Обобщённое решение системы двух ОДУ с модульно-кубической нелинейностью

Тищенко Б. В.

Московский Государственный Университет, Россия

Объект исследования

В качестве одного из естественных развитий работы [1] рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^4\frac{d^2u}{dx^2}=f(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2\frac{d^2v}{dx^2}=g(u,v,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),$$
$$u'(0)=u'(1)=0,\quad v'(0)=v'(1)=0,$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ — малый параметр, функция $g(u,v,x,\varepsilon)$, аналогично [1], гладкая по всем переменным, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,v,x,\varepsilon)=\begin{cases}f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u<0, v\in\mathbb{R},\ x\in[0,1],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u\geq 0, v\in\mathbb{R},\ x\in[0,1],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\end{cases}$$

причём $f^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ гладкие на соответствующих замкнутых множествах — это означает, что $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет не более чем разрыв первого рода на гиперплоскости $\{u=0\}\times\mathbb{R}\times[0,1]\times[0,\varepsilon_0]1$.

Обобщенные решение

Наличие разрыва первого рода по неизвестной переменной оказывается существенным отличием от аналогичной задачи в [1] с гладкими правыми частями, приводящим к необходимости сформулировать иное определение решения, не совпадающее даже с таковым для задачи из [2] с единственной точкой простого скачка в некоторой заранее известной x_0.

Определение 1. Назовём пару функций $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ таких, что

$$u_\varepsilon(x)\in W_2^2(0,1)\cap C^1[0,1],\quad v_\varepsilon(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1),$$

обобщённым решением задачи, если $v_\varepsilon(x)$ поточечно удовлетворяет второму уравнению задачи и граничным условиям, а $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет граничным условиям и для почти всех $x\in(0,1)$ выполняется дифференциальное включение

$$\varepsilon^4u_\varepsilon''(x)\in[f(u_\varepsilon-0,v_\varepsilon,x,\varepsilon),f(u_\varepsilon+0,v_\varepsilon,x,\varepsilon)].$$

Такое определение продиктовано имеющейся при $u=0$ неоднозначностью правой части, поскольку выбор f как непрерывной справа по u осуществлён для устранения произвола в задании функции и математически не является каким бы то ни было образом выделенным по отношению к выбору левонепрерывной f (более того, можно исследовать только лишь борелевы функции, как это сделано в [3], однако обобщение на столь слабый случай выходит за рамки настоящего исследования). Эта неоднозначность приводит к тому, что используемый метод монотонных итераций, вообще говоря, даёт сходящиеся последовательности функций, которые могут не быть решением задачи даже в смысле решений из пространств Соболева.

Условия

Чтобы обеспечить существование решения, накладываются следующие условия.

(У1) Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u,v,x,0)=0$ среди всех решений относительно u имеет лишь единственный изолированный корень $u=\varphi^{(\mp)}(v,x)$ такой, что для всех $(v,x)\in\mathbb{R}\times[0,1]$ выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v,x)<0<\varphi^{(+)}(v,x),\quad f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)>0.$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v,x)=g(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)$.

(У2) Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v,x)=0$ среди всех решений относительно v имеет лишь единственный изолированный корень $v=\psi^{(\mp)}(x)$ такой, что на отрезке $[0,1]$ выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x)<\psi^{(+)}(x),\quad h_v^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x)>0.$$

(У3) Пусть при всех допустимых u и $(v,x,\varepsilon)\in S_v\times[0,1]\times[0,\varepsilon_0]$ правые части уравнений удовлетворяют неравенствам, которые называются «условиями квазимонотонности»:

$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)<0,\quad g_u(u,v,x,\varepsilon)<0.$$

