

Глава III. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

§2 Математические модели теории нелинейных волн

Обобщенное решение. Условие на разрыве

Формула интегрирования по частям:

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \oint_{\Gamma} uv \cos(x_k, n) ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

Где $D \in R^m$ - область с гладкой (или хотя бы кусочно-гладкой границей) Γ , $x = (x_1, \dots, x_n)$, (x_k, n) - угол между осью $0x_k$ и внешней нормалью к поверхности Γ . Формула справедлива для функций $u, v \in C^{(1)}(\bar{D})$.

Так как $\text{supp} \psi \subset \Pi_{x,t}$, то интеграл в подстановке берется только по кривой S . Имеем:

$$\int_{\Pi_{xt}^{(l)}} \{u_t + uu_x\} \psi dx dt = 0 \quad \text{при } l = 1, 2$$

$$\int_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dx dt =$$

$$= \int_S \left\{ \psi \cos(n^{\wedge} t) u^- + \psi \cos(n^{\wedge} x) \frac{(u^-)^2}{2} \right\} ds - \int_{\Pi_{xt}^{(1)} = 0} \{u_t + uu_x\} \psi dx dt$$

$$\int_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x \right\} dxdt =$$

$$= - \int_S \left\{ \psi \cos(n^{\wedge}t)u^+ + \psi \cos(n^{\wedge}x) \frac{(u^+)^2}{2} \right\} ds - \int_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u_t + uu_x \right\} \psi dxdt = 0$$

Сложим эти уравнения:

$$\int_{\Pi_{xt}} \left\{ u_t + uu_x \right\} \psi dxdt =$$

$$= \int_S \psi \left\{ \cos(n^{\wedge}t)[u] + \cos(n^{\wedge}x) \left[\frac{u^2}{2} \right] \right\} ds = 0$$

$$\forall \psi, \text{supp } \psi \in \dot{I}_{xt} \Rightarrow \cos(n^{\wedge}t)[u] + \cos(n^{\wedge}x) \left[\frac{u^2}{2} \right] \Big|_S = 0 \quad (15)$$

$$\cos(n^{\wedge}t) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}; \quad \cos(n^{\wedge}x) = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}} \quad (16)$$

$$(15), (16) \Rightarrow -\dot{s}(t)[u] + \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{s}(t)(u^+ - u^-) = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2} \quad (17)$$

Солитонные решения

Рассмотрим задачу Коши (25) для уравнения Кортевега-де Фриза:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (25)$$

где

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \quad (29)$$

Линейное интегральное уравнение Гельфанда-Левитана:

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z; t) K(x, z; t) dz = 0 \quad (23)$$

Ядро уравнения Гельфанда-Левитана имеет вид:

$$B(x, t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(t) e^{-\chi_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikt} dk \quad (22)$$

Данные рассеяния для задачи (25), (29) получаются следующие:

а) существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -\chi_1^2$, и

б) $C_1(t) = \sqrt{2}e^{4t}$, $b(k, 0) = 0 \Rightarrow b(k, t) = b(k, 0)e^{i8k^3 t} = 0$.

Ядро уравнения Гельфанда-Левитана имеет вид:

$$B(x, t) = 2e^{8t-x} \quad (31)$$

Уравнение Гельфанда-Левитана с ядром (31)

$$K(x, y; t) + 2e^{8t-x-y} + 2e^{8t-y} \int_x^{\infty} K(x, z; t) e^{-z} dz = 0 \quad (32)$$

Ищем решение в виде

$$K(x, y; t) = L(x; t) e^{-y} \Rightarrow \quad (33)$$

$$L(x; t) e^{-y} + 2e^{8t-x-y} + 2e^{8t} e^{-y} \int_x^{\infty} L(x; t) e^{-2z} dz = 0 \Rightarrow$$

$$L(x; t) + 2e^{8t-x} + 2e^{8t} L(x; t) \int_x^{\infty} e^{-2z} dz = 0$$

$$L(x; t) + 2e^{8t-x} + 2e^{8t} L(x; t) \left(-\frac{1}{2} e^{-2z} \Big|_x^{\infty} \right) = 0$$

$$L(x; t) + 2e^{8t-x} + 2e^{8t} L(x; t) \frac{e^{-2x}}{2} = 0$$

$$L(x; t) + 2e^{8t-x} + e^{8t-2x} L(x; t) = 0$$

$$(1 + e^{8t-2x}) L(x; t) = -2e^{8t-x}$$

$$L(x; t) = -\frac{2e^{8t-x}}{1 + e^{8t-2x}} \frac{e^{2x-8t}}{e^{2x-8t}} = -\frac{2e^x}{e^{2x-8t} + 1}$$

$$L(x; t) = -\frac{2e^x}{1 + e^{2x-8t}} \quad (34)$$

Отсюда следует, что

$$K(x, y; t) = L(x; t)e^{-y} = -\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}} \quad (35)$$

и по формуле (24) получаем решение задачи Коши (25), (29):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t) \Rightarrow \\ u(x, t) &= -2 \frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{1+e^{2x-8t}} \right) = 4 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+e^{2x-8t}} \right) = -4 \frac{e^{2x-8t} \cdot 2}{(1+e^{2x-8t})^2} = \\ &= -2 \frac{e^{2(x-4t)}}{e^{2(x-4t)} \left(\frac{e^{-(x-4t)} + e^{(x-4t)}}{2} \right)^2} = -\frac{2}{ch^2(x-4t)} \end{aligned} \quad (36)$$

Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега-де Фриза

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1}{ch^2 \left(\frac{1}{2} \alpha (x - x_0) - \frac{\alpha^3}{2} t \right)}. \quad (37)$$

Оно соответствует значениям параметров

$$\alpha = 2; x_0 = 0.$$