

# 3. Метод конечных разностей

## 1. Основные понятия

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L u(x) = f(x), & x \in D, \\ l u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

где  $L$  - линейный дифференциальный оператор,  $l$  - оператор дополнительных (начальных, граничных) условий,  $\bar{D} = D + \Gamma$ .

$\bar{D}$  заменяем на  $\bar{\omega}_h$  - дискретное множество узлов - **сетка**,  
 $u(x)$ ,  $x \in \bar{D}$  заменяем на  $y_h(x_n)$  - сеточные функции (зависят от параметра  $h$ ),  $x_n \in \bar{\omega}_h$ .

$u(x) \in H_0$ ,  $y_h(x_n) \in H_h$  . Пространство  $H_0$  отображается на пространство  $H_h$ :  $u(x) \in H_0 \sim u_h(x) = P_h u(x)$ ,  $u_h \in H_h$ , где  $P_h$  - линейный оператор из  $H_0$  в  $H_h$ .

На линейном пространстве  $H_h$  вводятся сеточные нормы  $\|y_h\|_h$  - аналоги норм в пространстве  $H_0$ .

**Условие согласования норм:**

$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$  , где  $u_h = P_h u$  ,  $\|u\|_0$  - норма в пространстве  $H_0$ .

Пусть  $\phi_h(x) = P_h f(x)$ ,  $x \in \omega_h$ ,  $\chi_h(x) = P_h \mu(x)$ ,  $x \in \gamma_h$ , где  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ ,  $\omega_h$  множество внутренних узлов,  $\gamma_h$  - множество граничных узлов.

Перейдем от дифференциальных операторов к разностным:

$$L \rightarrow L_h, \quad l \rightarrow l_h.$$

Будем говорить, что  $L_h$  аппроксимирует  $L$  с порядком  $m > 0$  в точке  $x$ , если

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \quad (3)$$

Задаче (1) – (2) ставится в соответствие система алгебраических (разностных) уравнений

$$\begin{cases} L_h y_h(x) = \phi_h(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (5)$$

Семейство уравнений (4), (5), зависящих от параметра  $h$ , называется разностной схемой.

Пусть  $z_h = y_h - u_h$ , где  $u_h = P_h u$ . Так как  $L_h$  и  $l_h$  - линейные операторы, то получаем задачу:

$$\begin{cases} L_h z_h(x) = \psi_h, & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} l_h z_h(x) = \nu_h, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\psi_h$  и  $\nu_h$  - погрешности аппроксимации на решении  $u(x)$  разностной схемой уравнения (1) и дополнительного условия (2). Схема (4)- (5):

1) аппроксимирует задачу(1)-(2) и имеет  $m$ -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(3h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m); \quad (8)$$

2) сходится и имеет  $m$  – й порядок точности, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \quad (9)$$

**Схема (4)-(5) корректна (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$  :**

- 1) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных  $\phi_h, \chi_h$  ;**
- 2) решение  $y_h$  равномерно по  $h$  непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).**

**Если  $L_h$  и  $l_h$  - линейные операторы, то при  $|h| \leq h_0$**

$$\|y_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\phi_h\|_{(2h)} + M_2 \|\chi_h\|_{(3h)}, \quad (10)$$

**где  $M_1 > 0, M_2 > 0$  - постоянные, не зависящие от  $h$  и выбора входных данных  $\phi_h$  и  $\chi_h$  .**

**Если схема (4)-(5) устойчива, а  $z_h$  – решение задачи (6)-(7),**

**то (10)  $\Rightarrow$**

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \|z_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(2h)} + M_2 \|v_h\|_{(3h)} \quad (11)$$

**Из равенства (11) следует утверждение:**

**Если линейная схема (4)-(5) устойчива и аппроксимирует задачу (1)-(2), то она сходится (из устойчивости и аппроксимации линейной схемы следует ее сходимость).**

**Порядок точности схемы (4)-(5) определяется порядком аппроксимации.**

## 2. Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (12) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (13) \\ u(0, t) = \mu_0, \quad u(1, t) = \mu_1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14) \end{array} \right.$$