(У4) Пусть для каждого параметра $x^*\in(0,1)$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x^*)}^{v}h^{(-)}(s,x^*)ds>0,\quad v\in(\psi^{(-)}(x^*),\psi^{(+)}(x^*)],$$
$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x^*)}^{v}h^{(+)}(s,x^*)ds>0,\quad v\in[\psi^{(-)}(x^*),\psi^{(+)}(x^*)),$$
$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x^*)}^{u}f^{(-)}(s,v,x^*,0)ds>0,\quad u\in(\varphi^{(-)}(v,x^*),0],\quad v\in[\psi^{(-)}(x^*),\psi^{(+)}(x^*)],$$
$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x^*)}^{u}f^{(+)}(s,v,x^*,0)ds>0,\quad u\in[0,\varphi^{(+)}(v,x^*)),\quad v\in[\psi^{(-)}(x^*),\psi^{(+)}(x^*)].$$

При выполнении (У4) функции

$$\Phi^{(\mp)}(v)=\sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x^*)}^{v}h^{(\mp)}(s,x^*)ds},\quad \Psi^{(\mp)}(u,v)=\sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(v,x^*)}^{u}f^{(\mp)}(s,v,x^*,0)ds}$$

определены и задают выражения для сепаратрис седловых точек.

Замечание 1. Несмотря на свою громоздкость, комбинация Условий 1, 2 и 4 является более слабым требованием, нежели аналогичные условия в контексте работы [1], в которой неявно подразумевалось непересечение функциями f и g нуля вне корней хотя бы при достаточно малых ε, что само собой снимало вопрос о существовании сепаратрис.

(У5) Существует $(x_0,v_0)\in\{(x,v):\ x\in(0,1), v\in(\psi^{(-)}(x),\psi^{(+)}(x))\}$ — единственное решение системы

$$J_0v(v,x):=\int\limits_{\psi^{(-)}(x)}^{v}h^{(-)}(s,x)ds+\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x)}h^{(+)}(s,x)ds=0$$

$$J_0u(v,x):=\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x)}^{0}f^{(-)}(u,v,x,0)du+\int\limits_{0}^{\varphi^{(+)}(v,x)}f^{(+)}(u,v,x,0)du=0.$$

(У6) Якобиан системы из **(У5)** таков, что

$$D_0:=\left.\frac{D(J_0v,J_0u)}{D(v,x)}\right|_{\substack{v=v_0\\x=x_0}}<0$$

Асимптотическое приближение, верхнее и нижнее решения

Асимптотическое приближение строится идентично [1] (с минимальными и несущественными техническими особенностями) из двух частей: слева и справа от неизвестной точки перехода x^* такой, что $u(x^*)=0$. Обозначим $v^*:=v_\varepsilon(x^*)$ и будем искать n-ые приближения x^* и v^* как

$$x^*=x_n^*(\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \text{где } x_n^*(\varepsilon):=x_0+\varepsilon x_1+\ldots+\varepsilon^n x_n,$$
$$v^*=v_n^*(\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \text{где } v_n^*(\varepsilon):=v_0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^n v_n.$$

Верхние и нижнее решения строятся по тому же принципу, изменяются лишь точки и уровни сшивки; ниже приведена структура этих решений (характерная и для асимптотики):

$$\overline{U}_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overline{U}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leq x\leq\overline{x},\\ \overline{U}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x}<x\leq 1,\end{cases}\quad \overline{V}_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overline{V}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leq x\leq\overline{x},\\ \overline{V}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x}<x\leq 1.\end{cases}$$

$$\underline{U}_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}\underline{U}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leq x\leq\underline{x},\\ \underline{U}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x}<x\leq 1,\end{cases}\quad \underline{V}_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}\underline{V}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leq x\leq\underline{x},\\ \underline{V}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x}<x\leq 1.\end{cases}$$

Для асимптотики структура та же, но
Вводятся точки $\overline{x}$ и $\underline{x}$ как

$$\overline{x}=x_{n+1}^*(\varepsilon)-\varepsilon^{n+1}\delta,\quad \underline{x}=x_{n+1}^*(\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\delta,$$

