Часть I. Специальные функции математической физики

Глава IV. Замкнутые и полные системы функций

§ 1. Вспомогательные положения анализа

1. Пространство Лебега $\mathbf{L}_2(\mathbf{D})$. Интеграл Лебега

Последовательность $\{\varphi_n\} \subset E$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N$ и всех натуральных p выполняется неравенство $\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| < \varepsilon$.

Нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства. Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

Пространство со скалярным произведением называется **гильбертовым**, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Множество L, лежащее в линейном пространстве E: $L \subset E$, называется **линейным многообразием (линейным множеством),** если для любых $f, g \in L$ и любых скалярах $\lambda,\ \mu$ $\lambda f + \mu g \in L.$

Линейное многообразие, L лежащее E: $L \subset E$, называется **плотным в** E, если для любого $f \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\varphi \in L$ такой, что $\|f - g\| < \varepsilon.$

Пусть D - ограниченная область E^m, то есть ограниченное, связное, открытое множество. Предположим также, что область D - **кубируема**, то есть, определен m- кратный интеграл Римана по $\bar{D}$.

Совокупность всех непрерывных на $\bar{D}$ функций, квадратично интегрируемых по области $\bar{D}$, то есть для которых существует интеграл $\int_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV$, обозначим через $\hat{L}_2(\bar{D})$.

Множество $\hat{L}_2(\bar{D})$- линейное, то есть, если $f,\ g \in \hat{L}_2(\bar{D})$, то тогда и $\lambda f + \mu g \in \hat{L}_2(\bar{D})$, где λ и μ - константы. Это утверждение вытекает из неравенства $|\lambda f + \mu g|^2 \le 2|\lambda|^2 |f|^2 + 2|\mu|^2 |g|^2$.

На множестве функций $\hat{L}_2(\bar{D})$ введем скалярное произведение и норму по следующим формулам (черта означает комплексное сопряжение):

$$(f,g) = \int_{\bar{D}} f(M)\bar{g}(M) dV_M \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = (f,f) = \int_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV_M,$$

превращая тем самым множество $\hat{L}_2(\bar{D})$ в линейное нормированное пространство со скалярным произведением. Сходимость по норме в пространстве $\hat{L}_2(\bar{D})$ будет сходимостью в среднем.

Однако построенное пространство $\hat{L}_2(\bar{D})$ **не будет полным**. Его можно **пополнить**, опираясь на теорему о пополнении нормированного пространства:

Теорема. Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\tilde{E}$. Пространство $\tilde{E}$ при этом называется **пополнением пространства** E.

Пополнение пространство со скалярным произведением является гильбертовым пространством.

Пополняя пространство $\hat{L}_2\left(\bar{D}\right)$, мы получаем гильбертовое пространство $L_2\left(D\right)$, которое называется **пространством Лебега.**

Справка. Лебег Анри Леон (Lebesgue Henri Leon) , 28.06.1875-26.07.1941, великий французский математик.

Всюду в дальнейшем под нормой мы будем понимать норму в пространстве Лебега.

Две фундаментальные последовательности $\{\varphi_n(M)\}$ и $\{\psi_n(M)\}$ называются **эквивалентными в среднем**, если $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|=0.$

Скалярное произведение в пространстве $L_2\left(D\right)$ определим как предел

$$\left(f,g\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f_n,g_n\right)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\bar{D}} f_n\left(M\right)\bar{g}_n\left(M\right)dV_M,$$

где $\left\{f_n\right\}$ и $\left\{g_n\right\}$ - фундаментальные в среднем последовательности функций из $\hat{L}_2\left(\bar{D}\right)$, сходящиеся в среднем к элементам f и g пространства $L_2\left(D\right)$ соответственно. При этом можно брать любую из фундаментальных последовательностей $\left\{f_n\right\}$ сходящихся к $f\left(M\right)$, и любую из фундаментальных последовательностей $\left\{g_n\right\}$ сходящихся к $g\left(M\right)$, то есть любую из эквивалентных последовательностей.

Норма в пространстве $L_2\left(D\right)$ определяется как предел:

$$\|f\|^2=\lim_{n\to\infty}\left(f_n,f_n\right)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\bar{D}}\left|f_n\right|^2dV_M.$$

Последовательность функций $\left\{\varphi_k\right\}$ из $L_2\left(D\right)$ называется сходящейся к функции $\varphi\in L_2\left(D\right)$ в пространстве $L_2\left(D\right)$, если $\left\|\varphi_k-\varphi\right\|\to 0,\ k\to\infty;$ при этом пишут $\varphi_k\to\varphi,\ k\to\infty$ в $L_2\left(D\right)$.