**Разностная аппроксимация оператора**  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

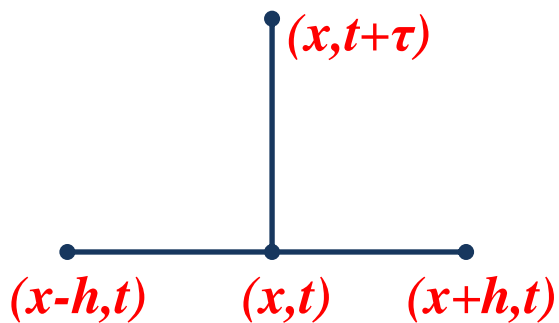
**Введем равномерные сетки :**

$$\bar{\omega}_h \equiv \{x_n = nh; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad hN = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau \equiv \{t_s = s\tau; \quad s = 0, 1, \dots, S; \quad \tau S = T\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} \equiv \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_n, t_s) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T\}.$$



Назовем **шаблоном**  
**множество узлов, на котором**  
**записывается оператор**

$$L_{h\tau}^{(0)} w = \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} - \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2} \quad (15)$$

$$w = w(x, t), \quad \hat{w} = w(x, t + \tau)$$

$$w_t = \frac{\hat{w} - w}{\tau} \quad (16)$$

$$v_{\bar{x}} = (v(x) - v(x - h)) \frac{1}{h}$$

$$v_x = (v(x + h) - v(x)) \frac{1}{h}$$

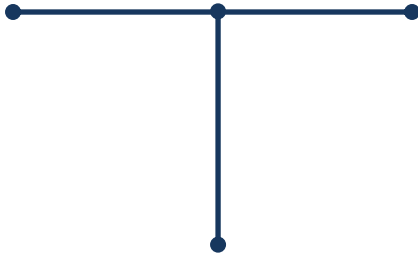
$$v_{\bar{x}\bar{x}} = (v_x - v_{\bar{x}}) \frac{1}{h}$$

$$w_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2}$$

$$L_{h\tau}^{(0)} w = w_t - w_{\bar{x}\bar{x}} \quad (17)$$

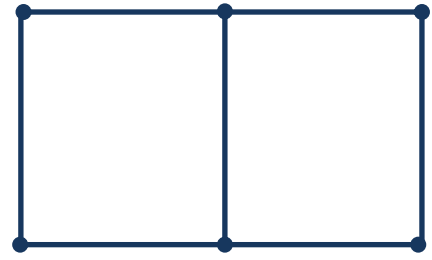


$(x-h, t+\tau)$   $(x, t+\tau)$   $(x+h, t+\tau)$



$(x, t)$

$(x-h, t+\tau)$   $(x, t+\tau)$   $(x+h, t+\tau)$



$(x-h, t)$

$(x, t)$

$(x+h, t)$

$$L_{h\tau}^{(1)} w = w_t - \hat{w}_{\bar{x}x} \quad (18)$$

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} w = w_t - (\sigma \hat{w}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) w_{\bar{x}x}) \quad (19)$$

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \underline{\underline{O(\tau^2)}} \quad (20)$$

$$w_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \underline{\underline{O(h^4)}}$$

Подставляя (20) в (17), (18), получим

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} w - Lw(x, t) = O(h^2 + \tau) \quad (21)$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} w - Lw(x, t) = O(h^2 + \tau) \quad (22)$$

При  $\sigma=0,5$  («симметричная схема») получаем

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)} w - Lw\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) = O(h^2 + \tau^2), \quad (23)$$

где  $\psi$  - погрешность аппроксимации оператора  $L$  соответствующим разностным оператором  $L_{h\tau}$ .

Добавляя к разностному уравнению разностные начальные и граничные условия (13), (14), получим разностную начально – краевую задачу (схему):

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{h\tau}^{(\sigma)} y \equiv y_t - (\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)y_{\bar{x}x}) = \phi, \quad (x_n, t_s) \in \omega_{h\tau}, \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x, 0) = u_0(x), \quad x = x_n \in \bar{\omega}_h, \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0, t) = \mu_0, \quad y(1, t) = \mu_1, \quad t = t_s \in \bar{\omega}_\tau, \end{array} \right. \quad (26)$$

где  $\phi = \phi_n^s = \phi(x_n, t_s)$  .