а также введятся новые переменные

$$\overline{\tau}=\frac{x-\overline{x}}{\varepsilon},\quad \overline{\sigma}=\frac{x-\overline{x}}{\varepsilon^2};\quad \underline{\tau}=\frac{x-\underline{x}}{\varepsilon},\quad \underline{\sigma}=\frac{x-\underline{x}}{\varepsilon^2}$$

Производится сшиваются:

$$\overline{U}_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon)=\overline{U}_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon)\qquad \overline{V}_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon)=v_{n+1}^*(\varepsilon)+\varepsilon^{n+1}\mu=\overline{V}_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon)$$
$$\underline{U}_n^{(-)}(\underline{x},\varepsilon)=\underline{U}_n^{(+)}(\underline{x},\varepsilon)\qquad \underline{V}_n^{(-)}(\underline{x},\varepsilon)=v_{n+1}^*(\varepsilon)-\varepsilon^{n+1}\mu=\underline{V}_n^{(+)}(\underline{x},\varepsilon)$$

В явном виде функции $\overline{U}_n$, $\underline{U}_n$, $\overline{V}_n$ и $\underline{V}_n$ строятся как

$$\overline{U}_n^{(\mp)}=U_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\overline{\tau}\\ \sigma=\overline{\sigma}\\ x^*=\overline{x}}}+\varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x)+\alpha^{(\mp)}(x)+q_{sup}^{(\mp)}u(\overline{\tau})+m_{sup}^{(\mp)}u(\overline{\sigma})\right)+\varepsilon^{n+3}C_u\mathrm{e}^{-k_u|\eta_\mp|},$$

$$\underline{U}_n^{(\mp)}=U_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\underline{\tau}\\ \sigma=\underline{\sigma}\\ x^*=\underline{x}}}+\varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x)-\alpha^{(\mp)}(x)+q_{sub}^{(\mp)}u(\underline{\tau})+m_{sub}^{(\mp)}u(\underline{\sigma})\right)-\varepsilon^{n+3}C_u\mathrm{e}^{-k_u|\eta_\mp|},$$

$$\overline{V}_n^{(\mp)}=V_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\overline{\tau}\\ \sigma=\overline{\sigma}\\ x^*=\overline{x}}}+\varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x)+\beta^{(\mp)}(x)+q_{sup}^{(\mp)}v(\overline{\tau})\right)+\varepsilon^{n+2}C_v\mathrm{e}^{-k_v|\zeta_\mp|}+$$
$$+\varepsilon^{n+3}m_{sup}^{(\mp)}v(\overline{\sigma})-\varepsilon^{n+2}M_{n+2}^{(\mp)}v(0)\Big|_{x_n^*=\overline{x}}-\varepsilon^{n+3}m_{sup}^{(\mp)}v(0),$$

$$\underline{V}_n^{(\mp)}=V_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\underline{\tau}\\ \sigma=\underline{\sigma}\\ x^*=\underline{x}}}+\varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x)-\beta^{(\mp)}(x)+q_{sub}^{(\mp)}v(\underline{\tau})\right)-\varepsilon^{n+2}C_v\mathrm{e}^{-k_v|\zeta_\mp|}+$$
$$+\varepsilon^{n+3}m_{sub}^{(\mp)}v(\underline{\sigma})-\varepsilon^{n+2}M_{n+2}^{(\mp)}v(0)\Big|_{x_n^*=\underline{x}}-\varepsilon^{n+3}m_{sub}^{(\mp)}v(0).$$