Множество $M \subset E^m$ **имеет меру нуль**, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто конечной или счетной системой шаров, суммарный объем которых меньше ε.

Примеры множеств меры нуль.

1) Конечное число точек отрезка $[a,b]$.
2) Множество рациональных чисел.
3) Любое счетное множество точек (обратное неверно: существуют множества меры нуль, которые не являются счетными).

Говорят, что некоторое свойство выполняется **почти всюду,** если оно выполняется с точностью до значений на множестве меры нуль.

Если функции $f_1(M)$ и $f_2(M)$ равны почти всюду, то они называются **эквивалентными**: $f_1(M) \sim f_2(M)$.

Пример. Рассмотрим функцию Дирихле $D(x)$:

$D(x)$=1, если *x* рациональное; $D(x)$=0, если *x* иррациональное.

Она эквивалентна функции тождественно равной нулю.

Два элемента f и g пространства $L_2(D)$: $f, g \in L_2(D)$ **тождественно равны в** $L_2(D)$, если они **равны почти всюду на** *D,* то есть с точностью до значений на множестве меры нуль.

Нулевым элементом пространства $L_2(D)$ называется функция равная нулю почти всюду на *D*.

В результате пополнения пространства $\hat{L}_2(\bar{D})$ до пространства Лебега $L_2(D)$ мы присоединяем к пространству $\hat{L}_2(\bar{D})$ некоторые предельные идеальные элементы (мы не будем рассматривать сам процесс пополнения). Заметим, что интеграл от предельных элементов $\hat{f} \in L_2(D)$, понимаемый в смысле Римана, может уже не существовать.

Напомним **необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману** [2]:

Для того, чтобы ограниченная на отрезке $\left[0,\ 1\right]$ функции $f\left(x\right)$ была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывна почти всюду на отрезке $\left[0,\ 1\right]$.

Интеграл от предельных элементов понимается в смысле Лебега.

Примем по определению: для элементов $f, g \in L_2\left(D\right)$ назовем введенное скалярное произведение $\left(f, g\right)$ m**- кратным интегралом Лебега от произведения** $f\bar{g}$ **по области** D, то есть

$$\left(L\right)\int\limits_D f\left(M\right)\bar{g}\left(M\right)dV_M = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{D}} f_n\left(M\right)\bar{g}_n\left(M\right)dV_M.$$

Выбирая, в частности, $g\left(M\right)=1$, получим для $f \in L_2\left(D\right)$

$$\left(L\right)\int\limits_D f\left(M\right)dV_M = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{D}} f_n\left(M\right)dV_M.$$

Знаком $\left(L\right)$ в левых частях двух последних равенств помечен интеграл в смысле Лебега. В правых частях стоят интегралы в смысле Римана.

Определение интеграла Лебега не зависит от выбора конкретной последовательности $\left\{f_n\left(M\right)\right\}$ из класса эквивалентных последовательностей сходящихся к функции $f\left(M\right)$: для всех эквивалентных последовательностей, сходящихся к $f\left(M\right)$, интеграл Лебега от функции $f\left(M\right)$ будет иметь одно и то же значение.

Пространство Лебега можно определить как пространство функций квадратично интегрируемых (суммируемых) по Лебегу на D.

Аналогично вводится пространство $L_{2,\rho}\left(D\right)$ квадратично интегрируемых по Лебегу на D с весом $\rho\left(M\right)>0$, то есть тех, для которых существует интеграл $\left(L\right)\int\limits_D \left|f\left(M\right)\right|^2 \rho\left(M\right)dV_M$.

Скалярное произведение о норма в пространстве $L_{2,\rho}(D)$ вводятся следующим образом:

$$(f,g)_{L_{2,\rho}} = \int\limits_{\bar{D}} f(M)\bar{g}(M)dV_M \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{2,\rho}}^2 = (f,f) = \int\limits_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV_M,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Замечание. Мы ввели понятие интеграла Лебега, используя так называемую схему Даниеля, в которой не требуется предварительной разработки теории меры [1]. Такой подход был предложен английским математиком Перси Джоном Даниелем в 1918 году. Введение интеграла Лебега, основанное на предварительной разработке теории меры, изложено в книгах [2] и [3].

