с частотой вынуждающей силы ω.

Уравнение колебаний для диссипативной среды имеет вид:

$$u_{tt} + \alpha u_t = a^2 \Delta u + F(M,t),$$

где

$$F(M,t) = F(M)e^{-i\omega t}, u(M,t) = U(M)e^{-i\omega t}.$$

Отсюда получаем

$$\left(-\omega^2 - i\alpha\omega\right)U(M) = a^2 \Delta U + F(M)$$

и, вводя обозначение $k^2 = \dfrac{\omega^2 + i\alpha\omega}{a^2}$, приходим к **уравнению Гельмгольца**

$$\Delta U + k^2 U = f(M).$$

4) Установившиеся электромагнитные колебания

Получим теперь уравнение, описывающее установившиеся электромагнитные колебания. Уравнение получим для изотропной и однородной среды, свободной от сторонних токов и зарядов. Таким образом, имеем $\varepsilon_a = const,\ \ \mu_a = const,\ \ \rho = 0,\ \ \mathbf{j}^{(\text{ст})} = 0$ и система уравнений Максвелла примет вид:

$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \varepsilon_a \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \\ rot\mathbf{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ div\mathbf{E} = 0, \\ div\mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Предположим, что функции $\mathbf{E}(M,t)$, $\mathbf{H}(M,t)$ зависят от времени по гармоническому закону:

$$\mathbf{E}(M,t)=\mathbf{E_0}(M)e^{-i\omega t},\ \mathbf{H}(M,t)=\mathbf{H_0}(M)e^{-i\omega t}.$$

Система уравнений Максвелла примет следующий вид;

$$\begin{cases} rot\mathbf{H_0}=-i\omega\varepsilon_a\mathbf{E_0}-i\omega\sigma\mathbf{E_0}=-i\omega\left(\varepsilon_a+i\dfrac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E_0}=-i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E_0}, \\ rot\mathbf{E_0}=i\omega\mu_a\mathbf{H_0}, \\ div\mathbf{E_0}=0, \\ div\mathbf{H_0}=0, \end{cases}$$

где $\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_a+i\dfrac{\sigma}{\omega}$ – комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Подействуем на первое уравнение системы оператором rot:

$$rot\ rot\mathbf{H_0} = grad\ div\mathbf{H_0} - \nabla^2\mathbf{H_0} = -i\omega\tilde{\varepsilon}_a rot\mathbf{E_0} = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\mathbf{H_0}.$$

Обозначая $k^2 = \omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a$, получим **однородное векторное уравнение Гельмгольца:**

$$\nabla^2\mathbf{H_0} + k^2\mathbf{H_0} = 0.$$

Аналогичным образом получается **векторное уравнение Гельмгольца** для функции $\mathbf{E_0}(M)$:

$$\nabla^2\mathbf{E_0} + k^2\mathbf{E_0} = 0.$$

5) Постановка краевой задачи

Отличие в постановке краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих стационарные процессы, от начально-краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов заключается в отсутствии начальных условий. Краевая задача в области $\bar{D} = D \bigcup S$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} div\left(k(M)\,grad\ u\right) = -f(M), \quad M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta(P)u(P) = \mu(P), \quad P \in S. \end{cases}$$

Если D – внешняя область, то для того, чтобы решение было единственным, необходимо добавить условия на бесконечности. В частности, если задача ставится во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то ставятся только условия на бесконечности.

Определение. Функция $u(M)$ называется классическим решением поставленной краевой задачи, если она обладает следующими свойствами:

1) дважды непрерывно дифференцируема в области D и один раз непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$: $u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$;

2) удовлетворяет в области D уравнению в классическом смысле;

3) непрерывно примыкает к граничному условию.

5. Общая математическая модель в ограниченной области

Если D – ограниченная область с границей S, то общем случае начально-краевая задача для этой области ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u] + f(M,t),\ M \in D,\ t \in (0,\infty), \\ u(M,0) = \varphi_0(M),\dots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = \varphi_m(M),\ M \in \bar{D}, \\ N_p u(P,t) = \mu(P,t),\ P \in S,\ t \in [0,\infty), \end{cases}$$

где операторы $P_t[u]$, $L_M[u]$, $N_p[u]$ определяются так:

$$P_t\left[u\left(M,t\right)\right]=\sum_{k=1}^{m}a_m\left(t\right)\frac{\partial^m u}{\partial t^m},\ M\in D,t\in\left(0,\infty\right),$$

$$L_M\left[u\left(M,t\right)\right]=div\left(k\left(M\right)gradu\right)-q\left(M\right)u,\ M\in D,t\in\left(0,\infty\right),$$

$$N_P\left[u\left(P,t\right)\right]=\alpha\left(P\right)\frac{\partial u\left(P,t\right)}{\partial n_P}+\beta\left(P\right)u\left(P,t\right),\ P\in S,t\in\left[0,\infty\right).$$