

Утверждено  
решением Ученого Совета  
физического факультета МГУ  
от 26.12.2019 г.  
Декан физического факультета МГУ  
профессор Н.Н.Сысоев



Государственный экзамен по физике  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
Магистерская программа  
*«Математическая физика»*

## Билет 1

1. Линейный квантовый гармонический осциллятор. Энергии и волновые функции квантовых состояний.
2. Измеримые функции. Лемма об измеримых множествах. Измеримость произведения измеримых функций. Измеримость предела измеримых функций.
3. Перечислите основные этапы применения метода конечных элементов. Рассмотрите на примере одномерной задачи (с самосопряжённым и положительно определённым оператором) сведение краевой задачи к вариационной задаче.

## Билет 2

1. Основные постулаты квантовой механики. Волновая функция, операторы координаты и импульса. Уравнение Шредингера.
2. Определение полного метрического пространства. Определение изометрии. Лемма о продолжении изометрии с плотных подмножеств. Определение пополнения метрического пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
3. Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений. Критерий прекращения итерационного процесса. Исключение корней.

## Билет 3

1. Линейный квантовый гармонический осциллятор. Энергии и волновые функции квантовых состояний.
2. Измеримые функции. Лемма об измеримых множествах. Измеримость произведения измеримых функций. Измеримость предела измеримых функций.
3. Перечислите основные этапы применения метода конечных элементов. Рассмотрите на примере одномерной задачи (с самосопряжённым и положительно определённым оператором) сведение краевой задачи к вариационной задаче.

## Билет 4

1. Основы специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Интервал. Изменение промежутков времени при переходе к другой системе отсчета. Лоренцево сокращение.
2. Вторая теорема Ляпунова - метод функций Ляпунова.
3. Перечислите основные этапы применения метода конечных элементов. Опишите конечные элементы в двумерном случае. Опишите процедуру поэлементной сборки матриц получаемой при применении метода конечных элементов системы линейных алгебраических уравнений. Вычисление интегралов по треугольникам и рёбрам при помощи барицентрической системы координат. Строчный формат хранения разреженных матриц.

## Билет 5

1. Дифракция электромагнитных волн в однородных и неоднородных средах. Скалярная и векторная задачи.
2. Теорема Тихонова о предельном переходе.
3. Метод прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей.

## Билет 6

1. Состояния макроскопической термодинамической системы частиц. Распределение Гиббса.
2. Теоремы Чаплыгина.
3. Квадратурная формула средних/трапеций/прямоугольников. Её погрешность. Вывод порядка точности квадратурной формулы.

## Билет 7

1. Распределение Максвелла. Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорость частиц. Идеальный газ во внешнем поле (распределение Больцмана). Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы.
2. Теорема Гауэса.
3. Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений. Критерий прекращения итерационного процесса. Диагностика кратности корня. Исключение корней.

## Билет 8

1. Вязкая ньютоновская жидкость. Уравнение Навье–Стокса. Некоторые точные решения.
2. Сходимость случайных процессов почти наверное, по вероятности, по распределению. Соотношения между различными видами сходимости. Сходимость случайных процессов в среднеквадратичном. Докажите, что из сходимости в среднеквадратичном следует сходимость по распределению.
3. Вычисление несобственных интегралов на квазиравномерных сетках.

## Билет 9

1. Функция Гамильтона в классической механике. Уравнения Гамильтона.
2. Вычисление начальных и центральных моментов для нормально распределенных случайных величин.
3. Вычисление интегралов с выполнением апостериорных асимптотически точных оценок погрешностей. Формула Рунге-Ромберга. Методика Ричардсона.

## Билет 10

1. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа материальных точек. Интегралы движения.
2. Ковариационная функция. Докажите свойства ковариационной функции. Вычислите ковариационную функцию для винеровского процесса.
3. Кратное интегрирование методом Монте-Карло.