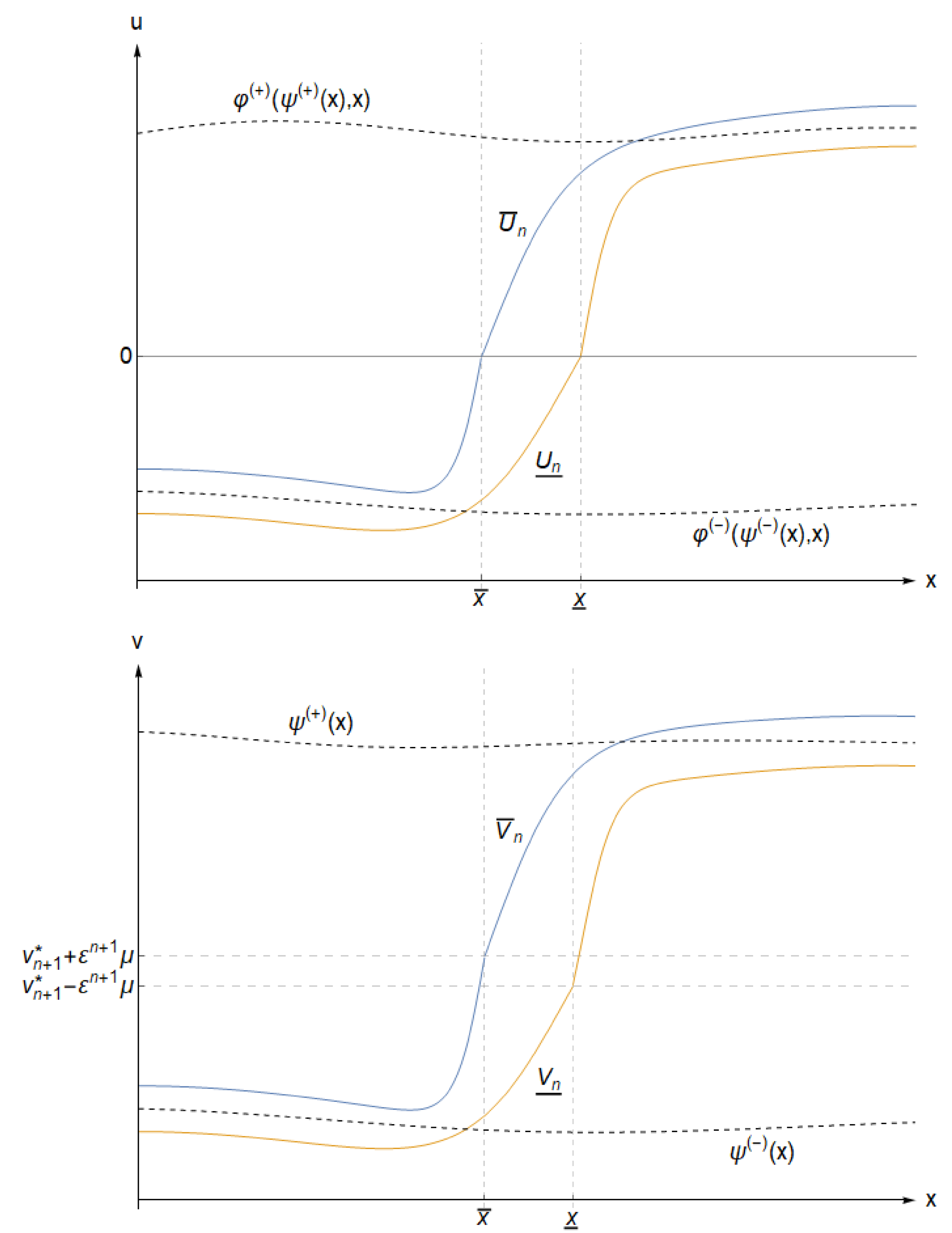

Рис. 1: Характерный вид u- и v-компонент верхнего и нижнего решений

Основной результат

*Пусть выполняются **(У1)–(У6)**, тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ существует, обобщённое решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ задачи, для которого пара функций $(U_n(x,\varepsilon),V_n(x,\varepsilon))$ является равномерным на отрезке $x\in[0,1]$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$, то есть*

$$|U_n(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x)|+|V_n(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x)|\leq C\varepsilon^{n+1},\ x\in[0,1],$$

где C — не зависящая от ε положительная константа.

Литература

[1] *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.

[2] *Левашова Н.Т., Тищенко Б.В.* Существование и устойчивость решения системы двух нелинейных уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 147–169.

[3] *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Матем. 1998. № 11. С. 69–76.