**Схема (24)-(26) аппроксимирует задачу (12)-(14) с порядком**

**$O(h^2 + \tau)$  при  $\sigma = 0, \sigma = 1$  и  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 0,5$  .**

**Схема называется явной, если  $\sigma=0$ .**

**При  $\sigma \neq 0$  схема называется неявной (при  $\sigma=1$  – чисто неявной).**

**Явная схема ( $\sigma=0$ ):**

$$y_n^{s+1} = y_n^s + \frac{\tau}{h^2} (y_{n-1}^s - 2y_n^s + y_{n+1}^s) + \tau \phi_n^s \quad (27)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

**Чисто неявная схема ( $\sigma=1$ ):**

$$\frac{1}{h^2} y_{n-1}^{s+1} - \left( \frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) y_n^{s+1} + \frac{1}{h^2} y_{n+1}^{s+1} = - \left( \frac{1}{\tau} y_n^s + \phi_n^s \right) \quad (28)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

## Теорема

Для устойчивости разностной схемы (24)-(26) достаточно, чтобы существовали такие не зависящие от  $h$  и  $\tau$  постоянные  $C_1 \geq 0$  и  $C_2 > 0$ , при которых имеет место оценка

$$\|y^{s+1}\| \leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \quad (29)$$

**Замечание.** В (29) введены нормы:

**равномерная (чебышевская):**  $\|y\| = \max_{n,s} |y_n^s|$  (30)

**на s-м слое:**  $\|y^s\| = \max_n |y_n^s|$  (31)

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} \|y^{s+1}\| &\leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \leq (1 + C_1\tau) \left\{ (1 + C_1\tau) \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \right\} + C_2\tau \|\phi\| = \\ &= (1 + C_1\tau)^2 \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + (1 + C_1\tau)\} \leq \dots \leq (1 + C_1\tau)^{s+1} \|y^0\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + \\ &+ (1 + C_1\tau) + \dots + (1 + C_1\tau)^s\} \leq (1 + C_1\tau)^{m+1} \|u_0\| + C_2\tau(m+1)(1 + C_1\tau)^m \|\phi\|, \quad s \leq m, \end{aligned} \quad (32)$$

**Так как**

$$(1 + C_1\tau)^m \leq (1 + C_1\tau)^M \leq e^{C_1\tau M} = e^{C_1T} \quad (33)$$

**при  $m \leq M$  , то полагая  $M_1 = e^{C_1T}$  ,  $M_2 = C_2TM_1 \Rightarrow$**

$$\|y\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \|\phi\|. \quad (34)$$

**Рассмотрим устойчивость **чисто неявной схемы****

**( $\sigma=1$ )**

$$(28) \Rightarrow y_n^{s+1} = y_n^s - \gamma \left\{ 2y_n^{s+1} - y_{n+1}^{s+1} - y_{n-1}^{s+1} \right\} + \tau \phi_n^s, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \quad (35)$$

$$y_{k_0}^{s+1} = \max_n y_n^{s+1} \geq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (36)$$

$$2y_{k_0}^{s+1} - y_{k_0+1}^{s+1} - y_{k_0-1}^{s+1} \geq 0 \Rightarrow \quad (37)$$

$$y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau \phi_{k_0}^s \quad (38)$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} = \min_n y_n^{s+1} \leq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (39)$$

$$2y_{\ell_0}^{s+1} - y_{\ell_0+1}^{s+1} - y_{\ell_0-1}^{s+1} \leq 0 \Rightarrow \quad (40)$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} \geq y_{\ell_0}^s + \tau \phi_{\ell_0}^s \quad (41)$$

**(38), (41)  $\Rightarrow$**

$$y_{\ell_0}^s + \tau \phi_{\ell_0}^s \leq y_{\ell_0}^{s+1} \leq y_n^{s+1} \leq y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau \phi_{k_0}^s \quad (42)$$

**(42)  $\Rightarrow$**

$$\left| y_n^{s+1} \right| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\| \quad (43)$$

**(43)  $\Rightarrow$**

$$\left\| y^{s+1} \right\| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\| \quad (44)$$

Рассмотрим устойчивость **явной схемы** ( $\sigma=0$ )