2. Замкнутые и полные системы функций в пространстве $\mathbf{L_2(D)}$

Функции $f,g \in L_2(D)$ называются ортогональными в пространстве $L_2(D)$, если $(f,g)=0$.

Пусть задана бесконечная система ортогональных функций из $L_2(D)$:

$$\{\varphi_n\} \subset L_2(D),\ (\varphi_n,\varphi_k)=0,\ n \neq k.$$

Определение. Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ называется **полной** в $L_2(D)$, если не существует функции $f(M) \in L_2(D)$, отличной от нуля на D почти всюду и ортогональной ко всем функциям данной системы.

То есть, если

$$(f,\varphi_n) = \int\limits_{D} f(M)\bar{\varphi}_n(M)dV_M = 0,\ n=1,2,...,$$

то $f(M)=0$ почти всюду на D.

Определение. Ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ называется **замкнутой** в $L_2(D)$, если для любой функции $f(M)\in L_2(D)$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N=N(\varepsilon)>0$ и набор коэффициентов $\{C_n\}$, $n=1,2,..,N,$ что $\left\| f(M)-\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n\varphi_n \right\|_{L_2(D)} <\varepsilon.$

Это означает, что любая функция $f(M)\in L_2(D)$ может быть с любой наперед заданной точностью аппроксимирована в среднем конечной линейной комбинацией функций данной системы.

Будем в дальнейшем считать, что ортогональная система функций $\{\varphi_n\}$ **ортонормированная**, то есть $(\varphi_n,\varphi_k)=\delta_{n,k};\ n,k=1,2,...$

Для ортонормированной в $L_2(D)$ системы функций **необходимым и достаточным условием замкнутости является выполнение равенства Парсеваля-Ляпунова- Стеклова**: для любой функции $f(M)\in L_2(D)$ квадрат нормы равен сумме квадратов коэффициентов Фурье в разложении функции $f(M)$ по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}$:

$$\|f\|^2=\int_D |f|^2\,dV=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^2,$$

где $f_n=(f,\varphi_n)=\int_D f(M)\bar{\varphi}_n(M)\,dV_M$.

Нетрудно показать, что **полнота системы есть следствие ее замкнутости.** В самом деле, пусть функция $f(M)\in L_2(D)$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_n(M)\}$. Тогда $f_n = (f, \varphi_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$. Но если система $\{\varphi_n(M)\}$ замкнутая, то для нее выполняется равенство Парсеваля-Ляпунова-Стеклова и $\int\limits_D |f|^2 dV = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = 0$, откуда следует, что $f(M) = 0$ почти всюду на D, то есть система $\{\varphi_n(M)\}$ является полной.

Можно также показать, **что замкнутость системы есть следствие ее полноты.**

Таким образом, **в пространстве $L_2(D)$ понятия полноты и замкнутости ортонормированной системы функций являются эквивалентными.**

Для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ ряд Фурье по замкнутой ортонормированной системе сходится к этой функции в норме $L_2(D)$, то есть в среднем.

Множество функций $M \in L_2(D)$ называется плотным в $L_2(D)$, если для для любой функции $f(M) \in L_2(D)$ существует последовательность функций из $M : \{\varphi_n\} \subset M,$ сходящихся к $f(M)$ в пространстве $L_2(D)$.

Например, множество функций $f(M) \in C(\bar{D})$, непрерывных на $\bar{D}$ плотно в пространстве $L_2(D)$, оттуда, в илу теоремы Вейерштрасса и ограниченности области D (теорема Вейерштрасса справедлива только для ограниченных множеств) следует, что множество полиномов является плотным в пространстве $L_2(D)$.

3. Пространства Соболева $W_2^1(D)$ и $\hat{W}_2^1(D)$

Пусть $D \subset E^3$ - односвязная область с достаточно гладкой границей S: $\bar{D} = D \cup S.$

В области $\bar{D}$ рассмотрим линейное пространство всевозможных непрерывно дифференцируемых функций $u,\ v$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_{\bar{D}} u\bar{v}dV + \int_{\bar{D}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\} dV$$

и нормой

$$\|u\|^2 = (u,u) = \int_{\bar{D}} |u|^2 dV + \int_{\bar{D}} \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 \right\} dV.$$

Получим пространство со скалярным произведением $\hat{W}_2^1(\bar{D})$., пополняя которое по введенным нормам, получим **пространство Соболева** $W_2^1(D)$.