## Билет 11

1. Линейный квантовый гармонический осциллятор. Энергии и волновые функции квантовых состояний.
2. Постановка задач математического программирования. Разрешимость задач. Теорема Вейерштрасса. Выпуклые, строго выпуклые и сильно выпуклые функционалы. Разрешимость задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Существование экстремума сильно выпуклого функционала на выпуклом замкнутом неограниченном множестве. Квадратичное и линейное программирование.
3. Интерполяционный многочлен Ньютона. Сходимость и расходимость интерполяции. Апостериорные оценки погрешности интерполяционного многочлена.

## Билет 12

1. Основные постулаты квантовой механики. Волновая функция, операторы координаты и импульса. Уравнение Шредингера.
2. Необходимые и достаточные условия экстремума дифференцируемого функционала. Необходимые и достаточные условия выпуклости и сильной выпуклости дифференцируемых функционалов. Применение к задаче псевдообращения.
3. Проблема собственных значений матрицы.

### Билет 13

1. Фермионы и бозоны. Теорема о связи спина и статистики. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.
2. Некорректно поставленные задачи. Понятие регуляризирующего алгоритма. Линейное операторное уравнение первого рода как пример некорректной задачи.
3. Одностадийные схемы Розенброка.

### Билет 14

1. Распределение Максвелла. Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорость частиц. Идеальный газ во внешнем поле (распределение Больцмана). Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы.
2. Интеграл Лебега. Интеграл Лебега от простой функции. Интеграл Лебега от неотрицательной функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Неравенство Чебышева. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
3. Вычисление несобственных интегралов на квазиравномерных сетках.

### Билет 15

1. Уравнения Максвелла. Электромагнитная теория света. Волновое уравнение как следствие уравнений Максвелла.
2. Предгильбертово и гильбертово пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Теорема Беппо Леви. Теорема о базисе.
3. Численные методы отыскания минимума выпуклых дифференцируемых функционалов. Задача без ограничений. Метод скорейшего спуска. Метод сопряженных направлений. Метод сопряженных градиентов. Метод Ньютона и его модификации.

### Билет 16

1. Вязкая ньютоновская жидкость. Уравнение Навье–Стокса. Некоторые точные решения.
2. Класс интегрируемых по Лебегу функций. Разбиение на классы. Пространства Лебега  $L^p$ . Неравенство Гельдера. Неравенство Минковского.
3. Численные методы отыскания минимума выпуклых дифференцируемых функционалов при наличии ограничений. Метод условного градиента. Метод проекции сопряженных градиентов.

### Билет 17

1. Первое начало термодинамики, его применение к описанию основных процессов. Второе начало термодинамики. Циклические процессы.
2. Некорректно поставленные задачи. Понятие регуляризирующего алгоритма. Линейное операторное уравнение первого рода как пример некорректной задачи.
3. Сформулируйте основные идеи, приводящие к методу конечных элементов. Лагранжевы конечные элементы. Эрмитовы конечные элементы.

### Билет 18

1. Представление о температуре как о характеристике случайных движений частиц. Броуновское движение. Формула Эйнштейна–Смолуховского.
2. Определение банахового пространства. Понятие эквивалентных норм. Определение операторной нормы. Теорема Хана–Банаха и ее следствия.
3. Численные методы отыскания квазирешений линейных некорректных задач на множествах монотонных и выпуклых функций. Оценка погрешности.

### Билет 19

1. Фермионы и бозоны. Теорема о связи спина и статистики. Распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.
2. Процесс Пуассона. Вывод.
3. Нелинейное волновое уравнение. Энергетический метод Левина.

### Билет 20

1. Вязкая ньютоновская жидкость. Уравнение Навье–Стокса. Некоторые точные решения.
2. Винеровский процесс. Определение, основные свойства. Докажите, что винеровский процесс не дифференцируем в среднеквадратичном.
3. Нелинейное уравнение простой волны. Метод характеристик.