(27)  $\Rightarrow$

$$y_n^{s+1} = (1 - 2\gamma)y_n^s + \gamma y_{n+1}^s + \gamma y_{n-1}^s + \tau \phi_n^s \quad (45)$$

Пусть  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Тогда  $1 - 2\gamma > 0$  и получим

$$\begin{aligned} |y_n^{s+1}| &\leq (1 - 2\gamma)|y_n^s| + \gamma|y_{n+1}^s| + \gamma|y_{n-1}^s| + \tau|\phi_n^s| \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma + \gamma + \gamma)\|y^s\| + \tau\|\phi\| = \|y^s\| + \tau\|\phi\| \end{aligned} \quad (46)$$

(46)  $\Rightarrow$

$$\|y^{s+1}\| \leq \|y^s\| + \tau\|\phi\| \quad (47)$$



**Пусть**  $\delta y_n^s = (-1)^n \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  - **ошибка на  $s$ -м слое.**

$$\begin{aligned} \delta y_n^{s+1} &= (1-2\gamma)\delta y_n^s + \gamma\delta y_{n+1}^s + \gamma\delta y_{n-1}^s = \\ &= (-1)^n \varepsilon(1-2\gamma-\gamma-\gamma) = (-1)^{n+1} (4\gamma-1)\varepsilon \end{aligned} \quad (48)$$

$$\gamma > \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \delta y_n^{s+k} \right| = (4\gamma-1)^k \varepsilon, \quad 4\gamma-1 > 1 \Rightarrow$$

**ошибка неограниченно возрастает, причем с уменьшением шага сетки ошибка нарастает (увеличивается число шагов).**

**Выводы. Чисто неявная схема является безусловно устойчивой.**

**Явная схема является условно устойчивой при выполнении условия**  $\gamma < \frac{1}{2}$  **или**  $\tau < \frac{h^2}{2}$ . (49)

### 3. Метод прогонки.

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \mu_1, & y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \quad (51)$$

$$A_n \neq 0, \quad B_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (52)$$

(52)  $\Rightarrow$

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_n \beta_{n+1} + \beta_n \quad (53)$$

(50),(52),(53)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + B_n) y_{n+1} + \\ & + (\beta_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + \beta_n A_n + F_n) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

(54) =>

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad (55)$$

**Прямой ход:**

$$\beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

(51),(52)  $n=0$  =>

$$\alpha_1 = \alpha_1, \beta_1 = \mu_1 \quad (56)$$

(51),(52)  $n=N-1$  =>

$$y_N = \frac{\mu_2 + \beta_N \alpha_2}{1 - \alpha_N \alpha_2} \quad (57)$$

**Обратный ход:**

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = N - 1, N - 2, \dots, 0 \quad (58)$$

## Достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\alpha_\alpha| &\leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| < 2 \end{aligned} \quad (59)$$

Число арифметических операций прогонки  $O(N)$ .

Покажем, что (59)  $\Rightarrow |\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$

Индукция: а)  $|\alpha_1| = |\alpha_1| \leq 1$  ; б)  $|\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| \leq 1$  .

$$(59) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| - |B_i| \geq |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq 0 \quad (59a)$$

$$B_i \neq 0, \quad (59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > 0$$

$$(59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| \geq |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1$$

**Покажем, что**  $|\alpha_i| < 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$

**Если**  $|\alpha_i| < 1$ , то  $A_i \neq 0$ , **(59a)**  $\Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$ .

**Покажем, что (59)  $\Rightarrow 1 - \alpha_n \alpha_2 \neq 0$ .**

**а)**  $|\alpha_2| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_N| \leq 1 \Rightarrow$   
 $|1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_2| > 0.$

**б)**  $|\alpha_2| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_N| < 1 \Rightarrow$   
 $|1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| > 0.$

**При**  $|\alpha_i| \leq 1$  **ошибка**  $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$  **не нарастает:**

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta y_i = \alpha_{i+1} \delta y_{i+1} \Rightarrow$$

$$|\delta y_i| = |\alpha_{i+1}| |\delta y_{i+1}| \leq |\delta y_{i+1}|$$

**Если**  $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$  **возмущаются, то**  $\max_{1 \leq i \leq N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2$  ,

**где**  $\varepsilon_0$  **- ошибка округления.**