Пусть $\{u_n(M)\}$ - фундаментальная последовательность в $\hat{W}_2^1(\bar{D})$, то есть $\|u_n - u_m\|_{W_2^1} \to 0$ при $n,m \to \infty$. Тогда в $L_2(D)$ будут фундаментальными последовательности $\{u_n(M)\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial z}\right\}$ и в силу полноты пространства $L_2(D)$ эти последовательности сходятся в среднем к элементам $u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$, принадлежащим пространству $L_2(D)$.

Элементы $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$ называются обобщенными частными производными элемента u.

Скалярное произведение и норма в пространстве $\mathrm{W}_2^1(D)$ задаются теми же формулами, что и в случае пространства $\hat{\mathrm{W}}_2^1(\bar{D})$, в которых теперь производные являются обобщенными производными, а интегрирование понимается в смысле Лебега.

Рассмотрим пространство $\hat{\mathrm{W}}_2^1(D)$, которое является пополнением по введенной норме линейного пространства функций, непрерывно дифференцируемых на $\bar{D}$ и таких, что $u(P)=0, P\in S.$

Пространства $\mathrm{W}_2^1(D)$ и $\hat{\mathrm{W}}_2^1(D)$, являются гильбертовыми пространствами.

Литература к § 1

1) В.А.Треногин. Функциональный анализ. М.: «Наука», 1980. 496 с.
2) В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 464 с.
3) А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.

§2. Примеры замкнутых и полных систем функций

1. Система полиномов Лежандра

Для системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ имеет место следующая теорема [1]:

Теорема. Система полиномов Лежандра замкнута в пространстве $L_2(-1,1)$.

Доказательство

Рассмотрим любую функцию $f(x)\in L_2(-1,1)$. Так как множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L_2(-1,1)$, то для любого $\varepsilon'>0$ найдется функция

$g(x) \in C[-1,1]$ такая, что $\|f(x)-g(x)\| < \varepsilon'$ (здесь и в дальнейшем применяются нормы в пространстве $L_2(-1,1)$).

По теореме Вейерштрасса, для функции $g(x) \in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon'' > 0$ найдется такая система коэффициентов $\{\tilde{C}_n\}$ и такая система полиномов $\{Q_n(x)\}$, где $Q_n(x)$- полином степени n, а также такое $N = N(\varepsilon'')$, что

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon''$$

и, следовательно,

$$\left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right|^2 dx < 2(\varepsilon'')^2 .$$

Из равенства $\sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} \tilde{C}_n Q_n(x)$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, можно определить коэффициенты $\{C_n\}$ через коэффициенты $\{\tilde{C}_n\}$. В результате получим, что для любого $\varepsilon''>0$ найдется такая система коэффициентов $\{C_n\}$ и такой номер $N = N(\varepsilon'')$, что

$$\left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\|^2 < \sqrt{2}\varepsilon''.$$

Применяя неравенство треугольника, получим для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ и любого $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| \le \| f(x) - g(x) \| + \left\| g(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon'')} C_n P_n(x) \right\| < \varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' < \varepsilon,$$

которое и доказывает теорему.

Следствия

Из замкнутости системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$ следует ее полнота в пространстве $L_2(-1,1)$, так как система $\{P_n(x)\}$ ортогональная.

1) **Утверждение.** Система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ исчерпывает все собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y(x)=0, \;\; x\in(-1,1), \\ \left|y(\pm 1)\right|<\infty. \end{cases}$$

Доказательство

В силу общих свойств собственных функций, система полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ ортогональна с весом $\rho=1$ (это также следует из того, что система полиномов Лежандра есть частный случай системы классических ортогональных полиномов). Предположим, что существует собственная функция $\tilde{y}(x)\neq P_n(x)$ и существует собственное значение $\tilde{\lambda}\neq\lambda_n=n(n+1)$. В силу общих свойств собственных функций функция $\tilde{y}(x)$ должна быть ортогональной ко всем полиномам Лежандра: $(\tilde{y},P_n)=0, n=0,1,\dots$. Но в силу полноты системы полиномов Лежандра отсюда вытекает, что функция $\tilde{y}(x)=0$ почти всюду на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно, не является собственной функцией.

2) Имеет место теорема Стеклова [1].

Теорема. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$.

Если $f(x)\in C^{(2)}[-1,1]$, то

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x), \text{ где } \quad f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Справка. Стеклов Владимир Андреевич (1864-1926). Племянник Н.А.Добролюбова, непосредственный ученик Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918) по Харьковскому университету, а впоследствии – его коллега по Академии наук. Участвовал в реорганизации Императорской Академии наук в Академию наук Советского Союза, был ее первый вице-президент.

2. Система присоединенных функций Лежандра

Поскольку при нечетных значениях m присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ не являются полиномами, то непосредственное применение теоремы Вейерштрасса, как это было сделано в предыдущем пункте, затруднено и поэтому теореме мы предпошлем следующую лемму [1]:

Лемма. Для любой функции $f(x)\in C[-1,1]$ можно построить такую функцию $\varphi(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)\in C[-1,1]$, которая приближает на отрезке $[-1,1]$ функцию $f(x)$ в среднем.

Доказательство

Мы докажем существование функции $\varphi(x)$ конструктивным способом, предъявив ее. В качестве функции $\varphi(x)$ можно взять функцию следующего вида:

$$\varphi(x)=\begin{cases} A_1\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, \; x\in[-1,\; -1+\delta], \\ f(x), \; x\in[-1+\delta,\; 1-\delta], \\ A_2\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, \; x\in[1-\delta,\; 1], \end{cases}$$

где постоянные A_1 и A_2 определяются из условия непрерывности на отрезке $[-1,1]$ функции $\tilde{\varphi}(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\varphi(x)$.

Действительно,

$$\left\|f(x)-\varphi(x)\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx=\int_{-1}^{-1+\delta}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx+\int_{1-\delta}^{1}\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2dx.$$

Так как $f(x)\in C[-1,1]$ и $\varphi(x)\in C[-1,1]$ то $|f(x)|<M$ и $|\varphi(x)|<M$ при $x\in[-1,1]$. Таким образом получаем, что

$$\left|f(x)-g(x)\right|^2\le 2\left|f(x)\right|^2+2\left|g(x)\right|^2<4M^2.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|f(x)-g(x)\right\|^2\le 4M^2\left(-1+\delta-(-1)\right)+4M^2\left(1-(1-\delta)\right)=8M^2\delta<\varepsilon,$$

при $\delta<\dfrac{\varepsilon}{8M^2}$ и любом $\varepsilon>0$ и любой функции $f(x)\in C[-1,1]$, что и доказывает лемму.

Теперь можно перейти к доказательству следующей теоремы [1]:

Теорема. Система присоединенных функций Лежандра замкнута в пространстве $L_2(-1,1)$.

Доказательство

Рассмотрим любую функцию $f(x)\in L_2(-1,1)$. Так как множество $C[-1,1]$ плотно в пространстве $L_2(-1,1)$, то для любого $\varepsilon'>0$ найдется функция $g(x)\in C[-1,1]$ такая, что $\left\|f(x)-g(x)\right\|<\varepsilon'$.

По доказанной лемме, для функции $g(x)\in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon''>0$ найдется такая функция $\varphi(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)\in C[-1,1]$, что $\left\|g(x)-\varphi(x)\right\|<\varepsilon''$.

По теореме Вейерштрасса, для функции $\tilde{\varphi}(x) \in C[-1,1]$ и любого $\varepsilon''' > 0$ найдется такая система коэфициентов $\{\tilde{C}_n\}$ и такая система полиномов $\{Q_n(x)\}$, где $Q_n(x)$- полином степени *n*, а также такое $N = N(\varepsilon''')$, что

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| \tilde{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon''')} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon'''.$$

Так как $0 \le (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \le 1$ при $x \in [-1,1]$, то, умножая последнее неравенство слева на $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$, мы го только усилим. Поэтому, определяя коэффициенты $\{C_n\}$ через коэффициенты $\{\tilde{C}_n\}$ по формуле

$$\sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \sum_{n=0}^{N(\varepsilon''')} \tilde{C}_n Q_n(x),$$

мы получаем неравенство

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon''',$$

из которого следует оценка квадрата нормы

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right|^2 dx < 2(\varepsilon''')^2,$$

откуда следует оценка нормы:

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| < \sqrt{2}\varepsilon'''.$$

Применяя неравенство треугольника, для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$\left\| f(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| \le \left\| f(x) - g(x) \right\| + \left\| g(x) - \varphi(x) \right\| +$$

$$+ \left\| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N(\varepsilon''')+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right\| < \varepsilon' + \varepsilon'' + \sqrt{2}\varepsilon''' < \varepsilon,$$

которая и доказывает теорему.

Следствия

1) Из замкнутости системы присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ следует её полнота, так как в силу общих свойств собственных функций система присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ ортогональная.
2) Система присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ исчерпывает все собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0, x\in(-1,1), \\ \left|y(\pm1)\right|<\infty. \end{cases}$$

В самом деле, пусть существует собственная функция рассматриваемой задачи $\tilde{y}(x)\neq P_n^{(m)}(x)$ $\tilde{\lambda}\neq\lambda_n=n(n+1)$. Тогда, в силу общих свойств собственных функций, $\left(\tilde{y},P_n^{(m)}\right)=0$ при каждом m и n=0,1,… и из полноты системы $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$ следует, что $\tilde{y}(x)$=0 почти всюду на $[-1,1]$ и, следовательно, $\tilde{y}(x)$ не является собственной функцией.

3) Имеет место теорема Стеклова [1]:

Теорема. Всякая функция, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ и обращающаяся нуль на концах отрезка, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе присоединенных функций Лежандра $\left\{P_n^{(m)}(x)\right\}$, $m\neq0.$

Итак, если $f(x)\in C^{(2)}[-1,1]$ и $f(\pm1)=0,$ то

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nP_n^{(m)}(x), \text{ где } f_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^{(m)}(x)dx.$$

3. Система сферических функций

Имеет место следующая лемма [2]:

Лемма. Пусть области $G \subset E^n$ и $D \subset E^m$, где E^n и E^m m и n – мерные вещественные пространства, ограничены, система функций $\Psi_l(P),\ l=1,2,...$ замкнута и ортонормированна в области G и при каждом $l=1,2,...$ система функций $\Phi_{kl}(M), k=1,2,...$ замкнута и ортонормированна в области D.

Тогда система функций

$$X_{kl}(M,P)=\Phi_{kl}(M)\Psi_l(P),\ \ k,l=1,2,...$$

замкнута и ортонормированна в области $G \times D \equiv \{(M,P): M \in D,\ P \in G\}$.

Система сферических функций n – го порядка может быть записана:

а) в тригонометрической форме:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

$$Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad m=0,1,...,n$$

б) в экспоненциальной форме:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(|m|)}(\cos\theta)e^{im\varphi}, |m|=0,1,...,n.$$

Замкнутость системы сферических функций, в силу леммы, является следствием замкнутости системы присоединенных функций Лежандра и системы тригонометрических функций.

Ортогональность системы сферических функций является следствием общих свойств собственных функций.

Полнота системы сферических функций есть следствие ортогональности и замкнутости.

Система сферических функций исчерпывает все собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0, M \in \Omega, \\ Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi), \\ \left| Y(\theta, \varphi) \right| < \infty, M \in \Omega, \end{cases}$$

на единичной сфере Ω.

Собственные значения $\lambda_n = n(n+1)$ являются $2n+1$ - кратно вырожденными.

Для системы сферических функций $\left\{ Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \right\}$ имеет место теорема Стеклова:

Теорема. Всякая функция $f(\theta, \varphi)$, дважды непрерывно дифференцируемая на единичной сфере, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям.

Замечание. Теорема Стеклова будет доказана в общем виде в § 3 главы VI части II.

4. Системы полиномов Лагерра и Эрмита

Для системы полиномов Эрмита $\left\{ H_n(x) \right\}$ можно доказать следующую теорему [1]:

Теорема. Система полиномов Эрмита полна в пространстве непрерывных функций, заданных и квадратично интегрируемых с весом e^{-x^2} на всей бесконечной прямой.

Это означает, что если функция $f(x)$, заданная на всей бесконечной прямой и квадратично интегрируемая на ней с весом e^{-x^2}, ортогональна ко всем полиномам Эрмита с весом e^{-x^2}, то она тождественно равна нулю.

Отсюда вытекает, что система полиномов Эрмита $\left\{ H_n(x) \right\}$ исчерпывает все собственные функции соответствующей задачи на собственные значения и собственные функции.

Аналогичную теорему можно доказать для системы полиномов Лагерра $\{L_n(x)\}$.

Литература к §2

1. А.Г. Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Лекции по математической физике. Серия «Классический университетский учебник». М: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 416 с.

2. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1988.